

「分数の不思議な計算」を基にした 「操作的練習」に関する実践的研究

米田 重和*, 立石 耕一**

A Practical Research on “operational practice”
based on “the calculation of the strange fraction”

Shigekazu KOMEDA, Koichi TATEISHI

要 旨

本稿の目的は「操作的練習」について、ヴィットマンの論文を基に説明し、4つの視点を示すことである。そして、ヴィットマンがその例として提示した「分数の不思議な計算」を用い佐賀大学附属小学校の6年1組を対象として実験授業を行い、その授業を分析し、考察することで「操作的練習」の有用性を検証することである。

実験授業の成果として、児童は機械的に与えられた計算問題を解くのではなく、規則性が成り立つかどうか確認するという目的意識を持って、何度も繰り返し計算練習を行っていた。しかも、計算ミスをしているときは自らそのミスに気づき再計算しミスを訂正していたことは計算技能の習熟につながったといえよう。さらに、情意面の成果として「なぜ成り立つのだろう。」や「不思議だ。」という内発的動機が喚起されている児童の感想が多く見られた。一方課題として挙げられるのは、文字式を使った数学的な証明が6年生にはできないということと、異なる2数を選び、(後ろの数+1)÷(前の数)を5回繰り返す計算は容易ではなく、分数の計算力が未定着な児童にとってはかなりハードルが高いものとなっていたことである。

1. はじめに

平成20年度の小学校学習要領算数編では、「算数的活動」の充実が一層強調されている。「算数的活動」とは、児童が目的意識をもって主体的に取り組む算数にかかわりのある様々な活動のことであり、「算数的活動」を通して、数量や図形に

についての基礎的・基本的な知識及び技能を身に付け、日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え、表現する能力を育てることが求められている。一方我が国の現状を鑑みると、知識の技能の習熟に関しては、計算ドリル等、機械的な問題練習によって習熟を図ることが多いように感じる。児童が主体的に学習に取り組みながら、知識

* 佐賀大学 文化教育学部 教科教育講座

**佐賀大学 文化教育学部 附属小学校

や技能の習熟を図る授業を実現させることができないだろうか。それこそが、「算数的活動」を通して数量や図形についての基礎的・基本的な知識や技能を身に付けることになるのではなかろうか。

そういう問題意識のもと、筆者はドイツのドルトムント工科大学のヴィットマンが用いている「操作的練習」という概念に着目した。この「操作的練習」は、ドイツの6学年と7学年（日本でいう6年生と中学校1年生）向けに示されており、具体例を幾何4問、計算4問提示してある。

筆者が2013年に発表した論文「二等辺三角形探し」を例にした「操作的練習」に関する研究では、ヴィットマンが「操作的練習」の例として挙げている「二等辺三角形探し」を紹介し、その教材を用いて「操作的練習」としてどのような授業を行おうとしているのか明らかにした。しかし、そこでは授業実践は行っていないため、「操作的練習」に関する実践的研究が行えていない。これから先、「操作的練習」に関する研究を進めていくに当たって、次のサイクルを考えている。まず、「操作的練習」としてヴィットマンが提示した教材の授業化や新たな教材の開発をし、その教材を基に、「操作的練習」の授業実践を行う。次に、授業の分析および考察を行い、成果と課題とを明らかにする。そして、開発した教材の改善を行うとともに、「操作的練習」として新たな教材の開発に着手する。

そこで、本稿の目的は「操作的練習」について述べるとともに、ヴィットマンが提示した「操作的練習」の実例をもとにした授業実践を行い、その授業を分析し、考察することで「操作的練習」の有用性を検証することである。今回取り上げる「操作的練習」の例は「分数の不思議な計算」(Eine merkwürdige rechnung mit brüchen)にした。この「分数の不思議な計算」は分数までの四則演算を学んでいれば取り組むことのできる内容となっており、小学校6年生に対して実践的研究が可能である。

2. 操作的練習「分数の不思議な計算」

1985年のヴィットマンの論文で、「操作的練習」という概念について、「操作的練習は一連の問題である。子ども達は、三角形や四角形といった図形、分数等を対象にした問題について、操作を通して探求することで、その対象についての理解を深める。同様な操作を繰り返し用いることで問題を解決することができ、問題を解決していく中でどのような関係があるか認識したり、推測したりするといった数学的な考え方や証明する能力が向上していく。」(Wittmann, 1985a)と述べている。

このことから、「操作的練習」について以下の4つの性質にまとめることができる。

- ①「操作的練習」は一連の問題である。
- ②それらの問題に同様な操作を繰り返し用いることで問題を解決することができる。
- ③問題を解決する過程で、その問題に関する知識や技能についての理解を深めることができる。
- ④問題を解決する過程で、関係の認識や推測、証明といった数学的な考え方や能力も向上させることができる。

ここで、ヴィットマンが述べている「操作的練習」における「操作」と、現行の学習指導要領における「操作」の共通点と相違点について明らかにしておく。

現行の中学校学習指導要領解説数学編の中に「操作」という言葉が「観察」、「実験」という言葉と共に数多く用いられている。(文部科学省, 2008a) また、現行の小学校学習指導要領解説算数編の中にも多く用いられており、特に、おはじき等の具体物を動かすという意味で使われている場合が多かった。(文部科学省, 2008b) 操作の意義は、小学校と中学校の指導要領からすると、「性質や関連を見いだす」、「理解を深める」、「見方や考え方を深める」と整理することができる。(文部科学省, 2008b)

一方、ヴィットマンが述べている「操作」について、ヴィットマンは1985年の論文「対象-操作

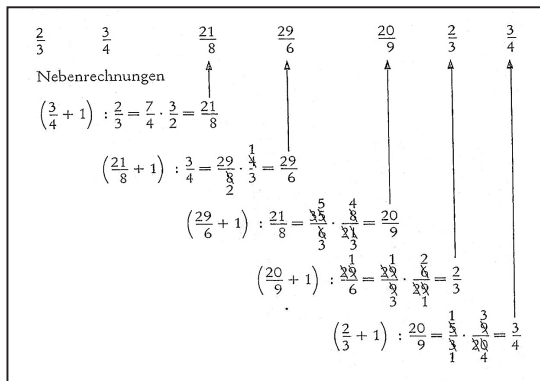
－作用：数学教育学における操作的原理」の中で、詳細に述べている。(山本信也, 2003) 数学教育学者の山本はその論文「対象－操作－作用：数学教育学における操作的原理」を援用して「操作的原理」について次のようにまとめている。

「対象を把握するというのは、その対象に操作を施しながら、それがどう組み立てられているのか、それらにはどのような関係があるかを探究することである。したがって、学習過程あるいは認識過程では、一定の手順に沿って、次のことを行う必要がある。

- (1) どんな操作ができるのか、その操作は互いに関連しているのかについて調べること。(untersuchen)
- (2) 操作を通してその対象にある性質や関係を見いだすこと。(herausfinden)
- (3) その対象が持つ性質や関係は操作によってどのような影響があるかを観察すること。(beobachten)」(Wittmann, 1985b)

このことから、ヴィットマンが述べている「操作」と、現行の学習指導要領における「操作」の相違点は、操作的原理では「操作」の目的を3つ(untersuchen, herausfinden, beobachten)にわけ、その意義を明確化しているところにある。

次に今回取り扱う、「分数の不思議な計算」の紹介を行う。まず、実際の論文の中で扱われた問題を提示する。(Wittmann, 1985b) (図1)



(図1 「分数の不思議な計算」)

以下にヴィットマンの論文の中の問題文を続ける。

「(1) 上の計算が正しいことを確認しなさい。

(2) $4/5$ と $1/3$ からはじめ、同様に計算しなさい。結果はどうになりましたか。

(3) 自分で好きな分数を2つ選び、同様に計算しなさい。どんなことに気づきますか。」

(Wittmann, 1985a)

この問題について分析していく。まず、(1)では図1のように計算ができることを確認する。その後、(2)の $4/5$ と $1/3$ で計算したとき、5回目の計算で元の $4/5$ と $1/3$ に戻ることに気づく。それでは他の数で試した場合も同じように5回目の計算で元の2数に戻るのだろうかという疑問が自然と持ち上がるであろう。そこで、(3)で好きな2つの分数を選び、同様の計算をすることになる。他の2つの分数を選んでこの一連の計算を繰り返すだろう。そして、どんな2つの分数を選んだとしても、5回目の計算を終えると元の数に戻るという関係性を帰納的に発見すると考えられる。5回の計算で循環することになるので、色々な数で試す中で、自然とかなりの数の計算を行うことになる。

この問題を演繹的に証明するためには、文字を使った証明が必要となる。最初の2数を a , b とし、上の順番通りに計算する。

2つの数 a , b を任意に選ぶ

ア. b に1を加え、 a で割る。解は $\frac{b+1}{a}$ となる。

イ. $\frac{b+1}{a}$ に1を加え、 b で割る。

$$\left[\frac{b+1}{a} + 1 \right] \div b = \frac{a+b+1}{a} \div b \\ = \frac{a+b+1}{ab}$$

ウ. $\frac{a+b+1}{ab}$ に1を加え、 $\frac{b+1}{a}$ で割る。

$$\left[\frac{a+b+1}{ab} + 1 \right] \div \frac{b+1}{a} = \frac{ab+a+b+1}{ab} \div \frac{b+1}{a} \\ = \frac{(a+1)(b+1)}{ab} \times \frac{a}{b+1}$$

$$= \frac{(a+1)(b+1)}{ab} \times \frac{a}{b+1}$$

$$= \frac{a+1}{b}$$

エ. $\frac{a+1}{b}$ に 1 を加え, $\frac{a+b+1}{ab}$ で割る.

$$\left[\frac{a+1}{b} + 1 \right] \div \frac{a+b+1}{ab} = \frac{a+b+1}{b} \times \frac{ab}{a+b+1}$$

$$= a$$

オ. a に 1 を加え, $\frac{a+1}{b}$ で割る.

$$(a+1) \div \frac{a+1}{b} = (a+1) \times \frac{b}{a+1}$$

$$= b$$

この証明は、因数分解や簡単な多項式の乗除を含む。そのため、比較的高度な知識や技能が必要となる。しかし、厳密な証明は不可能だとしても、分数の四則演算の技能を身につけていれば取り組むことが可能である。また、どんな 2 数であっても、同じ形式の 5 回の計算で元の数に戻るという規則性を、一連の計算形式で繰り返し試しながら帰納的に発見することができる。要するに、一連の問題を通して、知識や技能の習熟を図ると同時に、規則性を帰納的に発見するという数学的な考え方を育てることができるのである。

このことは、「操作的練習」の性質に一致するものであり、今回は小学校 6 年生で実験授業を行い、実証的に研究することにした。

3. 実験授業の実際

佐賀大学文化教育学部附属小学校 6 年 1 組

授業実施日 平成 26 年 2 月 27 日

授業者 教諭 立石 耕一

前節で紹介した、「分数の不思議な計算」から変更した点がある。それは最初に選ぶ 2 数を分数だけでなく、整数や小数でも考えさせるようにしたことである。その理由として、本授業を行ったのは 2 月末であり、分数の乗除の学習を終えた直

後ではない。この時期は学年末で小学校 6 年間全ての内容を終えている段階であり、小学校の範囲で学習する数の四則演算が完成している時期である。ゆえに、分数だけでなく、整数や小数といった小学校で学習する数全ての範囲でこの不思議な計算が成り立つことを実感させたいと考えた。つまり、分数の計算の習熟だけではなく、小学校の範囲で学習する数の計算を行うと共に、同じ計算周期になることを帰納的に発見していくという数学的な考え方を育てることを本授業の目標にした。これは「操作的練習」の性質③④に沿うものである。

授業の目標と流れを以下に示す。

本時の目標

複数の場合で「不思議な計算」の一連の計算を試しながら、規則性を見いだすことができる。

学習の流れ

(1) 学習課題をつかむ

- ・これまで学習してきた数の種類を思い出す。
- ・ $2/3$ と $3/4$ から始めて、不思議な分数の計算を行い、5 回で元の 2 数に戻することを理解する。
- ・他の 2 数でも同じ結果となるのか予想を立てることで問題意識を持つ。

(2) 課題に対して個人思考を行う。

- ・分数、小数、整数複数の場合で不思議な計算を試す。
- ・規則性を帰納的に発見する。

(3) 集団思考を行い意見を交流する。

- ・異なる分数や小数、整数の場合で成り立つことを確認するために、代表数名が板書する。
- ・気付いたこと、発見したこと等を発表する。

(4) 学習のまとめを行う。

- ・たくさんの場合を考えることで、どんな数でも 5 回の計算で元の 2 数に戻ることが分かる。

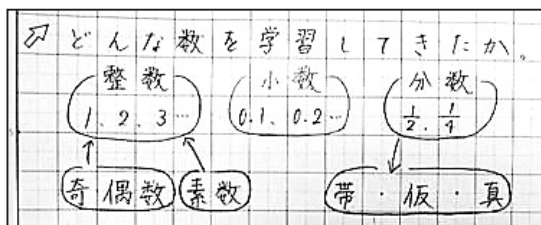
次に、実際の授業における教師の発言と児童の様子を上(1)~(4)に沿って述べる。

(1) 学習課題をつかむ

T 「これまでどんな数を学習してきました

か?」

- C 「整数です。」
- C 「小数や分数も勉強しました。」
- C 「偶数や奇数もあります。」
- C 「素数もあります。」
- T 「数の代わりとして利用したものはありませんか」
- C 「○や□, 文字を使いました。」



(図2 既習の数についてまとめた児童のノート)

- T 「今から不思議な計算をします。」
- 2/3と3/4を例として、以下のような計算を行い、一斉指導の中で確認していった。
 (後ろの数+1) ÷ (前の数) を繰り返す。
 $(3/4 + 1) \div 2/3 = 7/4 \times 3/2 = 21/8$
 $(21/8 + 1) \div 3/4 = 29/8 \times 4/3 = 29/6$
 $(29/6 + 1) \div 21/8 = 35/6 \times 8/21 = 20/9$
 $(20/9 + 1) \div 29/6 = 29/9 \times 6/29 = 2/3$
 $(2/3 + 1) \div 20/9 = 5/3 \times 9/20 = 3/4$

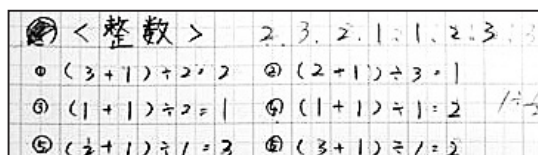
この計算の後の児童のつぶやきを拾い上げた。

- C 「同じ数になっている。」
 - C 「他の数でもできるのかな。」
- この後、以下の本時の課題を提示した。
 T 「他の数でも同じ数を繰り返すのか調べよう。」

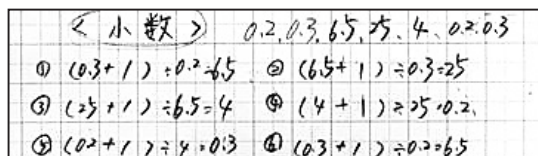
- (2) 課題に対して個人思考を行う。
 - T 「他の分数や整数などでも同じようになると思いますか。」
 - C 「分数ならばできる。」
 - C 「仮分数はできない。」
 - C 「整数はできない。」
 - C 「どんな数でもできる。」
- など、色々な予想を児童は立てていた。そこで、
 T 「他の数でも同じようになると調べてみま

しょう。」

個人思考に臨む児童は、3つのパターンに分けられた。1つ目は、例と同じように2つの分数を使って、不思議な計算が成り立つのかを調べるパターンである。2つ目は、導入で既習の数を出し合っていたので、分数以外的小数や整数でも不思議な計算が成り立つのかを調べるパターンである(図3)。ほとんどの児童が、この2つのパターンに分けられた。



(図3 整数で計算を試す児童のノート)



(図4 小数で計算を試す児童のノート)

そして3つ目は、循環するきまりについて調べることができている複数児童である。



(図5 循環する決まりを見いだした児童のノート)

上の3つのパターンいずれの児童も規則性を発見するために、色々な数を当てはめて試し、何度も計算を繰り返していた。また、個人思考の中で5回の計算で元の2数に戻らなかった児童の中には、計算ミスをしていることに気づき、自ら再計算をする姿勢が見られた。図6は間違いに気づいた時点の写真である。

$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{42}{5}$	21	$\frac{55}{21}$	$\frac{76}{441}$	$\frac{517}{1155}$
$(\frac{2}{5} + 1) \div \frac{1}{6} = \frac{7}{5} \times \frac{6}{1} = \frac{42}{5}$						
$(\frac{42}{5} + 1) \div \frac{2}{5} = \frac{47}{5} \times \frac{5}{2} = 21$						
$(21 + 1) \div \frac{42}{5} = \frac{22}{1} \times \frac{5}{42} = \frac{55}{21}$						
$(\frac{55}{21} + 1) \div 21 = \frac{76}{21} \times \frac{1}{21} = \frac{76}{441}$						
$(\frac{76}{441} + 1) \div \frac{55}{21} = \frac{517}{441} \times \frac{21}{55} = \frac{517}{1155}$						
$(\frac{517}{1155} + 1) \div \frac{76}{441} =$						

(図6 途中で間違いに気づいた児童のノート)

(3) 集団思考を行い, 意見を交流する.
異なる分数や整数の場合等でも成り立つことを確認させるために, 代表児童に発表させた. その発表の中で, 以下のようなやりとりがあった.

- T 「他の数でも調べた人いますか.」
C 「小数でもできました.」
C 「整数も分数に小数も分数に表すことができるから分数でできたらできるはずです.」
T 「不思議な計算のきまりって何だろう. 共通点は.」
C 「どんな数でもできること.」

整数 $\rightarrow \frac{1}{2}, \frac{0}{1}$ 小数も分数で表すことができるのでなる

$(1 + 1) \div 3 = \frac{2}{3}$	$(3 + 1) \div 1 = 4$
$(\frac{2}{3} + 1) \div 1 = \frac{5}{3}$	$(4 + 1) \div 3 = \frac{5}{3}$
$(\frac{5}{3} + 1) \div \frac{2}{3} = 4$	$(\frac{5}{3} + 1) \div \frac{5}{3} = 1$
$(4 + 1) \div \frac{5}{3} = 3$	$(1 + 1) \div \frac{2}{3} = 3$
$(3 + 1) \div 4 = 1$	

必ず(5回)でくり返す

(図7 整数を分数に統合して考えた児童のノート)

x, y	$\frac{y+1}{x}$	$\frac{x+y+1}{x}$	$\frac{1}{x}$
$(y + 1) \div x = \frac{y+1}{x}$			
$(\frac{y+1}{x} + 1) \div y = \frac{x+y+1}{xy}$			ok.
$(\frac{x+y+1}{xy} + 1) \div \frac{y+1}{x} =$			

(図8 文字を使って一般化して考えた児童のノート)

- T 「他にはありますか.」
C 「繰り返すまでに5つの数がある.」
C 「同じ答えになるまでに4つの式がある.」
以下に, 「整数も分数に小数も分数に表すことができるから分数でできたらできるはずです.」と応えた児童のノートを提示する. (図7)

また, 文字を使って一般化して考えようとする児童も見られた. (図8)
(4) 学習のまとめを行う.

児童に本時の学習でわかったこと等をノートにまとめさせ発表させた.
C 「たくさんの場合を考えることで, どんな数でもできることがわかった.」
C 「5回の計算で繰り返っていることが分かった.」
また, ノートに以下のような情意面の感想をまとめている児童がいた. (図9)



(図9 児童の感想)

このような感想を書いている児童は多く見られ, 問題に取り組む中で, 疑問や不思議さなどを感じ, それが学習意欲へとつながっていたようである.

4. 実験授業の考察

3節の実験授業について「操作的練習」の性質に基づいて考察を行っていく. 性質①「操作的練習」は一連の問題である. 性質②それらの問題に同様な操作を繰り返し用いることで問題を解決することができるについては, 元々この教材はヴィットマンが「操作的練習」の例として挙げているものである. 性質③問題を解決する過程で, その問題に関する知識や技能についての理解を深めることができる. 性質④問題を解決する過

程で、関係の認識や推測、証明といった数学的な考え方や能力も向上させることができるについて、それらが実現できたか詳しく見ていく。

性質③については、この問題を解決するためには、分数までの四則演算の習熟が求められる。異なる2数からはじめ、元の2数に戻るまでに、5回の計算をしなければならない。そして、この過程を他の異なる2数で試すことになる。これを繰り返すことになるので単なる計算練習としてもかなりの量となる。さらに、ある2数からはじめ、5回の計算で元の2数に戻らなかったときに、どこかで計算ミスしていることに気づき、自ら再計算していたことは、単なる計算ドリルの中では見られない姿であろう。普通の計算ドリルでは、答えが間違っていることを指摘されて初めてそのことに気づく場合が多い。そういう意味において、自分で正誤を認識でき、自分の計算を振り替えることができていた。

性質④については、5回の計算で元の2数に戻るという規則性を帰納的に見つけることができたことがまず挙げられる。それ以外にも、発見した規則性が成り立つことを、文字式を使い一般化して解決しようとした児童がいたこと、整数や小数でも同じ規則性が成り立つことを、整数や小数が分数の形で表されるから成り立つのではないかという推測を立て、整数や小数を分数として統合的に見ようとしたことが挙げられる。以上のように、今回の実験授業は「操作的練習」の4つの性質に沿った授業であったといえよう。

今回の実験授業の成果として、児童は機械的に与えられた計算問題を解くのではなく、規則性が成り立つかどうか確認するという目的意識を持って、何度も繰り返し計算練習を行っていた。しかも、計算ミスをしているときは自らそのミスに気づき再計算しミスを訂正していたことは計算技能の習熟につながったといえよう。さらに、情意面の成果が大きい。普通計算ドリルを解く上での動機といえば、「人よりも早く計算が解けた。」や「答えがあっていたからうれしい。」という外発的なものが主であろう。しかし、今回の実験授業にお

いては「なぜ成り立つのだろう。」や「不思議だ。」という内発的動機が喚起されている児童の感想が多く見られた。

計算技能の習熟といえば、ドリルによる機械的な練習が一般的であろうが、「操作的練習」はそれとは違い、目的意識を持って主体的に取り組むことができた。このことはまさに、我が国で現在重視している算数的活動を通じた知識や技能を身につける授業となり得るのではないだろうか。

課題として挙げられるのは、第一に文字式を使った数学的な証明が6年生にはできないということである。要するに、帰納的に規則性を発見したとしても、そのことを演繹的に証明できないので、すっきりしない部分が残るであろう。しかし、中学校3年生になって、因数分解を学習した後、この問題に再び出会い直すことがあれば証明ができることになる。そのとき感じる喜びや爽快感はとても大きいものになるだろう。

第二に異なる2数を選び、(後ろの数+1)÷(前の数)を5回繰り返す計算は、容易でない。分数の計算力が未定着な児童にとってはかなり、ハードルが高いものとなろう。学力が未定着の児童にとっても取り組めるような問題設定にするため、以下のように問題設定を工夫するとよいであろう。今回の問題は、(後ろの数+1)÷(前の数)であったが、それを、(後ろの数)÷(前の数)に簡素化する。そうすれば、この計算の繰り返しは6回で循環する。例えば、 $2/3$ と $3/4$ の2数から始めると以下のような一連の計算になる。

$$3/4 \div 2/3 = 3/4 \times 3/2 = 9/8$$

$$9/8 \div 3/4 = 9/8 \times 4/3 = 3/2$$

$$3/2 \div 9/8 = 3/2 \times 8/9 = 4/3$$

$$4/3 \div 2/3 = 4/3 \times 3/2 = 8/9$$

$$8/9 \div 4/3 = 8/9 \times 3/4 = 2/3$$

$$2/3 \div 8/9 = 2/3 \times 9/8 = 3/4$$

この一連の計算を見て分かるように、計算自体も簡単になる。しかも、6回の計算で循環するだけでなく、2つおきに分子と分母が入れ替わるといふ答えの規則性を帰納的に発見することもでき

る。もちろん、分数の除法の計算を繰り返し行うことになるので、その習熟も図れるであろう。

第三に、教師が意図した問題練習になり得ているかという問題がある。例えば、分数の除法であれば、 $(\text{分数}) \div (\text{整数})$, $(\text{整数}) \div (\text{分数})$, $(\text{約分のない分数}) \div (\text{分数})$, $(\text{約分のある分数}) \div (\text{分数})$, 小数を分数に直す除法、それらの総合的な問題などがある。そしてその中の、どの段階の知識や技能の習熟を図るのか、教師の意図する問題練習を行わなければならないであろう。今回は整数、小数、分数の四則計算として取り扱ったが、全児童が整数、小数、分数全てで試せたわけではない。教師の意図した練習問題にするために、それに相応しい2数を教師が準備し計算させる必要がある。例えば、 $(\text{分数}) \div (\text{小数})$ の練習も組み入れたければ、0.5, $1/3$ を選ぶことで実現する。要するに目的に応じて、教師が2数を準備し、その上で児童に探求させる際も目的に合うような数値を選ばせればよいのである。そうすることで、教師が意図する問題も組み込んだ練習ができるであろう。一連の計算を色々な2数で試すと、様々なタイプの分数の除法がでてくるので、分数の除法の総合的な問題を主として位置づけるのが相応しいといえよう。

5. おわりに

本稿では「操作的練習」について、ヴィットマンの論文を基に説明し、4つの視点を示した。そして、ヴィットマンがその例として提示した「分数の不思議な計算」を用い実験授業を行った。さらに、その授業を分析し、考察することで「操作的練習」の有用性を検証した。

本稿の中では紹介していないが、「操作的練習」としてヴィットマンが紹介している問題は、どの問題も児童・生徒が意欲的に取り組むであろう魅力的な問題である。しかも、知識や技能の理解を深めると同時に、数学的な考え方や能力を育むことができるように感じる。児童が目的意識を持って取り組める教材なのである。つまり、「算数的

活動」を通して知識や技能の理解を深めることのできそうな教材ということである。しかし、そこで紹介してある問題は8問しかない。これからは、それらの問題だけでなく「操作的練習」としての教材開発を自ら行っていく必要がある。

現在我が国では、「算数的活動」として数多くの研究がなされている。実際学校現場でも、「算数的活動」を通じた授業の実践が行われている。そのような中で、現場の先生方から、どうすれば「算数的活動」を充実させられるのか、そのためには教材開発をどうすすめるべきかといった話を耳に挟んだことがある。今回示した「操作的練習」は、「算数的活動」の充実につながるように感じた。

本稿で示した、「操作的練習」の4つの性質は、教材開発の際の指針となり得ると考えている。性質①②に沿って開発すれば、発展性のある一連の問題が作成できる。そして最も大切なのは、性質③④を考慮に入れることであろう。どんな知識や技能について理解を深めたいのか、どんな数学的な考え方や能力を育みたいのかを考えて教材を開発することが重要となる。こうすることによって、単なる練習問題として扱われてきた様々な問題を工夫することで「操作的練習」として、再教材化できる可能性があると考ええる。

今後、今回取り扱った教材「分数の不思議な計算」を基にした研究の改善、ヴィットマンが示した他の「操作的練習」に関する実証的研究、それ以外の「操作的練習」の開発研究、「操作的練習」の有用性とその限界など残された課題について研究を深めていきたい。

引用及び参考文献

- Ch. Wittmann (1985a), Objecte-Operationen- Wirkungen: Das Operative Prinzip in der Mathematikdidaktik, *Mathematiklehren*, pp. 7-11.
- E. Ch. Wittmann (1985b), Operative Übungen zur Geometrie und zum Bruchrechnen, *Mathematiklehren*, pp. 33-42.
- E. Ch. Wittmann (2000), Developing mathematics education in a systemic process, *Educational Studies in*

- Mathematics* 48/1, pp. 1-20.
- E. Ch. Wittmann/ G. N. Müller (2002), *Das Zahlenbuch 1 Lehrerband*, Ernst Klett, pp. 7-151.
- 國本景亀 (2005), 「果てしなく広がる「数の石垣」の世界」, 算数・数学の学習環境デザインワークショップ発表資料, pp. 1 -20.
- 國本景亀 (2010), 「E.Ch.ピットマンの数学教育論(Ⅲ)」
-直感手段の開発:豊かな知識の構成のために:「5の力」に焦点を当てて-, 全国数学教育学会誌 数学教育学研究 第16巻 第1号, pp. 1 -14.
- 米田重和 (2013), 「二等辺三角形探し」を例にした「操作的練習」に関する研究」, 日本数学教育学会誌 第95巻 第3号, pp17-24.
- 文部科学省(2008a), 「小学校学習指導要領解説算数編」, 教育出版株式会社, pp. 16-168.
- 文部科学省(2008b), 「中学校学習指導要領解説数学編」, 教育出版株式会社, pp. 1 -187.
- 山本信也 (2003), 「操作的原理」による算数・数学の学習指導-小学校低学年での「計算三角形」の扱いを中心に-, 九州数学教育学会発表資料, pp. 1 - 7 .