Rep. Sci. Engrg.
Saga Univ.
44-2 (2015), 9～15

Reports of Science and Engineering,
Saga University, Vol. 44, No. 2, 2015

ローラン級数環と同型な量子ウォーク

遠藤　隆*

Quantum Walking Isomorphic to Laurent Series Ring

By
Takasi ENDO

Abstract: A simple continuous-time quantum walk system on the one-dimensional lattice space is isomorphic to Laurent series ring. Time development of the quantum walker is calculated in terms of simple algebraic operations on the ring.

Key words: Quantum walk, Laurent series ring

1．はじめに

量子ウォークは，ランダムウォークの量子版として興味が持たれてきたが，現在では様々な量子系の現象を記述する単純なモデルとして興味が持たれ，さらに量子計算への応用が期待されている。[1-3]

我々は，今まで初期状態に拡がりがある場合の運動や，量子ウォークエコーなどの現象について調べてきた。この計算は両側Z変換を用いることで単純化できることを既に報告している。[4]

両側Z変換は，変数zが複素数なのでローラン級数になっている。そこで，このことを一般化し，zを形式的な変数（不定元）とみなして，そのローラン級数環を考え，この環における計算を数学的に根拠付ける。

そのため，まず量子ウォークの運動を表現する量子状態（ケットベクトル）を変換する演算子の集合が，ローラン級数環と同じ代数構造を持ち，環として同型になっていることを示す。次に，既に得られたいくつかの結果について，ローラン級数環における初等的な計算を実行することで，より簡単に同一の結果が得られることを示す。特に量子ウォークエコーの導出が極めて簡単に説明できることを示す。

平成27年11月6日受理
*工学系研究科物理科学専攻

2．量子ウォーク系

離散的一次元空間の連続時間量子ウォークを表現するヒルベルト空間を考える。

まず，状態（ケットベクトル）空間として，一次元格子上のベクトル空間を考え，

$$L=\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\left|k\right\rangle \middle|\, k\in\mathbb{Z}, c_k\in\mathbb{C}\right\} \tag{1}$$

と表す。ここで，$\mathbb{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$は整数の指標集合であり，$\mathbb{C}$は複素数体である。$|k\rangle$は，ケットベクトルである。物理的なモデルとしては，格子点の間隔が等しいと想定することが多いが，以下の議論では特にこの仮定は必要ない。

状態空間の双対空間は，

$$L^*=\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} c^*{}_k\left\langle k\right| \middle|\, k\in\mathbb{Z}, c_k\in\mathbb{C}\right\} \tag{2}$$

と表すことができる。これによって，内積を次のように定義する。

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k|k\rangle, \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k|k\rangle\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a^*{}_k\langle k|\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k|k\rangle$$
$$= \sum_{k,k'\in\mathbb{Z}} a^*{}_{k'}b_k\langle k'|k\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a^*{}_k b_k \tag{3}$$

ここで基底$\{|k\rangle \mid k\in\mathbb{Z}\}$は，正規直交基底なので，$\langle k'|k\rangle = \delta_{k'k}$ である。

次に，この状態空間に作用する演算子の集合を考える。量子ウォークにおいて基本となる演算子は，次の二つのシフト演算子である。

$$\hat{z} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k-1\rangle\langle k|$$
$$\hat{z}^{-1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k+1\rangle\langle k| \tag{4}$$

この演算子は，格子点上を一つ左または右にシフトする。重要なことは，この演算子は，全ての格子点において一様に作用するということであり，その結果，交換可能な演算子となっている。ただし格子点が有限の場合は，調和振動子の生成消滅演算子と同様に非可換である。

また，容易に分かるが，二つのシフト演算子は，互いに逆演算になっている。すなわち，$\hat{z}^{-1}\hat{z} = \hat{z}\hat{z}^{-1} = 1$ である。このことによりシフト演算子の形式的級数の集合は，可換環を構成することがわかる。

この二つのシフト演算子を不定元とする形式的ローラン級数環を，

$$\mathbb{C}((\hat{z})) = \left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\hat{z}^n \mid a_n\in\mathbb{C}\right\} \tag{5}$$

と表す。

任意の基底状態$|k\rangle\in L$は，原点$|0\rangle\in L$にシフト演算子を作用させて，

$$|k\rangle = \hat{z}^{-k}|0\rangle \tag{6}$$

によって得られる。したがって，状態空間は，原点を通る$\mathbb{C}((\hat{z}))$の軌跡$L = \mathbb{C}((\hat{z}))|0\rangle$に一致する。また，双対空間についても，$L^* = \langle 0|\mathbb{C}((\hat{z}))$となる。すなわち，

$$\langle k| = \langle 0|\hat{z}^k \tag{7}$$

である。

任意のケットベクトル$|\alpha\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k|k\rangle$は，原点とシフト演算子で表すことができる。すなわち，

$$|\alpha\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k|k\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\hat{z}^{-k}|0\rangle \tag{8}$$

ブラベクトルも同様である。

$$\langle\alpha| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k|a^*{}_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle 0|\hat{z}^k a^*{}_k \tag{9}$$

また，

$$\langle k|\alpha\rangle = \langle 0|\hat{z}^k\sum_{k'\in\mathbb{Z}} a_{k'}\hat{z}^{-k'}|0\rangle = \sum_{k'\in\mathbb{Z}} a_{k'}\delta_{kk'} = a_k \tag{10}$$

となることから，$\langle k|$は，$-k$次の項の係数を引き出す演算になっていることがわかる。

内積は，$|\beta\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\hat{z}^{-n}|0\rangle$として，

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle 0|\sum_{n\in Z} a^*{}_n\hat{z}^n\sum_{n\in Z} b_n\hat{z}^{-n}|0\rangle = \sum_{n\in Z} a^*{}_n b_n \tag{11}$$

で与えられる。

以上のことから，$\mathbb{C}((\hat{z}))$が，次のように通常の加法及び乗法による可換環の構造を持つことがわかる。

零元 $0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 0\hat{z}^n \in \mathbb{C}((\hat{z}))$ (12)

単位元 $1 = \hat{z}^0 \in \mathbb{C}((\hat{z}))$ (13)

加法 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\hat{z}^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\hat{z}^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (a_n+b_n)\hat{z}^n$ (14)

乗法 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\hat{z}^n \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\hat{z}^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{r\in\mathbb{Z}} a_r b_{n-r}\hat{z}^n$ (15)

3．ローラン級数環

シフト演算子$\hat{z},\hat{z}^{-1}$をそれぞれ形式的な複素変数z,z^{-1}に置き換えることで，通常のローラン級数環$\mathbb{C}((z))$を得る。両者は同型である。すなわち

$$\mathbb{C}((\hat{z})) \cong \mathbb{C}((z)) \tag{16}$$

となる。

$\mathbb{C}((z))$ が作用するベクトル（状態）空間を

$$L(z) = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \,|\, k] \,|\, k \in \mathbb{Z}, c_k \in \mathbb{C} \right\} \tag{17}$$

と表すことにする。ここで，

$$|\, k] = z^{-k} \,|\, 0] = z^{-k} \tag{18}$$

であり，ただの有理式に過ぎないが，$|k\rangle \in L$ との対応関係を明示するために，あえて括弧[ ]を用いて $|\,k]$ と表した。また，$|\,0] = z^0 = 1$ なので，$L(z) = \mathbb{C}((z))\,|\,0]$ は，実は $\mathbb{C}((z))$ と同じ集合であるが，役割が異なるので，あえてこのように表記する。

双対空間も同様に，

$$[k \,| = [0 \,|\, z^k \tag{19}$$

と定義すると，

$$L^*(z) = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} c^*{}_k [k \,|\, |\, k \in \mathbb{Z}, c_k \in \mathbb{C} \right\} \tag{20}$$

と表すことができる。

なお，$[0\,|\,z^k = z^k$ ではないので，注意が必要である。$|\,0] = 1 \in \mathbb{C} \subset \mathbb{C}((z))$ であるが，$[0\,|$ は，0次の係数を引き出す射影演算子であって，複素数や変数そのものとは全く異なるものである。具体的には，$[0\,|$ は，

$$[0\,| = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{1}{z} \tag{21}$$

と表すことが可能であり，$\mathbb{C}((z))$ に属さないことは明らかである。（なお，本論文においては実際にこの計算を実行する必要はない。）

基底 $\{|\,k] \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ の直交性は次のように示される。

$$[k' \,|\, k] = [0\,|\, z^{k'} z^{-k} \,|\, 0] = [0\,|\, z^{k'-k} \,|\, 0] = \delta_{k'k} \tag{22}$$

状態空間とその双対空間は同型であるが，両者の要素を同時に用いて計算するときは，明確に区別しなければならない。混乱を避けるために，単なる複素数や複素変数であっても，括弧[ ]を用いて表記することにする。

さて，ローラン級数の集合 $\mathbb{C}((z))$ も，次のような可換環の構造を持つ。

$$\text{零元}\quad 0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 0\hat{z}^n \in \mathbb{C}((z)) \tag{23}$$

$$\text{単位元}\quad 1 = z^0 \in \mathbb{C}((z)) \tag{24}$$

$$\text{加法}\quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (a_n + b_n) z^n \tag{25}$$

$$\text{乗法}\quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{r\in\mathbb{Z}} a_r b_{n-r} z^n \tag{26}$$

なお，加法や乗法の演算は，それぞれの環ごとに異なる記号を用いるべきであるが，混乱が生じない限り，同一の記号を用いる。

ブラベクトルやケットベクトルに対応するものは，

$$\begin{aligned} |\alpha] &= \sum_{n\in Z} a_n z^{-n} |0] \\ [\alpha| &= [0| \sum_{n\in Z} a^*{}_n z^n \end{aligned} \tag{27}$$

となる。これを用いて，内積を求めると，

$$[\alpha \,|\, \beta] = [0\,| \sum_{n\in Z} a^*{}_n \hat{z}^n \cdot \sum_{n\in Z} b_n \hat{z}^{-n} \,|\, 0] = \sum_{n\in Z} a^*{}_n b_n \tag{28}$$

となり，$\mathbb{C}((\hat{z}))$ と同じ結果になる。

同じ内積が得られるので，ヒルベルト空間としても $\mathbb{C}((\hat{z})) \cong \mathbb{C}((z))$ と言える。ただし，一般のヒルベルト空間で用いる演算子が全て含まれているわけではない。後で用いるが，次の微分演算子

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\, k] k [k \,| = z \frac{\partial}{\partial z} \tag{29}$$

は，$\mathbb{C}((z))$ に含まれない。ここで考えている空間的に一様な量子ウォークでは，このような演算子は含まれない。しかし，物理量の期待値を求める場合やポテンシャルを導入する場合など，計算の範囲を拡げるためには，このような演算子も含める必要があるが，その場合は非可換環になる。

4．応　用

以上に述べたことから，量子ウォーク系の運動は，ローラン級数環に置き換えて計算することができる。しかも，以下に挙げる例に示されるように，ローラン級数環における計算は，四則計算などの単純な計算になる。

最も単純な量子ウォークのハミルトニアンは，

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2}\left(\chi\hat{z} + \chi^{*}\hat{z}^{-1}\right) \tag{30}$$

であるが，これは，次のようにローラン級数に写される。

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2}\left(\chi\hat{z} + \chi^{*}\hat{z}^{-1}\right) \mapsto H = \frac{\hbar}{2}\left(\chi z + \chi^{*}z^{-1}\right) \tag{31}$$

量子ウォークの運動（時間発展）を与えるユニタリー演算子は，次のように写される。

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-i\frac{t}{\hbar}\hat{H}\right) \mapsto U(t) = \exp\left(-i\frac{t}{\hbar}H\right) \tag{32}$$

χ が純虚数の場合 $\chi = i\Omega$ とおくと，

$$H = \frac{1}{2}i\hbar\Omega\left(z - z^{-1}\right) \tag{33}$$

なので

$$U(t) = \exp\left(-i\frac{Ht}{\hbar}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\left(z - z^{-1}\right)\Omega t\right) \tag{34}$$

となる。なお，次のベッセル関数の公式

$$\exp\left(\frac{1}{2}\left(z - z^{-1}\right)\Omega t\right) = \sum_{k} z^{k} J_{k}(\chi t) \tag{35}$$

を用いると，

$$U(t) = \sum_{k} z^{k} J_{k}(\chi t) \tag{36}$$

となる。これは実数係数の級数であり，$U(t) \in \mathbb{R}((z)) \subset \mathbb{C}((z))$ となっている。すなわちユニタリー変換が $\mathbb{C}((z))$ に含まれるため，時間発展が全て級数の単純な積の計算に帰着することになる。

元の量子ウォーク系に戻すと，

$$\hat{U}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{z}^{k} J_{k}(\chi t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{k'\in\mathbb{Z}} J_{k}(\chi t)\left|k'-k\right\rangle\left\langle k'\right| \tag{37}$$

である。

以下では，この場合の運動

$$|\Psi(t)] = U(t)\,|\Psi(0)] \tag{38}$$

を考察する。（これ以外に，ユニタリー変換が $\mathbb{C}((z))$ に含まれるものは無数にあるが，本論文では簡単な例のみ取りあげる。）

（1）重心の運動

原点から出発する量子ウォークは，左右対称に確率密度が拡がるので，重心は原点に留まる。すなわち，

$$\langle k\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\left|J_{k}(\Omega t)\right|^{2} = 0 \tag{39}$$

である。この計算ではベッセル関数の公式を利用しているが、ローラン級数環の計算に置き換えると，以下のようにもっと簡単になる。

まず，

$$z\frac{\partial}{\partial z}z^{k}\,|\,0] = kz^{k}\,|\,0] \tag{40}$$

であるから，演算子 $z\dfrac{\partial}{\partial z}$ の期待値が k の期待値になることがわかる。すなわち，

$$\langle k\rangle=\left[0\,|\,U^{-1}(t)\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)U(t)\,|\,0\right] \tag{41}$$

となる。この計算は，単純な級数の微分計算であり，

$$\begin{aligned}&U^{-1}(t)z\frac{\partial}{\partial z}U(t)\\&=\exp\left(-\frac{1}{2}\left(z-z^{-1}\right)\Omega t\right)z\frac{\partial}{\partial z}\exp\left(\frac{1}{2}\left(z-z^{-1}\right)\Omega t\right)\\&=\frac{1}{2}\Omega t\left(z+z^{-1}\right)\end{aligned} \tag{42}$$

と求められる。

明らかに 0 次の項が存在しないので，

$$\langle k\rangle=\frac{1}{2}\Omega t\left[0\,|\left(z+z^{-1}\right)|\,0\right]=0 \tag{43}$$

となる。ベッセル関数の公式を用いることなく，同じ結果が得られた。

（2）分散の時間変化

量子ウォークの確率密度の分散，すなわち k の 2 次のモーメントは，

$$\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 z^k\,|\,0\right]=k^2z^k\,|\,0] \tag{44}$$

という関係を利用して

$$\left\langle k^2\right\rangle=\left[0\,|U^{-1}\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2U\,|\,0\right] \tag{45}$$

によって求められる。すると，

$$\begin{aligned}&U^{-1}(t)\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2U(t)\\&=\frac{1}{2}\Omega t\left(z-z^{-1}\right)+\left(\frac{1}{2}\Omega t\right)^2\left(z^2+2z^0+z^{-2}\right)\end{aligned} \tag{46}$$

となるので，0 次の項の係数から，

$$\left\langle k^2\right\rangle=\frac{1}{2}(\Omega t)^2 \tag{47}$$

が得られ，分散が時間の自乗に比例していることがわかる。（古典的なランダムウォークでは，時間の１乗に比例するので，量子ウォークはランダムウォークより速く拡散する。）

この計算も，単純な計算になっていて，ベッセル関数の公式を必要としない。

古典的な確率分布において，級数である確率母関数を用いてモーメントを計算することがあるが，ここで示したように，量子ウォークにおいては，ローラン級数であるユニタリー変換が一種の母関数の役割を果たしていることがわかる。

（３）初期状態に拡がりがある場合

初期状態に拡がりがある場合は，様々な位置から拡がる波動関数が干渉するため，時間発展が著しく異なる。

初期状態が原点に局在している場合は，

$$|\,\Psi(0)\big]=|\,0]=1 \tag{48}$$

としたが，初期状態として $2N+1$ 個の点に拡がっている波束を考える。すなわち，

$$|\,\Psi(0)\big]=\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{k=-N}^{N}|\,k]=\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{k=-N}^{N}z^{-k} \tag{49}$$

すると，重心は，

$$\langle k\rangle=\left[\Psi(t)\,|\,z\frac{\partial}{\partial z}\,|\,\Psi(t)\right] \tag{50}$$

を計算することになる。

$$
\begin{aligned}
&z\frac{\partial}{\partial z}|\Psi(t)] = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} z\frac{\partial}{\partial z} e^{\frac{1}{2}(z-z^{-1})\Omega t} \sum_{k=-N}^{N} z^k \\
&= \frac{\frac{1}{2}\Omega t\left(z+z^{-1}\right)\sum_{k=-N}^{N} z^k + \sum_{k=-N}^{N} kz^k}{\sqrt{2N+1}} e^{\frac{1}{2}(z-z^{-1})\Omega t}
\end{aligned}
\tag{51}
$$

となるので，

$$
\begin{aligned}
&\langle k\rangle = [\Psi(t)|z\frac{\partial}{\partial z}|\Psi(t)] \\
&= [0|\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} z^{-k}\left(\frac{1}{2}\Omega t\left(z+z^{-1}\right)\sum_{k=-N}^{N} z^k + \sum_{k=-N}^{N} kz^k\right)|0] \\
&= \frac{1}{2N+1}[0|\left(\frac{1}{2}\Omega t\left(z+z^{-1}\right)\sum_{k=-N}^{N} z^{-k}\sum_{k=-N}^{N} z^k + \sum_{k=-N}^{N} z^{-k}\sum_{k=-N}^{N} kz^k\right)|0] \\
&= \frac{1}{2N+1}\left((2N)\Omega t + N\sum_{k=-N}^{N} k\right) \\
&= \frac{2N}{2N+1}\Omega t
\end{aligned}
\tag{52}
$$

となる。

このように，初期状態が拡がっていると，重心が一定の速度で一方向に進むことがわかる。[5]

（4）等速度運動

初期状態として，

$$
|\Psi(0)] = \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{k=-N}^{+N} e^{ik\theta}|k] \tag{53}
$$

を考える。これは，$A=(2N+1)^{-1/2}$ として，

$$
|\Psi(0)] = A\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\theta} z^{-k}|0] \tag{54}
$$

と書ける。時間発展は，

$$
|\Psi(t)] = Ae^{\frac{1}{2}\Omega t\left(z-z^{-1}\right)}\sum_{k=-N}^{+N} e^{ik\theta} z^{-k} \tag{55}
$$

で与えられる。

このときの重心の期待値は，

$$
\begin{aligned}
&\langle k\rangle = |A|^2 [0|e^{-\frac{1}{2}\Omega t\left(z-z^{-1}\right)}\sum_{k'=-N}^{+N}\left(e^{i\theta}z\right)^{k'} z\frac{\partial}{\partial z} e^{\frac{1}{2}\Omega t\left(z-z^{-1}\right)}\sum_{k=-N}^{+N}\left(e^{-i\theta}z\right)^{-k}|0] \\
&= |A|^2 [0|\sum_{k'=-N}^{+N}\left(e^{-i\theta}z\right)^{k'}\left(\frac{\Omega t}{2}\left(z+z^{-1}\right)\sum_{k=-N}^{+N}\left(e^{-i\theta}z\right)^{-k} + \sum_{k=-N}^{+N}(-k)e^{ik\theta}z^{-k}\right)|0] \\
&= \frac{2N}{2N+1}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\frac{1}{2}\Omega t + \sum_{k=-N}^{+N}(-k) \\
&= \frac{2N}{2N+1}\Omega t\cos\theta
\end{aligned}
\tag{56}
$$

となり，

$$
v = \frac{2N}{2N+1}\Omega\cos\theta \tag{57}
$$

の速度で運動することになる。当然のことながら，$\theta=0$ とすれば，（3）の結果と同じになる。[6] $N\gg 1$ のときは，$v=\Omega\cos\theta$ となる。

このことから，隣接格子点間の位相差がある場合，その干渉効果が量子ウォークの速度を決めていることがわかる。

（5）量子ウォークエコー

上で述べた通り，量子ウォークの運動は，干渉効果があるため，位相変化に対して敏感である。我々は，このことを利用して，量子ウォークにおける時間反転と等価な現象を見出している。[7]

位相反転パルス演算子に相当する演算子として符号反転パルス P を次のように定義する。

$$
P\,\Psi(z) = \Psi(-z)P \tag{58}
$$

すなわち，級数展開の変数 $\boldsymbol{z}$ を $-\boldsymbol{z}$ に置き換える操作である。右辺に P を残しているのは，級数が複数の級数の積になっている場合，たとえば，

$$
\begin{aligned}
&PB(z)A(z)|0] = B(-z)PA(z)|0] \\
&= B(-z)A(-z)|0]
\end{aligned}
\tag{59}
$$

となるからである。

今考えているユニタリー変換は，

$$
U(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\left(z-z^{-1}\right)\Omega t\right) \tag{60}
$$

であるので，これにこの操作を行うと，

$$
\begin{aligned}
PU(t) &= P\exp\left(\frac{1}{2}\left(z - z^{-1}\right)\Omega t\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(z - z^{-1}\right)\Omega t\right)P = U(-t)P
\end{aligned}
\tag{61}
$$

となる。すなわち，z の符号反転が時間の符号反転と等価になっている。

なおスピンエコーでは，原子核や電子のスピンを磁場 H_z 中で反転することで，自由歳差運動のハミルトニアンの符号が反転する。これは，磁場が反転した場合と等価である。[8] いずれにしても，ハミルトニアンの符号が反転し，スピンは逆向きに歳差運動を始める。これは，ユニタリー変換において，時間の符号を反転することと等しい。

量子ウォークエコーにおいても，位相反転によってハミルトニアンの符号が反転しており，スピンエコーと類似の現象になっていることがわかる。

以上のことから，時間 t_1 だけ自由にウォークした後，パルスを作用させると，その後のウォークは

$$
U(t)PU(t_1) = U(t - t_1)P \tag{62}
$$

となる。このことから，符号反転パルスを作用させてから，それまでの経過時間と同じだけ時間が経過すると，すなわち $t = t_1$ では,

$$
U(t_1)PU(t_1) = U(0)P = P \tag{63}
$$

となり，元の状態と（各項の係数の符号を除いて）同じになる。符号を反転しても，その瞬間の確率分布は係数の絶対値の自乗で与えられるので同じになるから，元の分布に戻ったことになる。

このように，ローラン級数環を用いた量子ウォークエコーの導出が極めて簡単になることは，注目に値する。

5．まとめ

１次元連続時間量子ウォーク系をローラン級数環に置き換えることで，計算が簡単になることがわかった。ここで取りあげた例だけでなく，様々なハミルトニアンや初期状態に対しても応用が可能である。

今後の展開としては，離散時間量子ウォーク系を，複素数体上の２×２行列から成る線形変換によって記述することが考えられる。この場合は，有限時間（ステップ）では有限次数となるので，適当な冪乗を掛けることで多項式環に変換することができる。また，級数の次数も有限になるため，数式処理ソフトを用いて計算することが可能になる。

離散時間量子ウォークの場合は，ローラン級数の形式的変数 z を両側 Z 変換の変数と見なすと，遅延回路によって実装することが可能になるので，量子ウォークと等価な電子回路を製作することも可能になるであろう。無限級数になる場合は，再帰形のフィルタを考えることになるであろう。

また連続時間量子ウォークの場合は，変数 z を複素平面の単位円上に制限することで，周波数変調と同じ表式が得られるので，周波数変調回路によってシミュレーションすることも可能になる。

このように，同一構造を持つ代数を利用して量子力学を記述することは，計算の見通しを立てやすくするので，重要な手法であり，また等価回路によるシミュレーション手法の開発の手がかりが得られる。

参 考 文 献

1) 今野紀雄：『量子ウォークの数理』，（産業図書，2008年）
2) Salvador Elias Venegas-Andraca: “Quantum Walks for Comuter Scientists”, (Morgan & Claypool, 2008).
3) Kia Manouchehri, Jingbo Wang: “Physical Implementation of Quantum Walks”, (Springer, 2014, Berlin).
4) 遠藤 隆，香月健一郎，豊島耕一，平良 豊：「Z 変換による量子ウォークの計算」，佐賀大学理工学部集報，第 38 巻，第 2 号，1〜6 頁（2009）
5) T. Endo, S. Osano, K. Toyoshima and Y. Hirayoshi: “Ballistic Quantum Walk in a Discrete 1D System”, J. Phys. Soc. Jpn., Vol. 78, No. 6 (2009) p.064004.
6) T. Endo, K. Katsuki, K. Toyoshima, and Y. Hirayoshi: “Ballistic Quantum Walk of a Phase-Modulated Wave Packet”, J. Phys. Soc. Jpn., Vol. 81, No.3 (2012), 034002.
7) T. Endo: “Quantum Walk Echoes”, J. Phys. Soc. Jpn., Vol.83, (2014) 044007.
8) A. Abragam: *The principle of nuclear magnetism*,(Oxford Univ. Press, 1961, Oxford).