

『数の本』における小学校低学年の 「座標」の学習に関する一考察

米 田 重 和

A study on the learning of “coordinate” for the first and
second grade students in “Das Zahlenbuch”

Shigekazu KOMEDA

要 旨

ドイツの算数教科書『数の本』では、小学校低学年の段階から座標の学習を体系的に学習するように位置づけている。わが国の算数教育の現状からするとこのことは大変画期的なことであり、その目的と意義について研究する価値は十分あると考えられる。そこで本稿では、『数の本』の学習領域と「座標」の学習の取り扱いの概略を説明する。それから、低学年の『数の本』で取り扱われている教材「街並み」(Eckenhäuser)の、目的を示す。さらに教材「街並み」を使ってどのように学習を進めていくのか教科書を分析し、意義を考察する。

その結果、位置関係を文章に表現したり、文章で表現された位置関係を図に示したりする学習や道のりを求めるという座標に関する学習をしたりすることが確認できた。それに加え、幾何学的パターンを見つけたり、道筋が何通りあるか組み合わせを探したりする発展的な学習が含まれることも明らかになった。これは、ヴィットマンが提唱した「本質的学習環境」の実現をめざした結果である。また、我が国の教科書と比較すると問題の詳しい解説や考え方などが書いていない。それゆえ子ども達は教科書を開いたまま自由な発想で主体的に問題解決に取り組むことが可能になる。

1. はじめに

筆者が『数の本』(Das Zahlenbuch)に出会ったのは2003年のことである。その斬新的なデザインと内容に驚いたのを今でも鮮明に覚えている。

『数の本』は、数学教育改革プロジェクト「mathe 2000」で作成された算数教科書であり、小学校1年生用から4年生用までの4冊が現在出版されて

いる。「mathe 2000」はドイツのドルトムント工科大学のヴィットマン等が主催し、打ち立てたプロジェクトであり、教科書作成だけでなく、数学教育改善に向け様々な活動を行っている。

『数の本』と我が国の算数教科書と比較するといろいろな面で違いが見られる。それらについて分析を行い、日本の数学教育に対して価値が認められれば価値ある研究となるだろう。

本稿では『数の本』の題材の中で、「座標」(Koordinaten)に着目する。それは、この「座標」の教材は日本の算数教科書には見られないからである。それゆえ日本の教科書との違いを考えるには相応しい教材であろう。

そこで、本稿の目的は、まず、『数の本』の学習領域と「座標」の学習の取り扱いの概略を説明する。それから、低学年の『数の本』で取り扱われている教材「街並み」(Eckenhausen)の目的を示す。さらに教材「街並み」を使ってどのように学習を進めていくのか分析する。最後に、日本の算数教科書との違いを考察することによって、日本の算数・数学教育に対して示唆を得る。

2. 『数の本』における座標の学習

『数の本』の編集方針が1年生用の『数の本の教師用指導書』(Das Zahlenbuch 1 Lehrband)にある「『数の本』の基本的な考え方」(Grundkonzeption des “Zahlenbuch”) (E. Ch. Wittmann/ G. N. Müller, 2002a)に記載されている。「『数の本』の基本的な考え方」には7つの項目があり、『数の本』で学習する数学の学習領域についてはその5つの項目の中の1つである「数学の基本的アイデアに教材を絞り込む」(Konzentration des Stoffes auf die tragenden Grundideen)の中に提示してある。その内容については以下で述べる。

「数学の基本的アイデアに教材を絞り込む」は3つの領域に分けられている。それらは「数と計算の基本的アイデア」(Grundideen der Arithmetik)と「幾何の基本的アイデア」(Grundideen der Geometrie), 「計量と日常生活に関する問題の基本的アイデア」(Grundideen von Größen und Sachrechnen)である。次に、それぞれについて詳述する。

「数と計算の基本的アイデア」は、5つの基本的アイデアに分かれている。

- (1) 数の領域 (Zahlreihe)
- (2) 計算と計算法則, 計算の長所 (Rechen, Rechengesetze, Rechenvorteile)

- (3) 十進法 (Zehnersystem)
- (4) 計算方法 (Rechnungsverfahren)
- (5) 数の法則性とパターン (Arithmetische Gesetzmäßigkeiten und Muster)

「幾何の基本的アイデア」も5つの基本的アイデアに分かれている。

- (1) 図形とその構成 (Geometrische Formen und Konstruktion)
- (2) 図形の操作 (Operieren mit Formen)
- (3) 座標 (Koordinaten)
- (4) 計量 (Masse)
- (5) 幾何の法則性とパターン (Geometrische Gesetzmäßigkeiten und Muster)

「計量と日常生活に関する基本的アイデア」は3つの基本的アイデアに分かれている。

- (1) 環境にある数 (Zahlen in der Umwelt)
- (2) 環境にある図形 (Formen in der Umwelt)
- (3) 数や図形といった数学的言語への翻訳 (Übersetzung in die Zahl- und Formensprache)

『数の本』では、以上で示した内容を学習し、「座標」の学習は「幾何の基本的アイデア」の1つである。「座標」の学習に関しては、「点の位置の説明のために、直線、平面、空間に座標系が導入される。これは、解析幾何の基礎となるもので、関数のグラフの基礎にもなる。」(E. Ch. Wittmann/ G. N. Müller, 2002a)と述べられており、このことから『数の本』では「座標」の学習が極めて重要な学習と考えていることが伺える。

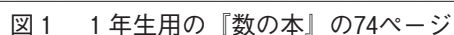
3. 低学年における『数の本』の座標の学習の目的

1年生における座標の学習の目的について、『数の本の教師用指導書』の中で以下のように述べられている。

「街並み」は格子状につくられた架空の街を題材にして、子ども達が主体的に解決していく問題が設定されている。道筋を考える際に、上下左右といった位置について述べなければならない。実際の街についての地図があれば、実用的な幾何に

要するに、低学年の座標の学習では、格子状の街を題材にして、地図上の位置関係を表現する学習活動を行う事が目的である。1年生では上下左右といった言葉で述べる事が要求され、2年生では文章で表現された位置関係を図の中で示すことが求められている。

本節では低学年における座標学習の教材「街並



1年生用の『数の本の教師用指導書』に、74・75ページの問題に取り組む際、「回り道をせず、最短距離を進むというルールを子ども達に説明せよ。」と明記してある。さらに、1の前に、Inaの家からS(学校)まで行く道を示し、その道を説明する問題を例として取り扱い、「子どもの遊び場の方向に進み、2つめの交差点を右に曲がる。もしくは、子どもの遊び場から右に曲がり、タクシーから左に曲がると学校に着く。」といった説明を行うようにするように記述されている。

(E. Ch. Wittmann/ G. N. Müller, 2002a) この例に倣って、問題 ① と ② に取り組ませる。

① の、Leo の家から学校までの道は 6 通りあり、Ina の家から学校までの道は 3 通りある。② の、Ina の家からプールまでの道は 3 通りあり、Eva の家からプールまでの道は 10 通りある。授業では、それぞれ何通りの道があるか探求することが望まれている。

75 ページでは、タクシーの通り道について考えさせる。タクシーは回り道をせず最短距離を進むことを子ども達に伝える。問題に取り組む際はタクシーの代わりにおはじきを使い、74 ページの地図上を動かして考えさせるようにする。

① はそれぞれの問題で何区間の道のりか答える問題である。まず、タクシーから Leo の家まで 5 区間の道のりであることを例として教師が説明する。次に Leo の家から郵便局までと、郵便局からプールまでの道のりについて考えさせる問題となっている。

Leo の家から郵便局までは 3 区画の道のりであり、郵便局からプールまでの道のりは 5 区画である。

② は、Polizei (警察) から S (学校) までの道のりと、Polizei (警察) から赤十字 (病院) までの道のりのどちらが長いか考える問題となっている。

この問題では Polizei (警察) から S (学校) までの道のりは 3 区画で、Polizei (警察) から赤十字 (病院) までの道のりは 2 区画であるので、Polizei (警察) から S (学校) までの道のりの方

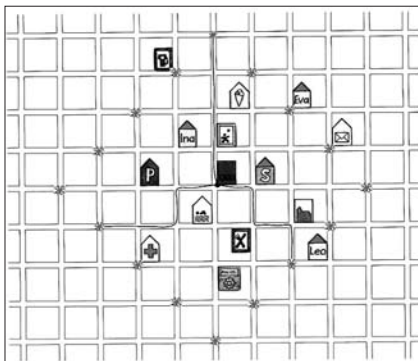


図 3 幾何学的なパターン

が長い。

③ は、タクシーが 4 区間だけ進むとき、どこに到着するか考え、到着し得る場所に印をつける問題となっている。この問題は以下に示すように、印をつけた場所が正方形となり、幾何学的なパターンを生じる。(図 3)

以上のように 1 年生の『数の本』の 74・75 ページに含まれる数学の学習は、最初に、格子状の街の地図を元にして、右や左に曲がるといった言葉を用いて位置を表現する学習を行う。次に、出発地から目的地まで何区間であるか距離についての学習をする。さらに、出発地から同じ区間進めば、正方形という幾何学的パターンが生じる事を発見していく学習も含まれている。

次に 2 年生用の『数の本』106・107 ページを提示する。(図 4, 図 5) (E. Ch. Wittmann/ G. N. Müller, 2002d)

106 ページの ① は Leo の家から学校に行く道を地図上に示す問題である。

..... 道

街並み

① Leoは学校に行きます。次の道を示さない。

- はじめに郵便局の方向に進みます。
2つめの交差点を左に曲がります。
- はじめに警察署の方向に進みます。
2つめの交差点を右に曲がります。
- はじめに警察署の方向に進みます。最初の交差点を右に曲がります。
教会を左に曲がり、ホテルを右に曲がります。
- ほかにどんな道を行くことができるか書きなさい。

106

地図上で道を探し、進みます。
道を記述したり、記述された道を進みます。

図 4 2 年生用の『数の本』の 106 ページ

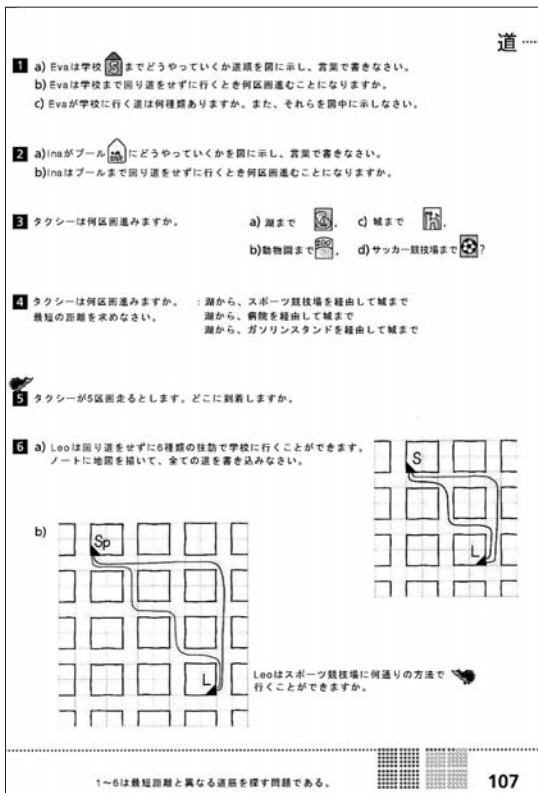


図5 2年生用の『数の本』の107ページ

- a) 最初に郵便局の方向に進み、2番目の交差点を左に曲がって行く道を地図上に示す問題となっている。
- b) 最初に警察署の方向に進み、番目の交差点を右に曲がっていく道を地図上に示す問題となっている。
- c) 最初に警察署の方に進み、最初の交差点で右に曲がり、教会で左に曲がり、ホテルで右に曲がっていく道を地図上に示す問題となっている。
- d) 学校まで行くのに、他にどんな道があるか探し、それを記述する問題となっている。

Leoの家から学校まで行く道は全部で6通りある。a)～c)で3通り示されているので残りは3通り存在する。

106・107ページの問題に取り組む際、「回り道をせず、最短の距離で学校に行くというルールを最初に説明すること。」と2年生用の『数の本の教師用指導書』にも明記してある。

さらに、1年生の教材「街並み」の違いについて、「1年生の問題は目的地の道を探し、それを記述することであった。しかしそれだけでなく、2年生の問題では文章で記述された道を地図上に示すこと」と述べられている。(E. Ch. Wittmann / G. N. Müller, 2002b)

107ページの[1]はEvaの家から学校に行くときの問題である。

- a) はEvaの家から学校にどうやって行くことができるか道を地図上に示し、その道順を言葉で書き表す問題である。
- b) はEvaの家から学校まで回り道をせずに行くとき、何区画進むことになるか答える問題である。
- c) は、Evaが学校まで回り道をせずに行くとき、何種類の道がある下図に示し、答える問題である。

Evaの家から学校までの道は全部で道は3通りあり、回り道をしないと3区画進むことになる。

[2]は、Inaの家からプールに行くときの問題である。

- a) は、Inaの家からプールにどうやっていくことができるか道を図に示し、その道順を言葉で書き表す問題である。
- b) は、Inaの家からプールまで回り道をせずに行くとき、何区画進むことになるか答える問題である。

Inaの家からプールに行く道は全部で3通りあり、回り道なしで3区画進むことになる。

[3]は、タクシーが次のa)～d)の場合何区画進むか求める問題である。

- a) 湖まで
湖までの道のりは10区画である。
- b) 動物園まで
動物園までの道のりは10区画である。
- c) 城まで
城までの道のりは10区画である。
- d) スポーツ競技場まで
スポーツ競技場までの道のりは10区画である。

[4]は途中で、ある地点を經由して目的地に行

くときの最短の道のりを求める問題である。

まず、湖からスポーツ競技場を経由して城まで行く問題の最短の道のりは20区画である。次に、湖から病院を経由して城まで行く問題の最短の道のりも20区画である。最後に、湖からガソリンスタンドを経由して城まで行く問題の最短の道のりも20区画である。

[5] はタクシーが5区間だけ進むとすると、どこに到着する可能性があるかを考える問題である。

タクシーが到着し得る場所に印をつけると、正方形という幾何学的なパターンが現れる。その正方形の上下左右の道が対角線となり、対角線の中点がタクシーの場所となる。

[6] の a) は、Leo の家から学校まで6通りの道を見つけて、ノートにそれらの道を書き込む問題である。b) はLeo の家からスポーツ競技場まで何通りの道があるかを探す問題となっている。この問題の解答として20通りの道を見つけることができる。

以上のように、2年生の『数の本』の106・107ページに含まれる数学の学習は、1年生用の街を広範囲にした格子状の街の地図を元にしていて、そこでは、目的地の道を探し、それを右に曲がる、左に曲がるといった言葉を用いて表現することに加えて、文章で表現された道を地図上に示すという学習もする。

それから、出発地から目的地までの道のりや途中ある地点を経由して目的地に進むときの道のりを求める学習をする。さらに、出発地から同じ区間進めば、正方形という幾何学的パターンが生じるのを発見する学習や出発地から目的地までの道筋が何通りあるか組み合わせを探索する学習も含まれている。

これまでのことから、低学年における『数の本』の座標の学習では、位置関係を文章に表現したり、文章で表現された位置関係を図に示したりする学習や道のりを求めるという座標に関する学習をすることが明らかになった。それに加え、幾何学的パターンを見つけたら、何通りあるか組み合

わせを探したりする学習が含まれることも明らかになった。

また、1年生用の『数の本』の74・75ページ、2年生2年生の『数の本』の106・107ページをみて気付くこととして、例題やその解説、考え方のヒントなどが教科書に全く記載されていないことが挙げられる。

5. 日本の教科書と『数の本』の違いの考察

日本の教科書と比較するとその違いとして次の3つが挙げられよう。

まず1つ目は、日本では学習しない教材「街並み」のような内容が含まれていることが挙げられる。このことに関しては国が違えばカリキュラムも違って不思議ではない。4節で分析した教材の内容からして、場所を表したり、組み合わせを考えたりする学習は数学的に価値ある教材であると考えられる。しかし、現行の指導要領の解説でいえば、教材「街並み」のような「座標」の学習がどの領域のどの単元で学習するとよいのか、その位置づけが難しい。

次に2つ目は、「座標」という位置関係を表すのを主目的とする学習であるのに、組み合わせの問題や、幾何の問題が含まれるということ、つまり、領域や単元を横断した問題が含まれていることが挙げられる。その理由について以下に考察する。

『数の本』はヴィットマン等が中心となって作成した教科書である。そのヴィットマンが提唱した概念に「本質的学習環境」という概念がある。この概念は、2000年の論文「算数・数学を生命論的過程として発展させる」(E. Ch. Wittmann, 2000)の中でヴィットマン自身が用いた言葉である。この考え方は1984年の論文の「数学教育学の統合した核としての教授単元」(E. Ch. Wittmann, 1984)の中では「教授単元」(Teaching Units)と彼自身が呼び、1995年の論文の「デザイン科学としての数学教育学」(E. Ch.

Wittmann, 1995) では「本質的教授単位」(“Substantial” Teaching Units)と呼んでいたものである。この概念は以下で示すような性質を持つ数学の学習環境のことである。この概念はきわめて重要な概念であるので原文もそのまま載せることにした。

「①算数・数学の指導の中心となる目標、内容、原理があるレベルで示されている。

(It represents central objectives, contents, and principles of teaching mathematics at a certain level.)

②そのレベル以上の重要な数学的内容、課題、発展と結びついており、豊かな数学的活動の源になっている。

(It is related to significant mathematical contents process and procedures beyond this level, and is a rich source of mathematical activities.)

③柔軟性がある教材で、それぞれの学級の状態にあわせることができる。

(It is flexible and can be adapted to the special conditions of a classroom.)

④算数・数学の指導に関する数学的、心理学的、教授学的観点を統合し、実証的研究を十分行うことができる。

(It integrates mathematical, psychological and pedagogical aspects of teaching mathematics, and it forms a rich field for empirical research.)」(E.Ch. Wittmann, 2000)

この中の性質①②に注目すると、ヴィットマンは、算数・数学の学習において、本時の学習の目標を達成するだけでなく、それを越えた算数・数学の内容や課題の発展性を望んでいることがわかる。前節で明らかにした教材「街並み」の学習内容の中に、発展的内容が含まれているのも、「本質的学習環境」の性質②に照らし合わせて考えると納得がいく。

教材「街並み」を本質的学習環境の性質に照らし合わせて考えると、「座標」の学習をするという明確な目標や内容があり、幾何学的パターンや

組み合わせといった発展的内容を含む。さらに、子どもに応じて教材を作り替えることが可能な柔軟性のある教材である。つまり、教材「街並み」は「本質的学習環境」を実現し得る教材といえよう。

教材に関連した数学的な内容であれば、主目標とは異なる領域であっても取り扱うのは、数学的な見方や考え方を広げる機会となり、有意義であろう。

最後に3つ目は、教科書に例題やその詳しい解説や考え方のヒントが記載されていないということが挙げられる。実際、教材「街並み」のページの構成を見てみると、1年生用・2年生用の共に見開きの作りとなっており、左側に当たるページ(1年生用の『数の本』の74ページと2年生用の『数の本』の106ページ)は、ほぼ全面に地図が配置しており、その下に、地図上で道順を子どもが探し説明する問題が配置してある。そこには我が国の算数教科書によくみられるような例題やその詳しい解説が存在しない。

例題とその解説が載っていないということは、子どもがそれを目にすることがないという事である。要するに、子ども達は自分自身で既有的知識を使って解答を考え出すことが要求される。自分の力で問題を解決しようとするので、子ども達の主体的な学びを促進することに繋がる。また、教科書を開いたまま子ども達に問題を解かせることができるという利点も考えられる。我が国の教科書は、多くの場合例題にその詳しい解説が教科書に書いてあるために、教科書を開いたまま授業を進めようとするれば、子ども達はどうしてもその解説が目に入ってしまう。その結果、自分の力で問題を考えようとしなくなるのは当然のことであろう(図5)。

一方、欠点として考えられるのは、解説や説明が少ない分、例えば欠席して授業を受けなかった子どもが自分で学習しようとした場合、正しい解答が分からないという問題が起こる。我が国の教科書について実際教科書会社の編集員に聞いた話であるが、教科書はいろいろな立場、例えば学校

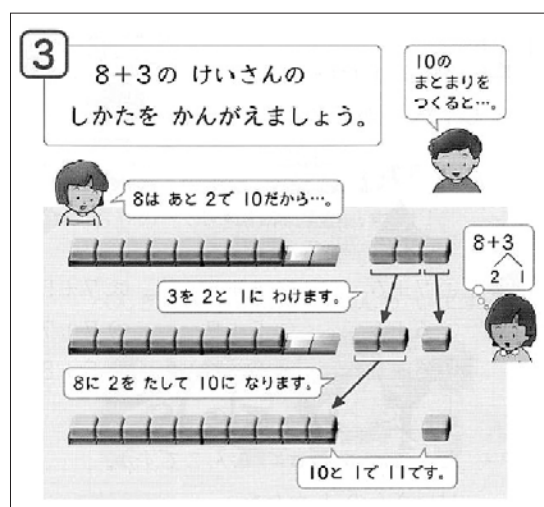


図5 東京書籍 1年生の教科書

を欠席してその分を自分で学習しようとする子どもが自学自習できることにも配慮して作成しているという話を直接聞いたことがある。そういう意味では『数の本』は授業を受けるということを前提としていると考えられる。

6. 終わりに

本稿では、まず『数の本』の学習領域と「座標」の学習の取り扱いの概略を説明した。それから、低学年の『数の本』で取り扱われている教材「街並み」(Eckenhäuser)の目的を示した。さらに教材「街並み」を使ってどのように学習を進めていくのか分析した。最後に、日本の算数教科書との違いを考察することによって、日本の算数・数学教育に対して示唆を得た。

本研究を通して、我が国の教科書とドイツの算数教科書『数の本』では明らかに、教科書の役割が異なることを感じた。我が国の教科書は、解説や考え方が丁寧に書かれており、子ども達が自学自習できることを前提とした教科書である。一方、『数の本』は教師が授業をすることを前提とした教科書であり、解説や考え方が載っていない分、子ども達が教科書を開いたまま、自由な発想で答えを考えることができるように作られている。双方利点と欠点であろうが、算数的活動や数学

的活動を重視している我が国の算数・数学の教科書において十分示唆を得ると考えられる。

今後の課題として、実践を通しての成果と課題を見いだすことである。

引用および参考文献

- E. Ch. Wittmann (1984), Teaching unit as the integrating core of mathematics education, *Educational Studies in Mathematics*, 15, pp.353-374.
- E. Ch. Wittmann (1995), Mathematics education as a "design science", *Educational studies in Mathematics*, pp.355-374.
- E. Ch. Wittmann (2000), Developing mathematics education in a systemic process, *Educational Studies in Mathematics* 48/1, pp.1-20.
- E. Ch. Wittmann/ G. N. Muller (2002a), *Das Zahlenbuch1 Lehrerband*, Ernst Klett, pp.7-151.
- E. Ch. Wittmann/ G. N. Muller (2002b), *Das Zahlenbuch2 Lehrerband*, Ernst Klett, pp.12-198.
- E. Ch. Wittmann/ G. N. Muller (2002c), *Das Zahlenbuch2 Lehrerband*, Ernst Klett, pp.74-75.
- E. Ch. Wittmann/ G. N. Muller (2002d), *Das Zahlenbuch2 Lehrerband*, Ernst Klett, pp.106-107.
- 藤井齊亮／飯高茂 他 (2010), 新しい算数1, 東京書籍株式会社, p. 97.