佐賀大学教育実践研究　第32号
平成26年度（293～300）

実 践 報 告

論理的思考力や数学的表現力を育む授業づくりについて
－中学校3年数学科「２つの関数のグラフの交点について」の授業分析を通して－

山口　高司*

About Math Classes to Develop Student's Logical Thinking and Mathematical Expressions: 9th Grade Math through a Class Analysis of a Point of Intersection of Two Functions

Takashi YAMAGUCHI*

【要約】
数学的な思考力・判断力・表現力を育むために，関数領域において，数学的な表現を用いて，根拠を明らかにし，筋道を立てて説明し伝え合う活動を取り入れた学習指導の工夫を探った。具体的には，身のまわりにある数学的な課題を表や式，グラフ，図などを適切に用いながら自分の考えを相手に論理的に説明する力を身につけさせることを重視した。

【キーワード】
論理的思考力，数学的な表現力，表・式・グラフ等の活用，論理的に説明する力

1．はじめに

本校数学科では，小・中が連携しながら論理的思考力や数学的な表現力を育む授業づくりを探究し，児童生徒が「考える楽しさ」や「わかる喜び」を実感できるような授業を目指して研究を進めている。授業において，課題を解決し答えを求めることは大事なことだが，その答えに至るまでの過程も重要である。生徒に考える楽しさを味わわせるためには，課題解決の過程において，まず生徒に考えさせる場があることが大切で，生徒が自ら考えてみたくなるような状況を生み出すべきであると考える。また，生徒にわかる喜びを実感させるためには，「できた」「解けた」「理解した」ことによる満足感を与えるだけでよいのだろうか。思考の段階で「なぜなのか」「どうしてなのか」「さらにどうなるか」を突き詰めながら筋道を立てて論理的に考えさせることで，納得を伴った理解が得られるはずである。さらに，当然と思っている数学的事実を疑ったり考え直したりしながら「はっ」と気付く場や感動する体験を伴わせるような授業をつくっていくことが重要ではないかと考える。

また，本年度，本校の研究は関数領域を対象としている。ここでは，学力デザインに示しているように，数学に関する用語の意味や概念などを正しく理解し，ことばや式，図，表，グラフ，資料などを適切に用いながら自分の考えを相手に論理的に説明する力を身につけさせたい。また，他の人の考え方を理解し，自分の考えを広げたり，つなげたりすることができるようにもしていきたい。

そこで，本年度は，数学的な思考力・判断力・表現力を育むために，関数領域において，数学的な表現を用いて，根拠を明らかにし，筋道を立てて説明し伝え合う活動を取り入れた学習指導の工夫を探るという目標を設定した。具体的には，身のまわりにある数学的な課題を表や式，グラフ，図などを適切に用いながら自分の考えを相手に論理的に説明する力を身につけさせることを重視していきたい。

＊佐賀大学文化教育学部附属中学校

2．単元の目標と内容

(1) 生徒の実態

本学級の生徒は，まじめな生徒が多く，課題には一生懸命に取り組むことができる。しかし，事前アンケートを見ると，「なぜ関数を学ぶのか」「身近なところに関数関係があるのか」と思っている生徒が多い。また，事前テストを見ると，単純に表，式，グラフ等をかくことを確実にできる生徒は多いが，自分の考えを表，式，グラフ等を使って相手に説明し伝え合うことを苦手にしている生徒も多い。

そこで，本単元では，義務教育９年間をつなぐ「カリキュラムデザイン」にも示しているように，日常生活や社会における課題から，関数$y=ax^2$について理解するとともに，関数関係を見いだし，ことばや図，表，式，グラフ等を適切に用いながら自分の考えを相手に論理的に説明し伝え合う活動やレポート作成を行いたい。

(2) 単元名「関数$y=ax^2$」

(3) 単元の概要

小学校で簡単な関数関係について，中学１年生で比例と反比例，中学２年生で一次関数を学んでいる。そのときに学んだ表，式，グラフについて考察したことをもとに，中学３年生では，関数$y=ax^2$やいろいろな関数について調べていく。そこで，単元を貫く問いを「関数が語りかけるものとは？」とし，身近な事象から，いろいろな関数関係を見いだし，課題をことばや図，表，式，グラフ等を使って解決させていきたい。

本単元では，まず，身近な事象から比例と反比例，一次関数とは違う関数の存在に気付き，考察していくようにしたい。次に，グラフの指導では点を細かくとり，丁寧にかかせたい。関数$y=ax^2$の値の変化については，グラフを活用して，その意味をとらえさせたい。さらに，いろいろな関数では，現実事象から関数関係を見いだし，既習の内容を活用して数学と現実事象を結びつける態度を養いたい。

本時の授業では，斜面を転がるボールに追いつくために，条件をどのように変えればよいか考えさせる。表，式，グラフの相互関係を理解させるとともに，２つの関数のグラフの交点について考察する。

3．授業の実際

(1) 本時の指導目標

斜面を転がるボールに追いつくために，条件をどのように変えればよいか考えさせる。

(2) 本時の評価規準

ア　斜面を転がるボールに追いつくことができるかどうか，表，式，グラフ等を適切に用いながら説明することができる。【数学的コミュニケーション】

イ　斜面を転がるボールに追いつくことができる条件を見つけることができる。【数学的思考力】

(3) 本時に期待する生徒の学び

ペアやグループ，全体の場面で，自分の考えを相手に論理的に説明し伝え合ったり，他の人の考えを理解したりすることで，思考の広がりや深まりをもつことができる。

(4) 本時の授業過程

本時の授業は全14時間のうち，10時間目の授業である。個人解決の段階で論理的に考える活動や，表，式，グラフ等を使って説明する活動を重視していきたい（**次頁表１**）。

表１　本時の授業の流れ

過程	学習活動と内容 ［言語活動］	形態	教師の指導・支援	評価とその方法
導入	１　斜面をボールが転がる様子を見る。	斉	１　アニメーション等を使って，課題の内容を説明する。	
	２　追いつくかどうか予想する。	斉	２　ボールは関数ｙ＝ａｘ^2，追いかける方は一次関数の関係にあることを確認させる。	
	めあて：斜面を転がるボールに， 追いつくことができるか考えよう！			
展開	３　斜面を転がるボールに追いつくことができるかどうか考える。また，表，式，グラフ等を使ってその理由も考える。 ［①説明する］	ペ	３　表，式，グラフのつながりについて確認させる。	ア　表，式，グラフ等を適切に用いながら，説明することができる。 （ワークシート）
	４　斜面を転がるボールに追いつくためには，条件をどのように変えればよいか考える。 ［⑯多面的に見る］	Ｇ	４　変える条件として，追いかける方の速さや追い出す位置，ボールが転がる速さや転がり出す位置がある。	イ　ボールに追いつくことができる条件を見つけることができる。 （ワークシート）
	５　表，式，グラフを見比べて，気付いたことを発表する。 ［⑮比較する］	斉	５　表，式，グラフのつながりや２つの関数のグラフの交点についてまとめる。	
展望	６　身のまわりにあるものが，どんな関数関係になっているかをまとめたレポートを作成することを知る。	斉	６　どんな関係になっているか考えることで，予測することができることを伝え，レポートにまとめさせる。	

４．論理的思考力や数学的な表現力についての考察

数学的な表現を用いて，根拠を明らかにし，筋道を立てて説明し伝え合う活動を取り入れたことで，身のまわりにある数学的な課題を表や式，グラフ，図などを適切に用いながら自分の考えを相手に論理的に説明する力が身についたか考察する。ここでは，発表した生徒のワークシートと授業の発表場面での様子から考察していきたい。

(1) 課題１に対する取り組みの様子

課題１では，次のような課題に取り組んだ。

【課題１】

ある斜面でボールを転がしてみると，転がり始めてからｘ秒後に進んだ距離をｙｍとしたときの関係は，ｙ＝２ｘ^{2}になった。このとき，同じ斜面の32ｍ後方から，秒速12ｍの速さで追いかけたとき，ボールに追いつくことができるだろうか？表やグラフ，式に表して，説明しなさい。

以下は，発表した生徒のワークシートと授業の発表場面での様子である（**図１，２**）。

【生徒Ａのワークシート】

【表】

〔ボール〕

時間（ｘ秒）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	１０
距離（ｙｍ）	0	2	8	18	32	50	72	98	128	162	200

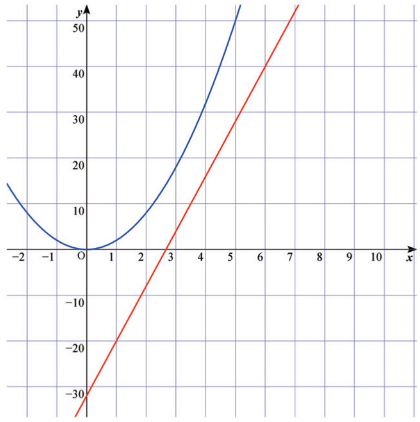
〔追いかける方〕

時間（ｘ秒）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	１０
距離（ｙｍ）	-32	-20	－8	4	16	28	40	52	64	76	88

結論　追いつけない。

【生徒Ｂのワークシート】

【グラフ】



結論　追いつけない。

【生徒Ｃのワークシート】

【式】

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 12x - 32 \end{cases}$$

$2x^2 = 12x - 32$

$2x^2 - 12x + 32 = 0$

$x^2 - 6x + 16 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-64}}{2}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{-28} \quad \times$$

結論　追いつけない。

図１　発表した生徒のワークシートより

教　師「ボールに追いつくことができるか，**理由も説明しましょうね。**」

生徒Ａ「**表を見ていくと，ボールの方が，追いかける方の数字よりも大きいので**追いつけないと思います。あと，**１０秒の後もどんどん広がっているので**追いつけないと思いました。」

教　師「後のことも大事ですね。二次関数はどんどん増えていくけど，一次関数は同じペースで増えていくので，追いつけないと予測できますね。他にないかな。」

生徒Ｂ「$y=2x^2$ と $y=12x-32$ のグラフをかくと，**グラフの交点がないので**追いつくことはできない。」

教　師「グラフの交点が明らかにないから，追いつけませんね。理由も書いといてくださいね。他にないかな。」

生徒Ｃ「２つの式の連立方程式を解くと，$x = \dfrac{6 \pm \sqrt{-28}}{2}$ になります。**２乗して－28 になる数はないので，成り立たないので**，追いつかないと思います。」

教　師「交点があるかないかは，連立方程式の解があるかないかなので，この場合解がないので，答えがないので追いつけないですね。」

図２　授業の発表場面での様子

生徒Ａは，表を使って，ボールの距離が追いかける方の距離より数字が大きいことから追いつけないと理由を説明することができた。さらに，１０秒以降は，二次関数と一次関数の特徴を生かして，追いつけない理由を説明することができた。

生徒Ｂは，グラフを見て，グラフの交点が明らかにないので，追いつけないということを説明できた。

生徒Ｃは，式を使って計算し，ルートの中が－になっており，２乗して－になる数はないので，解がないことになり,追いつけないと説明できた。

３人とも個人解決の段階では理由を記述していなかったが，全体発表の場面で理由も付けて説明することができ，多様な考え方を共有することができた。

(2) 課題２に対する取り組みの様子

課題２では，次のような課題に取り組んだ。

【課題２】
課題１において，条件を１つ変えてよいものとする。
条件をどのように変えれば，追いつくことができるだろうか。

以下は，発表した生徒のワークシートと授業の発表場面での様子である（**図３，４**）。

【生徒Ｄのワークシート】
私は，（　追いかける方の距離　）に着目しました。
距離を後方１０ｍにすると，交点の式は

$$\begin{cases} y=2x^2 \\ y=12x-10 \end{cases}$$

$2x^2=12x-10$

$2x^2-12x+10=0$

$x^2-6x+5=0$

$(x-1)(x-5)=0$

$x=1,\ 5$

１秒後と５秒後に追いつく。

【生徒Ｆのワークシート】
私は，（　後方の距離　）に着目しました。
距離を後方ｂｍとすると，交点の式は

$$\begin{cases} y=2x^2 \\ y=12x-b \end{cases}$$

$2x^2=12x-b$

$2x^2-12x+b=0$

$$x=\frac{12\pm\sqrt{144-8b}}{4}$$

$144-8b=0$

$b=18$

よって，後方１８ｍまでなら追いつく。

【生徒Ｅのワークシート】
私は，（　両方の距離の差　）に着目しました。
〔ボール〕

時間（ｘ秒）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	１０
距離（ｙｍ）	0	2	8	18	32	50	72	98	128	162	200

〔追いかける方〕　32　22　16　14　16　22　32　98　64　86

時間（ｘ秒）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	１０
距離（ｙｍ）	-32	-20	－8	4	16	28	40	52	64	76	88

距離を後方１８ｍにすると，交点の式は

$$\begin{cases} y=2x^2 \\ y=12x-18 \end{cases}$$

$2x^2=12x-18$

$2x^2-12x+18=0$

$x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0$

$x=3$　３秒後に追いつく。

図３　発表した生徒のワークシートより

教　師「追いつくためには，条件をどうすればいいか，**理由も説明しましょうね。**」

生徒D「私は追いかける位置に着目しました。**グラフを見て，２０mにしてもダメみたいなので，１０m後方だったら追いつくかなと思って**計算しました。ｙ＝２ｘ２と１２ｘ－１０の連立方程式を解いたらｘが１と５になるので，１秒後に追いついて，５秒後に追いつかれると思いました。」

教　師「グラフを見て２０ｍだとダメだから，１０ｍ後方にしたんだね。あと，５秒後に追いつかれるというのは追いかける方がボールを追い越して，ボールがまた追いつくということなんだね。他にピンポイントで，瞬間的に追いつくと考えた人いないかな。」

生徒E「**表を見ると一番差が縮まっているのは３秒後の１４になっていたので**，３２ｍ後方から１４ひいて１８ｍ後方と考えました。これの連立方程式を解いたらｘ＝３となったので，３秒後に追いつくと思いました。」

教　師「表とかグラフとかじゃ分からないので，連立方程式で解いたらｘ＝３になったんだね。距離を文字で置いて解いた人いないかな」

生徒F「**距離をｂとして，**解の公式で解いて，ルートの中を０にして解いたらｂが１８になったので，後方１８ｍで追いつくと思いました。」

教　師「速さに着目した人もいると思いますが，他に着目した人もいますね。Ｙさんはどうしたのかな。」

生徒G「ボールの速さを変えればいいと思いました。」

教　師「そうだね。速さを変えるためには，斜面の角度を変えなければいけませんね。他にも疑問を持った人もいますね。」

生徒H「転がっているボールが止まることがあると思います。」

教　師「斜面はずっと続くことはないので，変域がある場合もあることを忘れないでください。今日は時間がないので，他にも考えがある人がいたので次の時間で紹介したいと思います。」

図４　授業の発表場面での様子

生徒Dは，グラフを使って，後方何ｍすればいいか探っていた。後方２０ｍだと明らかに交点がないので，後方１０ｍにして考えた。

生徒Eは，差が最も縮まっているところが３秒後だったので，そこが瞬間的に追いつくことができると予測した。差が１４だったので，後方３２ｍから１４ｍ引いて後方１８ｍとして計算したら，３秒後に追いつくことが確認された。

生徒Fは，文字を使って解決している。距離を後方ｂｍとして計算し，解があるためにはルートの中が０以上にならなければならないので，この生徒は０として答えを導いている。

３人とも個人解決の段階では記述が不十分であったが，発表場面では理由を付けて説明しており，ここでも多様な考え方を共有することができた。

また他にも，生徒Gはボールの速さを変えるという点に着眼したり，生徒Hは変域を考えなくてはならないことに気付いたりした。

さらに，ワークシートを考察すると，表やグラフを見て予測し，以下のような考えもあがった（図５）。

【生徒Ｉのワークシート】

私は，（速さ）に着目しました。

速さを20にすると，交点の式は

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 20x - 32 \end{cases}$$

$$2x^2 = 20x - 32$$

$$2x^2 - 20x + 32 = 0$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$(x-2)(x-8) = 0$$

$$x = 2,\ 8$$

２秒後と８秒後に追いつく。

【生徒Ｊのワークシート】

私は，（速さ）に着目しました。

速さをａとすると，交点の式は

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = ax - 32 \end{cases}$$

$$2x^2 = ax - 32$$

$$2x^2 - ax + 32 = 0$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 256}}{4}$$

$$a^2 - 256 = 0$$

$$a^2 = 256$$

$$a = 16$$

よって，速さを16にするとよい。

【生徒Ｋのワークシート】

私は，（ボールを出発させる時間）に着目しました。

ボールを２秒後に転がすとすると，交点の式は

$$\begin{cases} y = 2(x-2)^2 \\ y = 12x - 32 \end{cases}$$

$$2(x-2)^2 = 12x - 32$$

$$2x^2 - 20x + 40 = 0$$

$$x^2 - 10x + 20 = 0$$

$$x = 5 \pm \sqrt{5}$$

よって，

$5 \pm \sqrt{5}$ 秒後に追いつく。

図５　その他のワークシートから

生徒Ｉは，グラフを使って，速さを秒速何ｍにすればいいか探っていた。秒速２０ｍと予測して解決を試みたところ，２秒後と８秒後に追いつくことが分かった。

生徒Ｊは，文字を使って解決を試み，速さを秒速ａｍとして計算し，解があるためにはルートの中が０以上にならなければならないので，この生徒は０として答えを導いた。

生徒Ｋは，ボールを出発させる時間に着目した。ボールを２秒後に転がすとした場合，$5 \pm \sqrt{5}$ 秒後に追いつくことができるという答えを導いた。

成果としては，着眼点を変えたり，文字を使ったりと多様な考え方を引き出すことができた点がよかった。解があるのはどういう場合なのか考えたことや，ボールを出発させる時間を変えて考えたことなどは高校数学にもつながる学習となった。

課題としては，多様な考え方を出すだけでなく，もう少し一つひとつの考え方を突き詰めていくような授業展開ができたらよかった。例えば，２つの関数のグラフの交点と解の有無の関係について調べたり，関数 $y = ax^2$ のグラフの頂点が移動するものについて考えたりする場面で，もっと時間をかけて丁寧に指導していけばよかった。

5．おわりに

数学的な思考力・判断力・表現力を育むために，関数領域において，数学的な表現を用いて，根拠を明らかにし，筋道を立てて説明し伝え合う活動を取り入れた学習指導の工夫を探った。身のまわりにある数学的な課題を表や式，グラフ，図などを適切に用いながら自分の考えを相手に論理的に説明する活動を取り入れたことで，多様な考え方を共有することができ，生徒に数学的思考力や数学的な表現力を身につけさせることができたと思う。

今後の課題として，児童生徒が課題を楽しんで考えたり，わかる喜びを感じたりできるような教材の開発を今後も積極的に行っていきたい。また，論理的思考力や数学的な表現力の高まりを目指し，「さらにどうなるか」と発展的に考えさせるような授業を仕組んでいく必要がある。

【参考文献】

西岡加名恵編著『「逆向き設計」で確かな学力を保障する』明治図書　2008.
文部科学省『中学校学習指導要領解説数学編』教育出版　2008.