

研究論文

# ケプラーが考えた方法の再現による地球軌道と火星軌道

濱口 敦\* ・ 大隅 秀晃\*\* ・ 角縁 進\*\*  
高島 千鶴\*\* ・ 中村 聡\*\*

## Reconstruction of the Earth and Mars Orbit by the Kepler's Idea

Atsushi HAMAGUCHI\*\*, Hideaki OHSUMI\*, Susumu KAKUBUCHI\*  
Chizuru TAKASHIMA\* and Satoshi NAKAMURA\*

### 【要約】

ヨハネス・ケプラーは、チコ・ブラーエが行った火星の精密な観測記録を手に入れ、いわゆるケプラーの3法則を導いたというような内容が多くの物理学や天文学の入門テキストなどに紹介されている。チコ・ブラーエの観測記録からは地球からみた火星の方向はわかるが、距離の情報は一切ないのである。ニュートン力学が知られていない時代にどのようにして、地球や火星の軌道の詳細を明らかにすることができたのであろうか？チコ・ブラーエの観測記録のかわりに、理科年表に記載された太陽の方向および火星の方向のデータのみを利用して、ケプラーの考えた方法を独自に再現し、地球軌道と火星軌道を再解析することにより、火星の公転軌道は楕円軌道であり、面積速度（軌道角運動量）は一定であるということを再現することを試みた。

### 【キーワード】

ケプラーの法則, 地球や火星の公転軌道

## 1. はじめに

多くの物理学や天文学の入門テキストには古典力学を発展させたガリレオ・ガリレイ、ヨハネス・ケプラー、アイザック・ニュートンなどの数々の逸話がとりあげて紹介されている。たとえば、「物理学とは何だろうか」（参考文献1）によれば、『…（ケプラーは）正確な観測事実に拠りどころを求めつつ厳密な数学的推論を用いるという、先人たちにはみられなかった手法によっていることがわかります。これはまさに近代的な物理学の手法そのものだったのです。そして彼とほぼ同時代のもうひとりの学者ガリレオが強調した「実験」という、これまた以前の人たちがほとんど気づかなかった強力な手法とケプラーのとった手法とが相まって「観測事実に基づき所を求めつつ法則を追求する」という物理学の性格が、次代の学者ニュートンによって確立されていったのです。』ということが序章に記述され、その後、第一章でチコ・ブラーエの観測記録をもとに、ヨハネス・ケプラーがどのような考え方をして地球や火星の軌道の詳細を明らかにしていったかということが記述されている。同様の内容の記述は、もっと簡略化された形で多くの物理学や天文学の入門テキストなどにもとりあげられている（参考文献2, 3など）。それでは実際にこのような考え方をもとに、地球からみえる太陽と火星の方向の観測データだけで距離の情報が一切ないという条件でほんとうに地球軌道と火星軌道が再現できるのか？ということに興味をもった。詳細に調べてみると、多くのテキストに紹介されているこれらに関する記述は、参考文献1の

\*佐賀大学大学院教育学研究科

\*\*佐賀大学文化教育学部

内容を簡略化したものとほぼ同様の内容に終始しており、また、これらの記述を書くにあたって、実際に直接の観測記録にあたり、具体的な数値をあげ地球や火星の軌道を実際に再現してみせているという文献はみつからなかった。本研究においては、参考文献1に記載された方法を用いて、具体的な数値をあげて、地球軌道や火星軌道を再現してみることにする。チョコ・ブラーエの観測記録に代わる観測データとしては実際の観測によるものではないが、同様のものとして取り扱うことができると考えられる理科年表に記載された太陽と火星の視赤緯、視赤径を用いることとする。

また本研究は、当時の科学史を研究するという立場ではないので、実際にケプラーがどのような紆余曲折を経て最終的な結論に到達したかということを追求するのではなく、参考文献1に紹介されたいわゆるケプラーが考えた方法を基礎に考えることにする。ケプラーが考えた方法に関する記述も、もっと探してみればこの文献とは少し違った形でとりあげられている可能性もあるかもしれないが、ここではそのようなことには深く立ち入らないことにする。

## 2. ケプラーが考えた地球軌道の算出方法

まず、具体的な数値計算に入る前に、参考文献1で紹介された太陽をめぐる地球の運動をきめるために用いられた巧妙な方法の紹介から始める。ケプラーはまず観測者のいる地球の位置を正確に知ろうと考えたようだ。

ここでは次のようないくつかの仮定をおきそれが正しいものとして話を進める。その仮定が正しいかどうかは、必要に応じてあとで詳細に検討することとして話を進めることにする。

(仮定1) 地球と火星の軌道面がほぼ重なっていることがわかっていた。

(仮定2) 当時すでに地球の1年はほぼ365.25日で太陽を一周することがわかっていた。

(仮定3) 火星が太陽を1周するには、687日(1.88年)かかることが当時知られていた。

このような仮定のもとで、火星と太陽とが地球をはさんで一直線にならぶ時点をつかまえてその時を起点として、火星が太陽のまわりをちょうど1周する1.88年後の地球の位置を考えてみることにするのだ。まず、惑星と太陽とが地球をはさんで一直線にならぶ時点为天文学の用語では「衝」と呼んでいるので今後この位置関係にあることを示す場合は「衝」という用語を使うことにする。

図1を参照しながら説明しよう。着目している「衝」は、太陽(S)、地球(E<sub>0</sub>)、火星(M)が一直線に並んだ状態で実現している。この「衝」の位置から1.88年後は、火星が太陽のまわりを1周して同じ位置(M)にもどってきているはずである。地球の1.88年後は、太陽を一周して、一年後には同じ位置(E<sub>0</sub>)にもどり、さらに約0.88周してもとの位置(E<sub>0</sub>)の少し手前の位置(E<sub>1</sub>)の位置にいるはずである。この位置を太陽の位置(S)と最初に着目した衝の位置にある火星の位置(M)を基準として求めることができるかどうかということである。地球からみた太陽の方向は、日々の観測からわかっているはずで、図1の角度 $\theta_1$ は観測から得られるはずである。また地球からながめた火星の方向は、太陽の方向とのなす角 $\phi_1$ として測定できるはずである。この $\theta_1$ 、 $\phi_1$ の大きさがわかれば、地球近傍の宇宙空間でも当然ユークリッド幾何学が成り立っているとすれば、3角形の内角の和は $180^\circ$ なので、残りのもうひとつの角 $\alpha$ の大きさも決まる。太陽の位置(S)と最初に「衝」の位置にあると着目した火星の位置(M)を基準に、三角測量の方法で、直線SE<sub>1</sub>と直線ME<sub>1</sub>に対応する直線が作図できる。1.88年後の地球の位置(E<sub>1</sub>)はその二つの直線の交点E<sub>1</sub>として具体的に作図することが可能となる。同様の方法で、火星が太陽のまわりをもう一周まわる3.76年後、さらにもう一周まわる5.64年後と続け

ていけば、その時点の地球の位置が順番にきまってしまう、そして、火星が8周あるいは9周する15.05年後や、16.13年後までつづければ、地球の位置が最初に着目した「衝」にある火星の位置（M）と太陽の位置（S）を基準にほぼ1周分正確にきまるはずである。

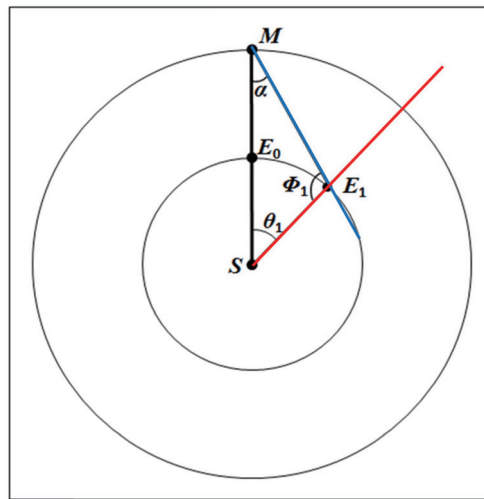


図1 基準となる衝から1.88年後の地球の位置の算出方法

### 3. 火星の軌道の算出方法

地球の軌道の算出方法に引き続き、火星の軌道の算出方法の紹介を続ける。地球の軌道を決めるために、ひとつの基準となる火星の「衝」の時点から出発し、火星が太陽を一周する1.88年後の地球の位置を角度  $\theta_1$ 、 $\phi_1$  の観測から決めることができる（図1参照）ということはすでに述べた通りである。その時点の太陽 - 地球間の距離（S-E<sub>1</sub>）と、最初に着目した「衝」の地点における太陽 - 火星間の距離（S-M）に着目し、すでに2章で述べた方法で地球の軌道がよくわかっているという前提で考えれば、その地球の軌道を基準として、相対的な太陽 - 火星間の距離（S-M）が逆に測定できたということになる。同様のことを「衝」が起こるたびにくりかえせば、その「衝」の条件にある火星（M<sub>x</sub>）と太陽（S）との相対距離（S-M<sub>x</sub>）が測定できるはずである。したがって、それぞれの「衝」における火星の位置は、すでに測定されている地球の軌道をもとに作図できるはずである。この「衝」の位置を順番においかけ太陽のまわりを一周することができれば、火星の軌道が算出できたことになる。

余談であるが、参考文献1ではこのケプラーが見つけた幾何学的洞察力の鋭さとその強靱な推理力について絶賛している。

### 4. 本研究で使用した太陽および火星の位置情報について

太陽や火星などの注目天体を実際に観測した場合、その天体は、観測時刻とともに方位角と高度という形で記録される。また天体の位置情報は、地球の自転軸を極軸とし、天球上の球面座標（緯度-赤緯、経度-赤経）であらわされる。観測地の緯度と経度があらかじめわかっており、観測時間と方位角および高度が測定されれば、赤緯および赤経への変換ができる。恒星の場合は、赤経、赤緯の値は、いつもほぼ一定の値をとり変動はほとんどないが、太陽や火星の場合は、地球の公転運動、および火星の場合は火星自身の公転運動が加わるのでその値は規則的に変動していく。ケプラーはチョコ・ブラーエによっ

て行われたこれに相当する観測データを用いて研究したのであるが、本研究の場合はその観測データにかわるものとして、理科年表に記載されている太陽および火星の視赤緯および視赤経を用いることにした。理科年表には太陽の場合は1日ごと、火星の場合は10日ごとの値が記載されている。

また地軸の傾きに相当する角度の3次元の座標回転を行い、地球や火星の軌道をほぼひとつの平面上の座標で記述できるような変換を行い、最終的に、地球からみた太陽の方向をあらわす角度と、火星の方向をあらわす角度を求めた。

## 5. 基準となる衝を探す

最初に基準となる衝を探すために、最新のデータから過去のデータにさかのぼって調べるという方法をとった。理科年表の太陽および火星の視赤経、視赤緯のデータから、4章で述べた方法を用いて座標回転等を行い、「太陽からみた地球の方向」（地球からみた太陽の方向を用いて逆算した）と「地球からみた火星」の方向が同じになる日時を調べた（図2参照）。その結果、2014年98.90日目（4月9日）にその角度が一致することがわかった。この衝を基準にケプラーが考えた方法による地球軌道と火星軌道の再現を行うことにした。

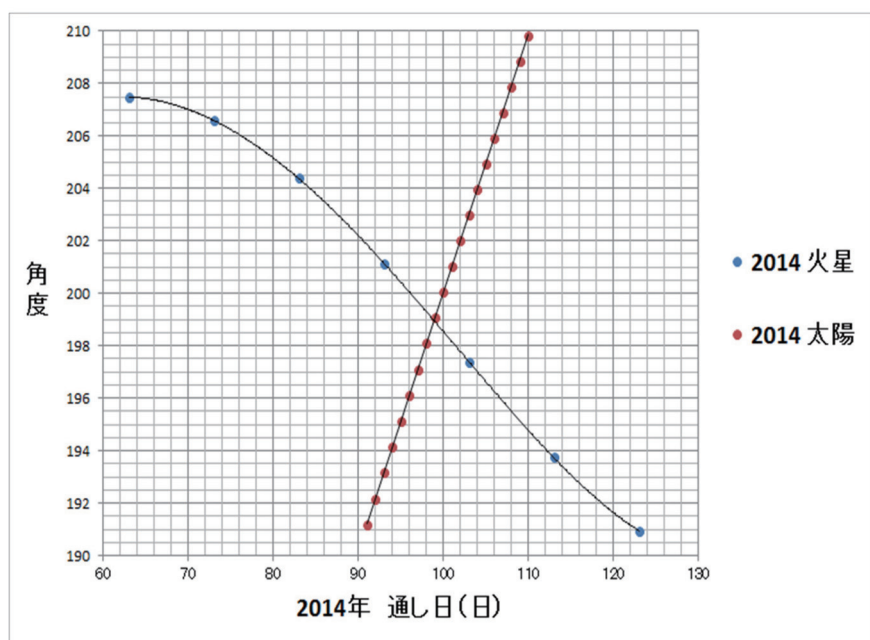


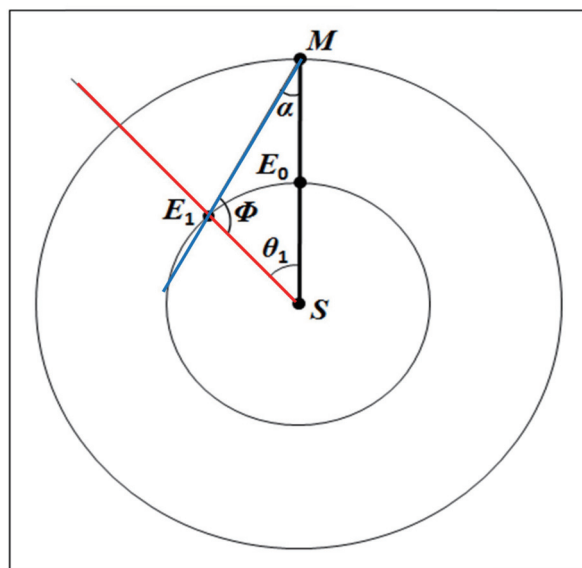
図2 2014年98.90日前後期間の「太陽から見た地球の方向」（2014太陽，赤丸）と「地球からみた火星の方向」（2014火星，青丸）

## 6. 地球の軌道を再現する

まず基準となる火星の「衝」をとりあえず最新のデータから探して、2014年の98.90日目（4月9日）にあるということがわかった（図2）のでこれを基準に考えることになる。

ケプラーが考えた方法の地球軌道の算出方法では、基準となる衝から、時間の経過とともに考えたのであるが、本研究では、基準となる衝から逆に時間をさかのぼって地球の軌道を再現するという方法をとった。したがって、火星が太陽のまわりを1周する、1.88年後ごとに調べていくのではなく、逆に1.88年前、3.76年前…、というふうに時間をさかのぼることとした（図3参照）。時間をさかのぼるので、

地球軌道を逆方向に回転しながら算出していくことになるが、内容的には2章で述べたケプラーが考えた地球軌道の算出方法と全く同じである。



3 基準となる衝から1.88年前の地球

実際に太陽のまわりをほぼ1回転するまで時間をさかのぼって地球軌道の算出を行った結果は図4の通りである。

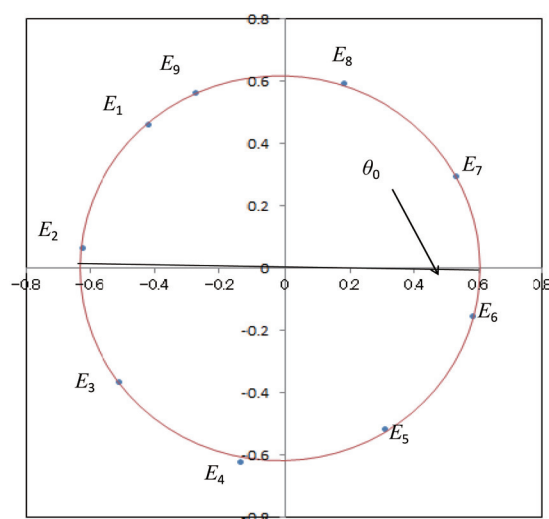


図4 2014年4月9日の衝を基準とした地球軌道の再現

図4では基準となる2014年4月9日の衝における火星の座標を  $(0, 1)$  にとり、中心  $(0, 0)$  にある太陽を基準に1.88年前の地球の位置  $E_1$ 、3.76年前の地球の位置  $E_2 \cdots$ 、と時間をさかのぼって3角測量で求められる交点を繰り返し求めることで  $E_1, E_2 \cdots E_9$  の各点を求めた。また  $E_1, E_2 \cdots E_9$  の各点を用いて、太陽を中心とする楕円という条件で曲線近似を行った。使用した2次元極座標  $(r, \theta)$  上での近似式は次の通りである。

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos(\theta + \theta_0)} \quad (1)$$



ただし  $e$  は楕円の離心率である。また、近似する楕円はその長径が焦点を中心にして回転していてもよいことにしておりその回転角が  $\theta_0$  である。近似により求められた離心率は  $e=0.023$  であり、実際の地球軌道の離心率は  $0.0167$  なので、ほぼ2%程度の離心率をもつ楕円であることがよく再現されたといえる。また近似により求められた  $\theta_0$  は  $2^\circ$  であるので  $\theta = -2^\circ$  の方向（図4ではx軸をすこし下側に回転させた実線で表示）に近日点があることを意味しており、その方向はy軸方向が4月9日であることを考慮すれば、1年のうち1月のはじめごろに対応しており地球の近日点の位置もよく再現されていると言える。

## 7. 火星の軌道を再現する

火星の軌道を再現する場合も、まず2014年4月9日の衝を基準にとり、6章で記述した方法でこの基準の衝よりも1.88年前の地球位置を求め、地球の軌道に対して衝にある火星 ( $M_0$ ) と太陽 ( $S$ ) の相対距離 ( $S-M_0$ ) を求めた。また時間をさかのぼり衝 ( $M_1$ ) を探し、同様の方法で火星と太陽の相対距離を求めて作図していった（図5参照）。またこのとき基準となる地球の軌道は前の章で求めた楕円軌道であるが、その離心率（2%程度）も小さく、たとえ円軌道と近似してもそれによる火星軌道の太陽火星間の距離の誤差は高々2%程度の範囲内でおさまるので、ここでは地球軌道は単純な円軌道と考えることにした。したがって今回の解析で再現される火星の軌道もこの程度の誤差は含まれているということに留意しておく必要がある。

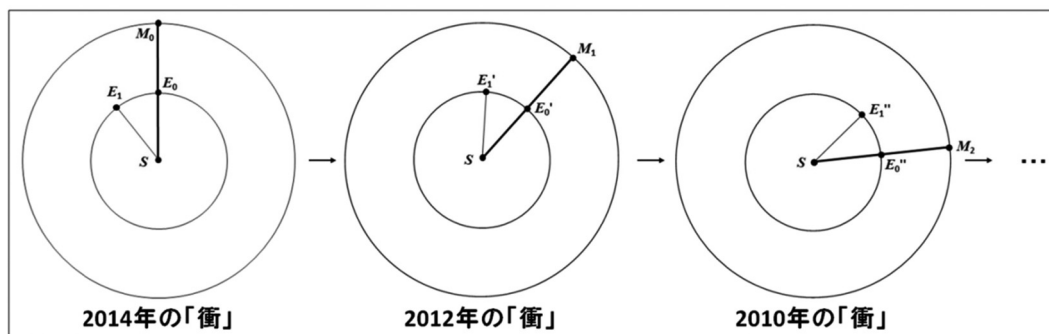


図5 火星の衝を時間をさかのぼって追いかけて火星軌道を再現する

地球軌道の半径を1とし、2014年4月9日の衝の火星位置がy軸上にくるとして再現された火星軌道は図6のとおりである。地球軌道と同様にして、再現された火星軌道を楕円と考え曲線近似を行った。楕円の式は地球軌道と同様の式(1)である。求められた離心率は  $0.095$  で、実際の火星の離心率は  $0.0934$  なのでよく再現されているといえる。火星の近日点の位置を示す  $\theta_0$  は  $142^\circ$  で  $M_6$  の近くにあることがわかる。

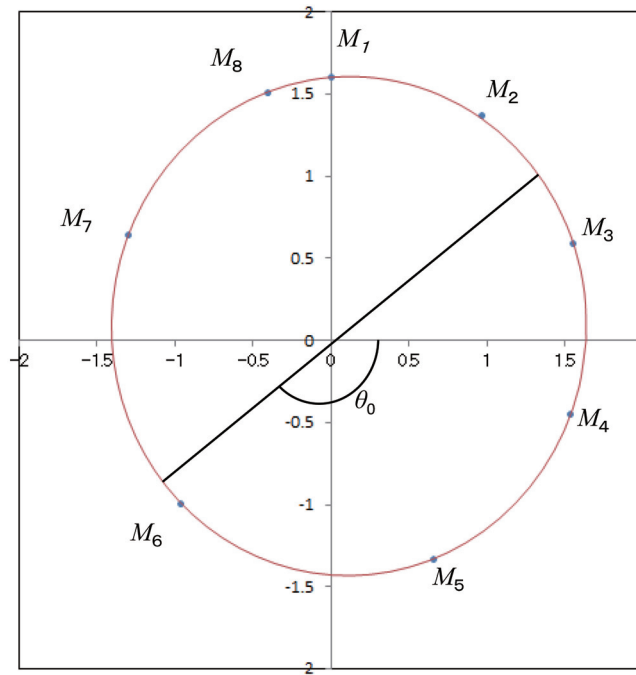


図6 再現された火星軌道

地球軌道と火星軌道を同時に表示してみるともうすこし火星の近日点の状況がわかる。楕円の長径方向は直線で示されているが、第3象限（図6や図7のM<sub>6</sub>のある象限）の方向に伸びている直線が楕円と交わる点が近日点である。参考のため天文ガイド2014年4月号（参考文献5）に掲載された地球と火星の衝時期を示す図と比較した（図7）。地球軌道はほぼ円軌道であるので、近日点付近で衝の条件になれば、火星と地球は大接近になる。このことを示すために火星の接近の情報を同時に表示したのである。

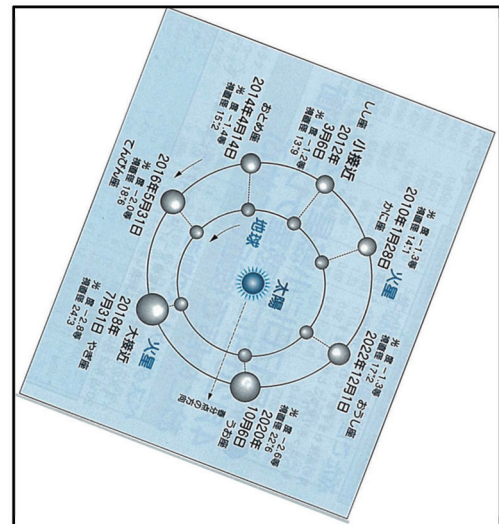
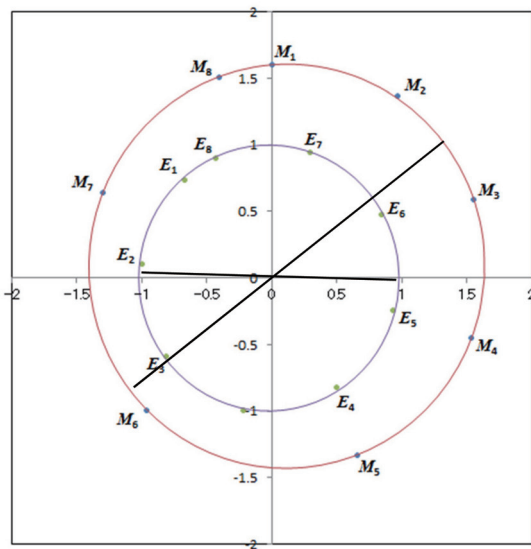

『天文ガイド（2014年4月号）』誠文堂  
新光社

図7 再現された地球軌道と火星軌道（左）火星の衝時期などを示す天文のガイドブック図（右）

（注 正確には地球軌道と火星軌道の軌道面が重なっていないことなどにより、衝の条件と接近の日時は多少違っている）

## 8. 火星の面積速度について

火星の面積速度（軌道角運動量）に対応する量を計算し、ほぼ一定であるといえるかどうか検証することにする。衝の起きる日時とすでに示した方法で求めた火星の太陽からの相対距離を示したものが表1である。2014年4月の衝位置から時間をさかのぼって調べている。衝位置の番号は図7などの（M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>, …, M<sub>8</sub>）に対応するものである。火星は実は1.88年でこの位置（M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>, …, M<sub>8</sub>）をたどって逆に一周することになる。M<sub>1</sub>-M<sub>2</sub>は衝の間隔765日であったが、火星が太陽を一周する場合、M<sub>1</sub>-M<sub>2</sub>間を動く日数は、火星が太陽を一周する687日（1.88年）を差し引いたT=765.03-687=78.03日かかるはずである。したがって面積速度は次に対応する量になるはずである。

$$\text{M1-M2 間の面積速度} = \frac{r_1 r_2 \theta_{12}}{T}$$

ここで  $r_1$   $r_2$  などそれぞれの衝の位置M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>に対応する太陽からの相対距離で、 $\theta_{12}$  はそれぞれの衝M<sub>1</sub>-M<sub>2</sub>間の角度に対応するものでM<sub>1</sub>-太陽-M<sub>2</sub>間の角度に相当する。角度としてラジアンに換算していないのであるが面積速度に比例する量は計算できているはずである。またTとしてはM<sub>1</sub>-M<sub>2</sub>間を動く日数を代入しているので一日に動く面積速度に比例する量を計算していることになる。太陽からの相対距離は20%の幅で変動しているが、面積速度の変化は数%の幅の変動におさまっており、地球軌道を円軌道と考えたことにより発生した誤差を考慮すれば、面積速度はほぼ一定であるといえる。

表1 衝から求められる火星位置と普通にその相互位置をたどって一周する場合の面積速度

衝 (位置)	衝日時	衝間隔 (日数)	衝間隔-687 T(日数)	火星の回転 速度(逆方向 にたどる)	太陽からの 相対距離(r)	衝間角度 (度)	面積速度
1	2014年98.90日			0	1.601		
		765.03	78.03			35.3	1.212
2	2012年63.87日			35.3	1.673		
		765.06	78.06			33.9	1.202
3	2010年29.81日			69.2	1.655		
		767	80			37.2	1.227
4	2007年358.81日			106	1.596		
		777.46	90.46			47.6	1.248
5	2005年311.35日			154	1.486		
		801.58	114.6			70	1.255
6	2003年240.77日			224	1.383		
		806.05	119.1			72.3	1.216
7	2001年164.72日			296	1.449		
		781	94			48.7	1.173
8	1999年114.72日			345	1.564		

## 9. まとめ

ニュートン力学の考えを使用せず火星までの距離の情報がない状況で、ケプラーが考えた方法によって地球からみた太陽と火星の方向に関するデータのみを用いて地球軌道と火星軌道をほぼ完全に再現することができた。

地球と火星の軌道が楕円軌道となっていること（ケプラーの第1法則）に加え、その近日点などが実際の地球や火星の軌道にぴったりあっているということが確認できた。また火星の面積速度がほぼ一定であること（ケプラーの第2法則）も確認することができた。



このようなケプラーが考えた方法での地球軌道や火星軌道の再現は、理科年表における太陽や火星に関する視赤経、視赤緯に関するインターネットでアクセス可能なデータベースの充実と表計算ソフトの充実によりケプラーの当時と比べて比較的簡単に行えるのだということがわかった。そしてそのような便利なツールのなかった時代（たとえば、参考文献1，2，3などが書かれた頃）は、このような具体的な条件を提示しての地球軌道や火星軌道の再現はなかなか難しかったということがあらためて理解できた。また実際にケプラーの時代には、もっと想像を超えるような困難を乗り越えてこのような地球軌道や火星軌道を求めたのだということにも気がつき、あらためて当時のケプラーの果たした業績の大きさを理解することができた。

## 参考文献

- 1) 朝永振一郎著『物理学とはなんだろうか 上』（岩波新書 85）
- 2) 大西直毅著『物理学入門』（東京大学出版会）
- 3) 藤原邦男著『物理学序論としての力学』（東京大学出版会）
- 4) 理科年表 丸善出版
- 5) 天文ガイド2014年4月号(誠文堂新光社)