

## 光位置センサーを用いた振り子の計測

遠藤 隆<sup>1</sup>

### Measurement of Pendulum Oscillations by Using a Position Sensitive Detector

Takasi ENDO<sup>1</sup>

#### 要 旨

講義における演示実験または学生実験のための単振り子の振動の簡便な計測方法を開発した。計測には、Arduino に接続した光学的距離測定モジュールを用い、Arduino から送信されたデータをコンピュータで分析した。その結果、振り子の振動波形を定量的に計測し、分析することができた。また、連成振動の測定も試みた。

【キーワード】 実験教材、振り子、Arduino、光位置センサー

#### 1. はじめに

物理学を専攻しない学生を対象とした物理学の講義においても、実験を取り入れることは教育上有意義である。数式から現象を容易に想像できない学生にとっては、実際の現象を見ることが、物理の法則や概念を理解するだけでなく、親しみや関心を持つためにも重要である。ただし、測定器がブラックボックスになっているような実験は、単にマニュアルの手順を確認するだけに終わることになり、大きな教育効果は期待できない。したがって、実験は、できるだけ単純で直感的にも理解しやすい現象を可視化された計測過程で行うことが望ましい。振動現象の計測は、そのような例である。

単振り子の運動は、単振動の代表的な例としても、重力加速度の測定方法としても重要であり、高校及び大学初年次の基礎的な学習課題となっている。錘を糸で吊せば、単振り子は簡単に実験（演示実験を含む）を行うことができるが、その振動波形（位置の時間変化）がサイン波になっていることまでは、見ただけではなかなかわからない。

振動の周期を計測するだけなら、ストップウォッチなどで計測できるし、光センサーを用いた自動計測も可能である<sup>1)</sup>。しかし、変位の時間変化を計測することは、必ずしも簡単ではない。ビデオなど動画として記録し分析すれば波形もわかるが<sup>2)</sup>、画像処理が必要になる。錘の位置、速度または加速度を測定することができるセンサーを用いることで、定量的な計

---

<sup>1</sup> 全学教育機構（併任）、工学系研究科

測が可能になるが、錘にセンサーを装着すると振動に影響を与えるおそれがある。したがって非接触のセンサーが望ましい。

我々は、過去に力センサー（FSR）を用いたバネ振動の簡便な計測方法を開発し、単振動や連成振動の計測を行った<sup>3)</sup>。しかしながら、この方法には、以下のような課題が残った。

- (1) 力センサーの応答は不安定であり、力の作用点がずれると再現性がなくなる。力センサーと作用点を安定化するための工夫が必要となる。
- (2) 力センサーの出力に非線形性やヒステリシスがある。
- (3) 単振り子の計測には利用しにくい。

そこで、今回は反射光の位置変化から反射物体の距離を測定するデバイス（以下、PSDと言う。）を用いて、教材としての可能性を調べてみた。センサー単体としての PSD を用いた実験の例は過去に存在する<sup>4)</sup>が、現在ではセンサーと回路がモジュール化されて市販されており、より簡便に利用できるようになった。

## 2. 測定方法

図1は測定方法の模式図である。

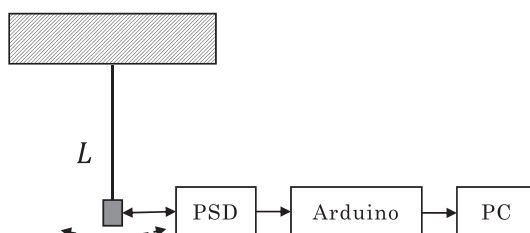


図1 振動測定の方法の模式図

長さ $L$ の糸（正確には錘の重心までの長さを含む）と錘で振り子を構成し、その振動をPSDで測定する。PSDは、発光素子から赤外線を出し、物体（錘）からの反射光による位置センサー上の像の位置によって三角測量を行い、PSDと物体の間の距離を測定するようになっている。PSDは、測定した距離 $x$ に反比例した電圧 $V(x)$ を出力する。

PSDは一次元の距離を測定するセンサーなので、対象物体の変位を一次元に制限する必要がある。そこで、単に1本の糸で錘を吊すのではなく、V字型に2本の糸で吊すことにした。それにより、二本の糸の上端を結ぶ直線と直交する方向にのみ振り子は振動することになる。（厳密には、錘は円弧上を振動するが、振幅が特に大きく無い限り、1次元の運動とみなすことができる。）

我々が用いたPSDモジュール（シャープ製GP2Y0A21YK0F）は、位置センサー、赤外発光素子、光学系、信号処理回路などを内蔵し、対象物体までの距離に応じてアナログ信号電圧を出力する。その仕様は以下の通りである<sup>5)</sup>。

測定範囲 10cm～80cm

出力 対象物体までの距離に反比例した電圧（アナログ）

電源電圧 5 V

信号出力には、50ms 程度の時間を要するため、あまり速い位置変化の計測には適していないが、今回の振り子の周期は 1 秒程度であるので、支障はない。

実験を行ってわかった注意すべき点は、光学的な三角測量を行っているので、当然のことながら光線が対象物体（錘）に当たらなくてはならないことである。しかし、赤外線は目視できないので、予め定規などで幾何学的な位置関係を確認しておく必要がある。（とはいっても、必要な精度は錘の大きさ（2 cm）程度なので、それほど難しくはない。）

このモジュールは、電源、グラウンド、出力の 3 端子しかなく、それぞれ、Arduino の + 5 V 電源端子、グラウンド、アナログ入力端子に接続する。これ以外に、外部電源や信号源は必要ない。（ただし、時間較正のため、外部発振器の信号をマーカーとして Arduino の別のアナログ入力端子に入力した。）

Arduino は、低価格（3,000円程度）の小型コンピュータで計測と制御を同時に実行できるので、様々な学生実験などに適している。このような小型コンピュータとしては、他にも様々なものが入手可能であるが、普及していて資料が豊富な Arduino Uno を選択した。

Arduino Uno は 6 本のアナログ入力（10ビット）および 14 本のデジタル信号の入出力が可能で、様々なセンサーやアクチュエータを簡単な方法でつなぐことができる。6 本のアナログ信号の出力もできるため、制御も可能である。今回は、半田付けなどの工作も必要なかった。

データの送受信は、Arduino を USB でパソコンと接続することで、容易に実行できる。今回の実験では、パソコンのシリアルモニターに表示されたデータをクリップボード経由で別のファイルに取り込んだ。

プログラム（「スケッチ」という。）には、C 言語を簡略化した Arduino 言語が利用でき、使いやすい専用ソフト開発環境である Arduino IDE<sup>®</sup>が用意されているので、特別な知識がなくても簡単に作ることができる。今回の測定では、スケッチ内で、データの取得の他、10 点のデータの積算による平滑化や逆数の計算などを行った。

### 3. 測定例

振り子の振動を測定した例を図 2 に示す。振り子の長さは、25.0cm とした。錘の質量は 500g である。錘がかなり重いので、空気抵抗や摩擦などの影響はほとんどなかった。振り子の周期は、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

である。ただし、 $g$ は重力加速の大きさで、 $9.8\text{m/s}^2$ である。この公式を用いると、 $L=25.0\text{cm}$ の場合は、周期はほぼ $1.00\text{s}$ となる。

図2のサイン波が振り子の振動の変位を表している。矩形波は、時間較正のために Arduino に同時に入力した $1.00\text{Hz}$ の発振器の出力を表している。(縦軸及び横軸のスケールは任意である。) サイン波と矩形波の周期がほぼ一致していることがわかる。

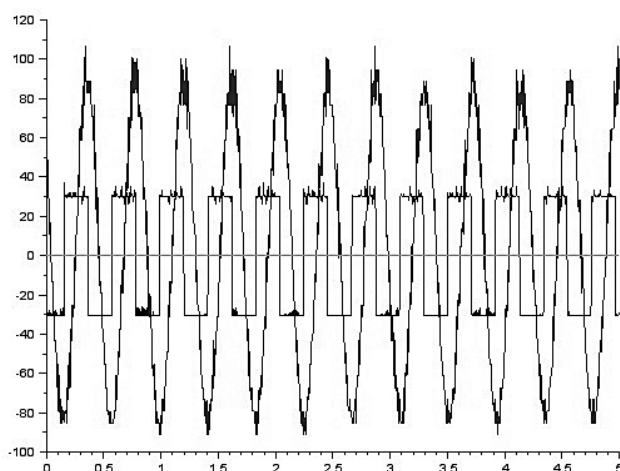


図2 振り子の振動の測定結果と1秒間隔のマーカー

図3は、図2の結果をフーリエ変換し、そのパワースペクトルを計算した結果を示している。

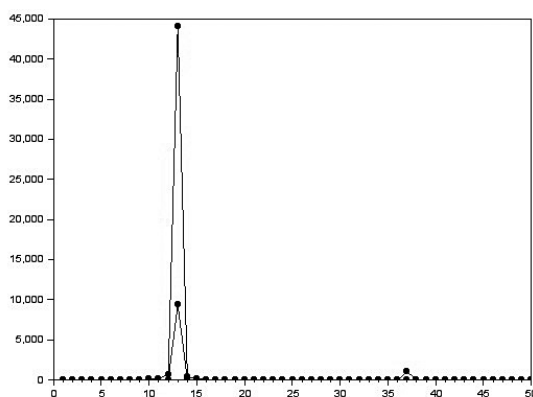


図3 スペクトル

大きいピークが振り子の位置変化のパワースペクトルであり、小さいピークが $1.00\text{Hz}$ のマーカーのパワースペクトルである。両者がほぼ一致していることがわかる。また、スペクトルが単一であることから、波形の歪みが少なく、サイン波となっていることがわかる。(マーカーの信号は矩形波であるので、小さいが高調波の成分が見られる。)

フーリエ変換などのデータ処理は、Scilab というソフトを用いた<sup>7)</sup>。Scilab は高機能な分析やシミュレーションが可能であり、グラフィックスの機能も充実している無料で使用できるソフトである。ただし、解説書などが豊富とは言えず、その点ではエクセルを用いて分析する方が学生にとっては便利かもしれない。

#### 4. 連成振動の例

単振り子の振動を定量的に測定できるようになったので、その発展として連成振動の測定を行った。一つの振り子の振動は、同じ振動が継続する定常状態と言えるが、連成振動は、二つの振り子の間でエネルギーの交換が起きる。これは、最も簡単なダイナミックスの例となっている。また、二つの振動子系の共鳴現象とみなすこともできる。以下に述べる実験は、二つの振動子系の結合の大きさを変えることができる共鳴実験になっている。

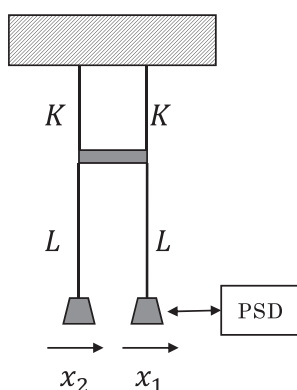


図4 連成振動の模式図

図4は、長さの変わらない硬くて軽い棒（以下、「結合部」と呼ぶ。）で左右二つの単振り子を結合した系を示している。上部の長さ  $K$  の糸が短いときは、下部の長さ  $L$  の糸の振り子は独立に振動する。類似した連成振動の光センサーを用いた測定は、既に報告されている<sup>8)</sup>。

このような系では、二つの固有モードが存在する。

一つは錘の変位が同一方向同一振幅の場合（すなわち  $x_1 = x_2$ ）で、これを対称モードと呼ぶ。この場合、結合部は上下の糸がそれぞれ同一直線になるように振動するので、その周期は、

$$T_s = 2\pi\sqrt{\frac{L+K}{g}}$$

となる。

もう一つの固有モードは、変位が逆方向同一振幅の場合（すなわち  $x_1 = -x_2$ ）で、これを反対称モードと呼ぶ。この場合は、結合部は静止し、結合部から下の部分だけが振動するので、その周期は、

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

となる。

固有モード以外の任意の振動は、この二つの固有モードの適当な重ね合わせによって合成される。たとえば、最初に片方を静止状態にして、他方に振動を与えた場合は、二つのモードを同じ振幅で重ねることで合成される。

このような周期の異なる振動が重なると、高校の物理で学習するように、差の振動数で振動強度が変動する現象、すなわち「うなり」が生じる。うなりの振動数は、

$$T_B^{-1} = |T_A^{-1} - T_S^{-1}|$$

で与えられる。この式からうなりの周期を求めると、

$$T_B = \frac{T_A T_S}{T_S - T_A} = T_A \frac{\sqrt{1+\kappa}}{\sqrt{1+\kappa}-1}$$

となる。ただし、

$$\kappa = \frac{K}{L}$$

である。

このうなりの周期は、二つの振り子の振動エネルギーが周期的に入れ替わる時間である。（位相まで含めて元に戻るには2倍の周期が必要になる。量子力学では、これをスピノールと呼ぶ。）

最初、片方が振動し、他方が静止しているが、やがてうなりの周期の半分だけ時間が経過すると、最初振動していた振り子が静止し、他方の振動強度が最大になり、後はこれを繰り返す。その結果、うなりの周期で、振動の強さ（速い振動の包絡線の大きさ）の変動が繰り返されることになる。これが典型的な連成振動の現象である。以下では、「うなりの周期」と呼ばずに、「連成振動の周期」と呼ぶことにする。

結合が弱いとき、すなわち  $\kappa \ll 1$  のときは、

$$\frac{T_B}{T_A} \approx \frac{2}{\kappa}$$

と近似できる。連成振動の周期は、 $\kappa$  に反比例して長くなる。 $\kappa = 0$  の場合は、結合が無いことになり、周期は無限大となる。すなわち、最初静止していた振り子はいつまでも静止を続けることになる。

逆に結合が大きいとき、すなわち  $\kappa \gg 1$  のときは、

$$T_B = T_A$$

となり、二つの振り子は同じ周期で反対称の運動を続けることになる。

図5は、 $K=5.0\text{cm}$ 、 $L=25.0\text{cm}$ のときの連成振動の計測結果である。

この波形における図中の矢印の長さから、連成振動の周期  $T_B$  は、12秒程度であることがわかる。 $\kappa=0.20$ なので、 $T_B=1.00\text{s}\times\sqrt{1.20}/(\sqrt{1.20}-1.00)=11.5\text{s}$ となるはずであり、おおむね一致している。

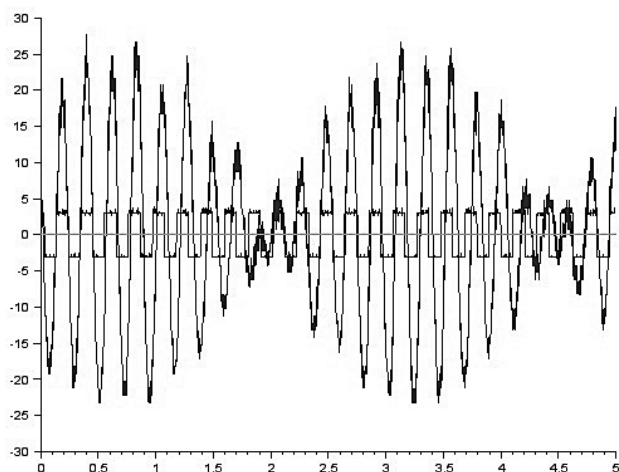


図5 連成振動の計測結果

## 5. まとめ

この実験では、PSD モジュールを Arduino に接続して、振り子の振動や連成振動を計測した。計測方法が簡単であり、費用も少ないので、学生実験や演示実験に適している。また、振動の周期だけでなく、波形そのものを計測することができるのが特長であり、フーリエ変換によるスペクトル分析も可能になる。

また、連成振動の計測も行った。これは共振（共鳴）現象の一般化になっており、共振という重要な概念を理解する上で基本的な現象を観測することができた。

今後の課題としては、

- (1) 時間マーカーの周期を短くして時間精度の向上をはかること
- (2) 初期振動を自動化し、繰り返し測定による SN 比の向上をはかること
- (3) 連成振動の両方の振動を二つのセンサーによって同時計測すること

などが挙げられる。いずれも、Arduino の仕様に余裕があるので、可能である。

また、PSD は、位置を定量的に測定する便利な装置であるので、様々な力学現象の実験に応用することが期待できる。

大人数の講義で活用する場合、計測結果をリアルタイムでプロジェクトで表示することが考えられる。また、IoT に対応して、Arduino に通信モジュールを接続してネットワーク経由でデータにアクセスできるようにすれば、学生個人のコンピュータやスマートフォンなどで同時に観測することも可能になるであろう。

## 謝辞

ここで用いた実験データは、佐賀大学理工学部の川上大輔と野間顕斗の卒業研究で得られたものを用いた。

## 引用文献

- 1) 小原秀雄、他：愛媛大学教育学部紀要52- 1 （2005） 153-156.
- 2) 長島弘幸、他：物理教育38- 2 （1990） 76-79.
- 3) 遠藤 隆：物理教育64- 3 （2016） 190-193.
- 4) 伊地知国夫、他：物理教育36- 3 （1988） 212-215.
- 5) [http://www.sharp.co.jp/products/device/doc/opto/gp2y0a21yk\\_e.pdf](http://www.sharp.co.jp/products/device/doc/opto/gp2y0a21yk_e.pdf)
- 6) <https://www.arduino.cc/>
- 7) <http://www.scilab.org/>
- 8) 石原真二、他：物理教育32- 3 （1984） 165-169.