

別紙 1 (博士論文の審査結果の要旨)

氏名 Amjid Ali

一般に、分数次微分方程式の厳密解を求めることは困難であり、その解の挙動を把握するには高精度な数値解が必要である。このような数値解法の開発においては、別の関数に対する分数次導関数を考え、これによって元の分数次微分方程式を近似することが多い。近年、この関数としてウェーブレット関数が着目されているが、これを用いた高精度かつシンプルな数値解法の開発はほとんどなされていない。そのため、ウェーブレット関数を用いた分数次微分方程式の数値解法は、今後も更なる研究展開が求められている分野である。

そこで、本論文では、ウェーブレット関数の中で最もシンプルな Haar ウェーブレット関数に着目し、これに基づく分数次微分方程式の数値解法を提案している。

本論文は全 6 章で構成されている。

第 1 章は序論として、分数次微分方程式およびその数値解法に関する既存研究について概観し、本論文の研究背景や目的について述べている。

第 2 章では、本論文で登場する特殊関数、非線形問題の線形化手法、分数次微分積分学の基本概念を述べている。また、Haar ウェーブレットと Haar ウェーブレットによる関数近似について述べ、 ϕ -Haar ウェーブレット作用素行列を構築し、これに基づく数値計算スキームの誤差解析についても述べている。

第 3 章では、線形および非線形初期値分数次微分方程式を解くための ϕ -Haar ウェーブレット作用素行列に基づく数値計算スキームを提案し、数値例を示している。数値実験では、選点の数が少ない場合でも、高精度に近似解が求められることが確認されている。

第 4 章では、第 3 章の方法を非線形分数次境界値問題に対しても適用できるように拡張するとともに、より一般的な分数次微分方程式に対する実装方法についても述べている。そして、数値例を示すととともに、本手法が効率よく、かつシンプルに適用できることを示している。

第 5 章では、分数次偏微分方程式の数値解を求めるために、2 次元 ϕ -Haar ウェーブレット関数に基づく数値解法について議論し、厳密解が分かっている 3 つの方程式、Time-fractional telegraph 方程式、Linear fractional diffusion 方程式、Convection-diffusion 方程式に対して近似解を求めている。これまで、 ϕ -ウェーブレット作用素行列を用いて、分数次偏微分方程式の数値解を求めた例はなく、本研究が最初の例である。その結果、これらの方程式についても高精度な近似解が求められることが確認された。

第 6 章では以上の本論文で得られた知見が総括され、今後の展望について述べられている。

以上、本論文は、 ϕ -Haar ウェーブレット作用素行列を導出し、これを用いて初期条件または境界値条件を有する分数次微分方程式の近似解を高精度かつシンプルに求める数値解法を提案するとともに、誤差解析も行っている。また、分数次非線形偏微分方程式や他のウェーブレット基底への拡張などへの有用な知見が示されている。

令和 5 年 2 月 9 日に実施した博士論文公聴会においても種々の質問がなされ、いずれも著者の説明により質問者の理解が得られた。

また、本研究は、審査付学術論文 4 編で報告されており、著者は研究者としての十分な能力を有していると言える。

以上の審査結果に基づき、本論文は博士 (理学) の学位を授与するに値すると判断され、審査員全員一致で合格と判定した。