

実践研究報告書要旨

数学的ストラテジーを用いた数学的思考力を育む授業の分析・開発

井田 悠介（授業実践探究コース）

1. はじめに

平成30年度告示の高等学校学習指導要領によると、これからの時代は、生産年齢人口の減少、グローバル化の進展や絶え間ない技術革新等により、社会構造や雇用環境は大きく、また急速に変化し、予測が困難な時代となると予想されている。また、Society5.0とも呼ばれる新たな時代の到来が、社会や生活を大きく変えていくとの予測もされている。そして、このような時代に対応するためには、「様々な変化に積極的に向き合い、他者と協働して課題を解決していくことや、様々な情報を見極め、知識の概念的な理解を実現し、情報を再構成するなどして新たな価値につなげていくこと、複雑な状況変化の中で目的を再構築することができるようにすること」（高等学校学習指導要領解説数学編2018）が求められている。

学習指導要領によるとこれらの能力を育成するための1つの方法として、「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善を推進するとあった。また、その中の留意点の1つに、深い学びの鍵として「見方・考え方」を働かせることが重要であることも記載されていた。「見方・考え方」とは、平成30年度告示の高等学校学習指導要領によると、「どのような視点で物事を捉え、どのような考え方で思考していくのか」というその教科等ならではの物事を捉える視点や考え方である。ほかの教科でも同じように重要視されているが、数学においては、「数学的な見方・考え方」という言葉を用いてさらに重要視されている。そして、これらを働かせた数学の学習を行うことが重要であることを「算数・数学の問題発見・解決の過程」としてイメージ図をあげ解説されている。

そこでまず、「数学的な見方・考え方」とはどのような考え方なのか考察する。

1) 平成30年度告示の高等学校学習指導要領では、数学的思考力という言葉を用いずにそれに似た言葉として「数学的な見方・考え方」があった。平成30年7月に告示された高等学校学習指導要領解説数学編より、数学的な見方・考え方とは「事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的、体系的に考えること」とある。

2) 片桐（2004）は数学的な考え方を数学の方法に関係した数学的な考え方と数学の内容に関係した数学的な考え方として整理している。数学の方法に関係した数学的な考え方は、帰納的な考え方、類推的な考え方、など11種類に分類している。また、数学の内容に関係した数学的な考え方は、集合の考え、単位の考え、など9種類に分類している。

次に、「数学的な見方・考え方」と同じように使われる言葉として「数学的思考力」という言葉がある。一般的に「数学的思考力」とは数学を学ぶ際に用いる・身につく思考力（考える力）と言われることが多い。そこで、数学的思考力とは詳しくどのようなものなのか考察してみた。

1) David Tall は数学的思考として以下のようにまとめている。「人間が知覚したり・操作したり・推論したり、数学記号を使ったり、言葉を工夫して使いながら、どのように考えるかを示す。」と述べている。

2) 数学的思考力という言葉を用いていたのは、永野である。永野（2018）によれば数学的思考力とは、① 情報を整理する力、② 様々な視点から見る力、③ 具体化する力（イメージする力）、④ 抽象

する力（モデル化する力）、④ 分解する力、⑥ 変換する力、⑦ 総合し説明する力、この7つの力を複合させたものが数学的思考力だと述べている。

このように「数学的な見方・考え方」と「数学的思考力」はほぼ同じ意味で使われていることがわかった。これらの考えをまとめて本研究では、あらためて、数学的思考力とは与えられた情報や知識を用いて、論理的に組み合わせて思考する力。すなわち、数学の問題を解く際に、あらゆる方法で問題を解決するために考える力（思考する力）であると定義した。そして本研究では、そのあらゆる方法についての考え方を片桐（2004）の数学の方法に関係した数学的な考え方の11種類を用いることにした。

次に、これらの数学的思考力を生徒に身につけさせるにはどのようにすればよいかと考えたときに、問題を解く際の視点を身に付けさせることが重要であると考えた。では、どのようにして問題を解く際の視点を身に付けさせることができるか。ここで問題を解く有効な手段として、「数学的ストラテジー」に着目した。

数学的ストラテジーとは、G・ポリアの「いかにして問題を解くか」（柿内賢信訳）の中で、数学の問題を解くうえでどのような方法や考え方を行っているかまとめたものであり、すなわち問題を解くための方法・示唆であると述べている。その他の先行研究をみると、「考えるための道具」（塚原 2000）

「考え方の手段」（松坂 2007）とあり、それらをまとめると問題を解くうえでの道具・手段・指針・示唆のたぐいであることが分かる。次に、具体的にはどのような数学的ストラテジーがあるのか、近藤（2004）は数学的ストラテジーの具体例として15種類の数学的ストラテジーを述べている。

これらの数学的ストラテジーの具体例と片桐（2004）の数学の方法に関係した数学的な考え方との関係性を考えてみると、「1 帰納的な考え方」は結論が正しいかを色々な情報から考えることなので数学的ストラテジーの「⑨ パターンを見つける、⑩ 逆向きに考える、⑬ 試行検討する、⑮ 論理的に推論する」などの視点を持つことで身につけることができる。このようにして上記以外の関係性を考えると、これらの数学的ストラテジーを学ぶことによって身につけることができる数学的な考え方（数学的思考力）は次の表のようになる。（表1）

（表1 数学的ストラテジーと数学的思考力の関係性）

1 帰納的な考え方 ...	⑨ パターンを見つける、⑩ 逆向きに考える、⑬ 試行検討する、⑮ 論理的に推論する
2 類推的な考え方 ...	③ 同値な問題に置き換える、⑥ 対称性を考える、⑭ 間接証明を用いる、⑮ 論理的に推論する
3 演繹的な考え方 ...	② 定義に戻る、⑬ 試行検討する、⑮ 論理的に推論する
4 統合的な考え方 ...	⑥ 対称性を考える
5 発展的な考え方 ...	① 条件を吟味する、⑥ 対称性を考える
6 抽象化の考え方 ...	① 条件を吟味する、⑪ 場合分けをする
7 単純化の考え方 ...	⑦ 補助問題を考える、⑧ 変数を減らした問題を考える
8 一般化の考え方 ...	⑨ パターンを見つける
9 特殊化の考え方 ...	④ 特殊な場合を考える
10 記号化の考え方 ...	⑫ 方程式を立てる
11 数量化、図形化の考え方 ...	⑤ 図をかく

このように数学的ストラテジーを学ぶことによって数学的な思考を行う際の視点を身につけること

が示唆される。以上のことから、数学的ストラテジーを用いることで、問題を解くための視点を学び、数学的な思考が発展すると考える。本研究では、数学的ストラテジーが数学的な思考に有効かを検討する。

2. 研究の目的

本研究では、数学的ストラテジーを用いて生徒の数学的思考力を身につけることができるのかを考察する。そのためには生徒がどの程度、数学的ストラテジーを活用して問題を解いているのか。また、数学的ストラテジーを知っているのかを把握する。その後、数学的ストラテジーを用いて問題を解く授業を行うことによっての生徒の変化を分析することで、生徒に数学的思考力が身についたかを考察する。

3. 研究の方法

研究の方法としては、以下のように進めていく。

- (1) 教科書における、数学的ストラテジーの種類、およびそれらから身につけることができる数学的な思考について把握する。
- (2) 生徒がどの程度、数学的ストラテジーを活用して問題を解いているのか。また、数学的ストラテジーを知っているのかをアンケートを用いて把握する。
- (3) 高等学校における数学的ストラテジーを用いた授業の開発と実践を行う。
- (4) 実践授業の検証・分析を行う。

4. 研究の実際

4. 1 教科書における、数学的ストラテジーの種類

今回の研究授業で用いる教科書は、数学Ⅱ（数研出版）の教科書である。そこで、数学Ⅱ（数研出版）の教科書の問題を分析した結果、問題を解くにあたって使われる数学的ストラテジーを調べたところ① 定義・定理に戻る、② 文字で置く、などの12種類が確認された。その中でも、授業を行う第3章「図形と方程式」の第3節「軌跡と領域」では、「① 定義・定理に戻る、② 文字で置く、④ 方程式を立てる、⑦ 場合分けをする、⑧ 図をかく、⑪ 補助問題を考える」の数学的ストラテジーが使われている。

4. 2 数学的ストラテジーを用いた授業実践

今回の実践では、計6コマの授業を行った。次の表はその6コマの授業で身につけることができる数学的ストラテジーの一覧である。（表2）

（表2 授業で身につけることができる数学的ストラテジー）

1. 不等式の表す領域 ① 直線を境界線とする領域 ② 円を境界線とする領域	図をかく、定義・定理に戻る
2. 不等式の表す領域 ③ 連立不等式の表す領域	図をかく、定義・定理に戻る、場合分けをする
3. 不等式の表す領域 ④ 領域の最大・最小	図をかく、定義・定理に戻る、補助問題を考える
4. 軌跡と方程式 ① 座標平面上の軌跡（2点の中点を通る点の軌跡）	図をかく、定義・定理に戻る、文字で置く、方程式を立てる

5. 軌跡と方程式 (研究授業)	図をかく、定義・定理に戻る、文字で置く、方程式を立てる
② 座標平面上の軌跡 (アポロニウスの円)	
6. 軌跡と方程式	図をかく、定義・定理に戻る、文字で置く、方程式を立てる
③ 線分の midpoint の軌跡	

次に、授業で行う内容のどこでどのような数学的ストラテジーが活用されているかを示していく。

例題 9 2点 A(0, 0), B(3, 0) からの距離の比が 2:1 である点 P の軌跡を求めよ。

解 点 P の座標を (x, y) とする。②
P の満たす条件は
 $AP:BP=2:1$
これより $AP=2BP$
すなわち $AP^2=4BP^2$
③ $AP^2=x^2+y^2$, $BP^2=(x-3)^2+y^2$ を代入すると
 $x^2+y^2=4\{(x-3)^2+y^2\}$ ④
整理すると $x^2+y^2-8x+12=0$
すなわち $(x-4)^2+y^2=2^2$ …… ①
ゆえに、条件を満たす点 P は、円 ① 上にある。
逆に、円 ① 上の任意の点 P(x, y) は、条件を満たす。
よって、求める軌跡は、中心が点 (4, 0)、半径が 2 の円である。

【補足】 m, n は正の数とする。一般に、2点 A, B からの距離の比が m:n である点の軌跡は、m≠n ならば、線分 AB を m:n に内分する点と外分する点を直径の両端とする円である。この円を アポロニウスの円 という。m=n ならば、軌跡は、線分 AB の垂直二等分線である。

練習 37 2点 A(-1, 0), B(2, 0) からの距離の比が 1:2 である点 P の軌跡を求めよ。

授業で扱った例題を左に示す。(図 1) まず、①の部分で「図をかく」の数学的ストラテジーを用いてこの問題の条件より、どのような図形が描かれるのか。求める軌跡がどのようなになっているのかを想像する。次に、②で「文字で置く」の数学的ストラテジーを用い任意の点 P(x, y)とおき、その点 P が満たす条件から AP と BP の距離関係を数式化する。その後、③で「定義・定理に戻る」を用いて、AP 間と BP 間の 2 点間の距離を求める。最後に②で求めた AP と BP 間の距離関係と、③で求めた AP 間と BP 間の距離から、④で「方程式を立てる」の数学的ストラテジーを用いて、求める軌跡の方程式を出す。

(図 1 大矢雅則 他 16 名 (2018)『高等数学Ⅱ』数研出版. p102.)

5. 実践授業の検証・分析

授業実践を行う前に、生徒に数学的ストラテジーについてのアンケートを実施した。その結果では、生徒は数学の問題を解く際に数学的ストラテジーについて有用性は感じているものの、どのようなものなのか、その使い方がわからないことがうかがえる。また、その数学的ストラテジーの種類が少ないことが分かった。授業後にも同じアンケートをとり、その結果を比較した。最初の質問は「数学の問題を解くうえで、問題を解く方法や戦略を持つことは役に立つと思いますか。」という質問で生徒が数学の問題を解くうえでストラテジーが役に立つかの意識の変化を見た。すると、授業前に比べると授業後が問題を解く際にストラテジーを考えることは役に立つと考える割合が増えていた。よって、生徒たちのストラテジーを考えることが有効だと意識が向上したことがうかがえる。

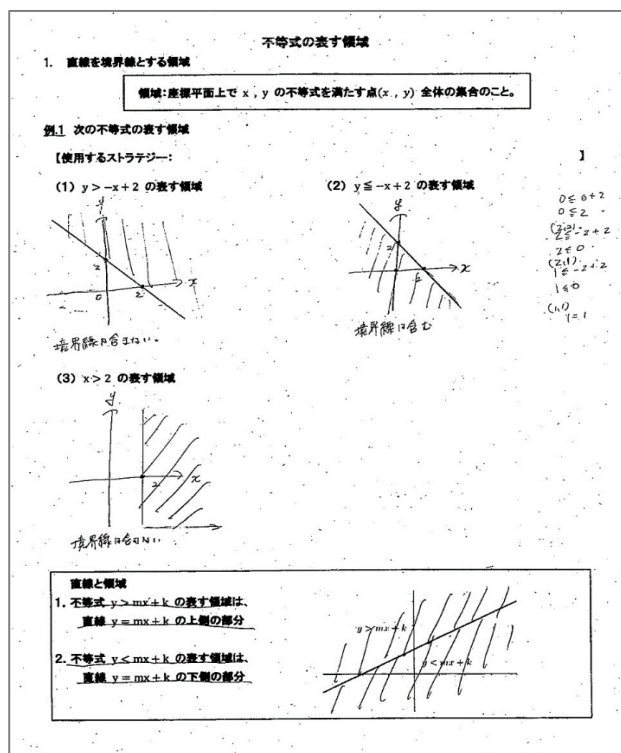
第 ii・iii の質問は、「数学の問題を解く際にどのようにすれば解けるか、解く方法や戦略等を考えてから解こうと思いますか。また、はいと答えた人はどのような方法や戦略をもって問題を解いていますか。思いっくだけ書いてください。」という質問を行った。この質問により、生徒がストラテジーを実際に使っているか、その種類はどのくらいあるかを見た。その結果より、授業前はストラテジーを使用している生徒の人数や、生徒が考える数学的ストラテジーの数も少なかったが、授業後は増加している。数学的ストラテジーを提示しながら授業を行うことで、今までこのようなことを考えたこともなかった生徒がこの考え方を知り、問題を解く際に活用する生徒が増えたことがうかがえる。さらに、生徒が考えるストラテジーの種類も増えているので考える幅も広がったとみることができる。

次に、質問 ii において数学的戦略への意識が変わった生徒と、そうではない生徒とを比べるために以下の通りに分類した。

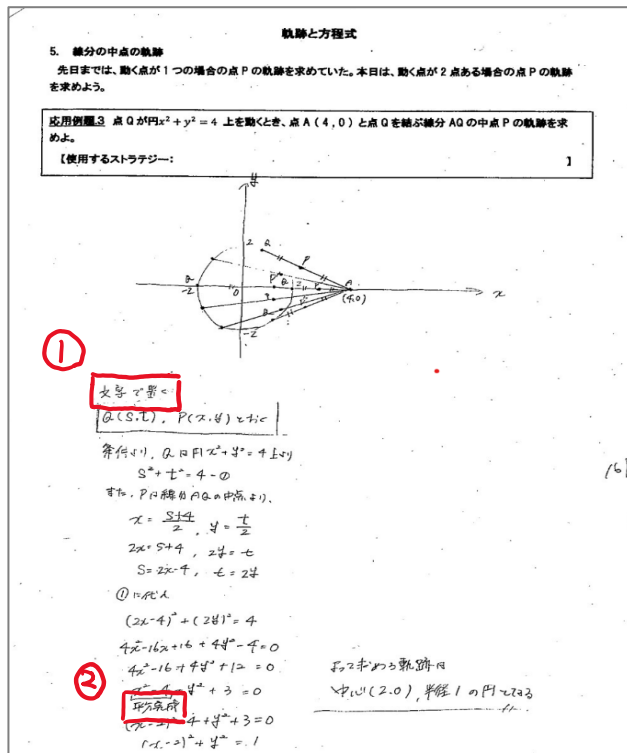
- ① 始めから戦略を意識している生徒
(質問 ii の回答が授業前「はい」→ 授業後「はい」の生徒)
- ② 授業を行うことによって戦略を意識するようになった生徒
(質問 ii の回答が授業前「いいえ」→ 授業後「はい」の生徒)
- ③ 授業後も戦略を意識しない生徒
(質問 ii の回答が授業前「いいえ」→ 授業後「いいえ」の生徒)

このように、①～③までの生徒のワークシートを見て授業中にどのように数学的戦略を意識しているかその変化を見てみた。本要旨については、②のグループの生徒の中で変化が大きかった生徒のみを掲示する。(図 2)

授業はじめ (1 限目)



授業後半 (6 限目)



(図 2 始めから意識が向上した生徒のプリント (T さん))

授業始めは、黒板を写してまとめているだけである。戦略については書かれていないので意識していないと思われる。後半になると、相変わらず「使用する戦略」の部分には記述はないが、図はしっかりと記入できている。さらに、①、②のように解答になかにどこで戦略を使うのか書いてあり、戦略を意識するようになってきたと思われる。

次に、授業後に行った 5 点満点の小テストとアンケートの結果を照らし合わせて、始めから戦略を考えているグループと授業を行ったことによって戦略を考えるようになったグループと授業後も戦略を考えないグループでの平均点を算出してみた。

(表 3 小テストの結果)

- ① 始めから戦略を意識している生徒の平均点…3.00 点
- ② 授業を行うことによって戦略を意識するようになった生徒の平均点…2.00 点
- ③ 授業後も戦略を意識しない生徒の平均点…1.33 点

この結果より、ストラテジーを意識している生徒の正答率は高くなっていることがわかる。これにより、問題を解く際にストラテジーを意識することは有効であるといえるであろう。

これらの結果より数学的ストラテジーを用いて問題を解いている生徒は小テストの点数が高い傾向あることがわかった。よって、中間層以上の生徒は図2の①、②のように今回の授業で扱った数学的ストラテジーを用いて、問題を解くための視点を捉えて解くことができているので、「① 定義・定理に戻る」からは「演繹的な考え方」、「② 文字で置く」、「④ 方程式を立てる」からは「記号化の考え方」、「⑦ 場合分けをする」からは「抽象的な考え方」、「⑧ 図をかく」からは「数量化・図形化の考え方」、「⑪ 補助問題を考える」からは、「単純化の考え方」を身につけることができているといえる。しかし、下位層の生徒は、数学的ストラテジーを用いることができずに問題も解くことができていない傾向があるため、これらの数学的思考力を身につけることはできていないとみることができる。

6. 成果と課題

(1) 本研究の成果

・分析の結果より、中間層以上の生徒は数学的ストラテジーを用いて問題を解くための視点を捉えて問題を解くことができているので、それらから身につく数学的思考力を身につけることができているといえる。しかし、下位層の生徒は、数学的ストラテジーを用いることができずに問題も解くことができていない傾向があるため、今回の授業内で身につけることができる数学的思考力を身につけることはできていないとみることができる。

(2) 本研究の課題

・今回の実践では、成績が中間層以上の生徒は数学的思考力が身についたと分析することができたが、成績が下位層の生徒には数学的思考力が身についたとはいえなかった。よって、成績が下位層の生徒にも数学的思考力を身につけさせるための手立てがまだ必要ということがわかったため次回以降の実践では修正を行っていききたい。

○引用・参考文献

- ・大矢雅則 他 16 名 (2018)『高等数学Ⅱ』数研出版.
- ・片桐重男 (2004)『数学的な考え方の具体化と指導ー算数・数学科の真の学力向上を目指してー』明治図書.
- ・近藤圭太 (2004)「数学的問題解決ストラテジーの構成に関する研究」広島大学修士論文, pp. 2-169.
- ・G.Polya (1975)『いかにして問題を解くか 訳』柿内賢信 丸善株式会社.
- ・塚原成夫 (2000)『数学的思考の構造ー発見的問題解決のストラテジー』現代数学社.
- ・David Tall (2016)『数学的思考ー人間の心と学びー 訳』磯田正美・岸本忠之 共立出版.
- ・永野裕之 (2018)『数学的思考力が身につく伝説の入試良問』大和書房.
- ・松坂勲 (2007)「数学教育におけるストラテジーの指導について」数学教育論文発表会論文集 40, pp. 883-884.
- ・文部科学省 (2018)『高等学校学習指導要領解説数学編』学校図書出版.