研 究 論 文

「数学的活動」の充実に向けた授業の方策に関する研究
－「方程式の利用」の実践を基にして－

米田　重和*

Research on Strategy of Lessons for "Mathematical Activities":
On the Basis of the Practice of "Use of the Equation"

Shigekazu KOMEDA*

【要約】
本稿では、ドイツの数学教育学者ヴィットマンの論文をもとに「本質的学習環境」の概念及び「数学的活動」の充実に向けた授業の方策について明らかにする。そして，その方策を基にして中学校1年生の「方程式の利用」の教材開発を行う。さらに，そこで開発した教材をもとに研究授業を行い，授業を分析することで,「数学的活動」の充実に向けた授業となることを確認する。

【キーワード】
本質的学習環境，数学的活動，方程式の利用

1．はじめに

平成20年に改訂された中学校学習指導要領第2章第3節数学科の目標では,「数学的活動を通して」という言葉が冒頭に謳われ,「数学的活動」を重視した数学教育を行うことが求められている。そもそも「数学的活動」とは「生徒が目的意識を持って主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営み」1）のことであり,「教師の説明を一方的に聞くだけの学習や，単なる計算練習を行うだけの学習などは含まれない。」1）と述べられている。「数学的活動」の具体例も指導要領解説にいくつか紹介されているものの，現場にゆだねられている部分が大きく,「数学的活動」を重視した授業を年間を通じて実践していくことができるか疑問が残る。

一方，学校現場をみると，教師の機械的な教え込みによる授業形態が今もなお多く残されている。私自身公立の中学校で十数年教壇に立ちこのような授業を数多くみてきた。このような数学の授業では「数学的活動」を重視した数学教育とはいえない。

特に，今回焦点を当てたのは方程式の利用等で扱う文章題の授業である。東京書籍の1年生の方程式の利用の問題に,「1個90円のオレンジと1個140円のりんごをあわせて15個買いました。そのときの代金の合計は1800円でした。オレンジとりんごは，それぞれ何個買いましたか。」2）という問題がある。これと類似した問題は他の教科書会社の教科書の中にも存在しており，一般的によく知られた問題である。この問題を授業で取り扱うと，問題文を読み取り，図や表から数量関係を考え，立式して方程式を解き，答えを求めることになる。その際，教師は成績中間層に焦点を当てることが多いのでそのペースで授業を進めると，数学が得意な子ども達にとっては，すぐ問題が解けてしまい，簡単で退屈な授業となってしまう。一方，数学が苦手な子ども達にとっては，教師の説明が理解できずに，ついていけない授業となる。生徒教

＊佐賀大学文化教育学部

師間で「未知のものは何か。与えられた条件は何か。」といった問題解決に向けた問答はあっても，それで生徒が目的意識を持って主体的に取り組んでいるとはいえず，「数学的活動」を行っていることにはならないだろう。こういった多くの授業を観たり，経験してきた。このような問題はどう克服すればよいのであろうか。その鍵となる概念として「本質的学習環境」(Substantial Learning Environment)に着目している。

私は2003年現職派遣で熊本大学の大学院に入学し，そのとき以来ドイツのドルトムント工科大学のヴィットマン(E.Ch.Wittmann)が提唱している「本質的学習環境」を中心に研究を進めている。ヴィットマンは算数・数学教育について，ドイツのヴェストファーレン州の学習指導要領を参照して，《数学教育の目標は，数学的に探究させることと，数学的な知識を構成させることで果たすことができる。それゆえ，学習過程のあらゆる面で，子ども達が主体的に学ぶ機会を多く与えなければならない。》[3)] と述べており，子ども達が主体的に学ぶ環境をデザインすることが重要であると考えている。このことは「数学的活動」を重視する日本の数学教育の目標と共通している面が多い。

つまり，ヴィットマンが提唱する「本質的学習環境」の概念を参考にした教材開発を行えば，「数学的活動」の充実に向けた授業が実現できるのではなかろうか。そのことを検証できれば，「本質的学習環境」を具現化するために作られた算数教科書『数の本』(Das Zahlenbuch)等の研究等も「数学的活動」の充実に向けて大いに参考となるはずである。「数学的活動」の充実に向けた研究はこれまで多くなされてきているが，「本質的学習環境」という概念を参考にした研究は今までの研究とは異なる。そして，「数学的活動」の充実に向けた授業の方策を示すことができれば，有意義な研究となろう。

そこで本稿では，第一に，ヴィットマンの論文をもとに「本質的学習環境」の概念及び「数学的活動」の充実に向けた授業の方策について明らかにする。第二に，「数学的活動」の充実に向けた授業の方策を基にして中学校1年生の「方程式の利用」の教材開発を行う。第3に，そこで開発した教材をもとに研究授業を行い，授業を分析することで，「数学的活動」の充実に向けた授業となることを確認する。

2．本質的学習環境

「本質的学習環境」という言葉はヴィットマンの2000年の論文「算数・数学を生命論的過程として発展させる」[5)] の中で使われている言葉である。この言葉は1984年の論文の「数学教育学を統合する核としての教授単元」[6)] の中では「教授単元」(Teaching Units)と彼自身が呼び，1995年の論文の「デザイン科学としての数学教育学」[4)] では「本質的教授単元」(″Substantial″ Teaching Units)と呼んでいたものである。

この「本質的学習環境」は次のような性質を持つ数学の学習環境のことである。

《(1)算数・数学の指導の中心となる目標，内容，原理があるレベルで示されている。

(2)そのレベル以上の重要な数学的内容，課題，発展と結びついており，豊かな数学的活動の源になっている。

(3)柔軟性がある教材で，それぞれの学級の状態にあわせることができる。

(4)算数・数学の指導に関する数学的，心理学的，教授学的観点を統合し，実証的研究を十分行うことができる。》[5)]

この中で，「数学的活動」という言葉が出てくるが，この「数学的活動」はヴィットマンが英語で″mathematical activities″と用いた言葉を訳したものであり，学習指導要領で用いられている「数学的活動」と同じ言葉の定義ではない。上の4つの性質だけでは，具体的な教材のイメージや授業のイメージが湧かない。そこでヴィットマンの他の論文や先行研究を基にして考えていく。國本によれば，ヴィットマンは数学教育の目標について，数学の一般的学習目標と教科の内容的学習目標の2つに分けて考えていることを示している。数学の一般的学習目標とは「数学化」「探求」「推論」「表現」のことであり，知識や技能の習得や習熟を目指す教科の内容的学習目標と同時に達成

することを目指している。[7)]

数学の一般的教育目標の「数学化」とは，現実状況を数学言語に翻訳し，数学的に解決し，結果を現実状況で解釈する能力，「探求」とは，状況を実験的に探求し，関係や構造を発見し，構造を発明する能力，「推論」とは，数学的事態や現象を理由づける能力,「表現」とは，数学的事態や現象を観察し，考察し，理由づけ，評価し，それを口頭でも筆記でも表現する能力のことであり[7)]，日本の指導要領で謳われている中学校数学科で重視している「数学的活動」の3項目①既習の数学を基にして，数や図形の性質などを見いだし，発展させる活動，②日常生活や社会で数学を利用する活動，③数学的な表現を用いて，根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動[1)]と共通する部分が多い。このことから,「本質的学習環境」としての授業は，指導要領の「数学的活動」の充実につながるといえそうである。

「本質的学習環境」としての授業と「数学的活動」の充実に向けた授業の相違点について述べる。まず第一に「本質的学習環境」の性質(2)「そのレベル以上の重要な数学的内容，課題，発展と結びついており」という部分であり，第二は数学観である。山本によれば，《ヴィットマンが「本質的学習環境」デザインにおいて立脚すべき教育観として挙げたのが,「パターンの科学」(a science of patterns)としての数学観であった。》[8)]と述べている。これらのことについては以下の具体例で説明する。

ヴィットマンは「本質的学習環境」としての授業について，具体例として「計算三角形」(Arithmogons)と呼ばれる教材を用い説明している。(図１）この「計算三角形」は三角形が３つの領域に分かれており，その辺の中点に□が置かれたものである，３つの領域にはおはじきを置き，その中の２つの領域のおはじきの数の和が□の数となるものである。

「計算三角形」は与える数値等を変えることで多様な問題へ発展させることができる教材である。内部のおはじきを置いてある領域に数を入れることを考え，内部と外部合わせて6ヵ所の領域のうち3ヵ所に分数や小数，負の数などの数を与えれば，有理数の範囲での加法・減法の問題となる。しかも単なる計算ドリルではなく，加法か減法か自分で判断しながら答えを求めることになる。特に次のような問題の与え方をしたら，簡単に答えを求めることができず，試行錯誤が必要な問題となる。

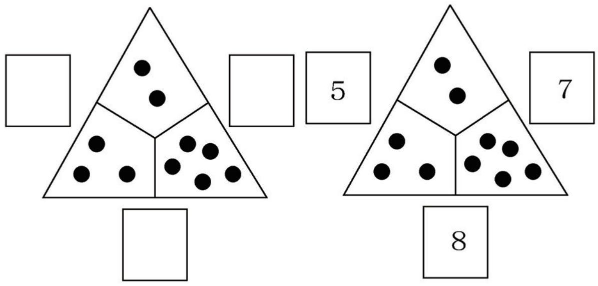
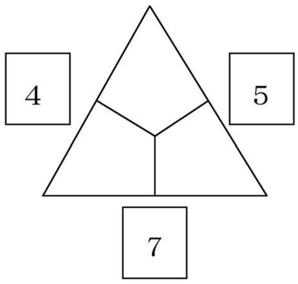


図１　計算三角形



三角形の内側の3つの領域に入る数を求めよ。

同様な問題を何問か解くうちに解答を求めるパターン（例えば、三角形の3つの内部のうち，上の領域に入る数は，(4＋5－7)÷2となる。）を発見する子どもも現れるであろう。このことは，文字を用いることによって，解答を求めるパターンは証明される。小学生に文字を使った説明を要求していないが，パターンの発見によって簡単に答えを求めることができるようになる。さらに,「計算三角形」を「計算四角形」,「計算五角形」,・・・と発展させていくと，線形代数の知識が必要な問題へと発展していく。

このように,「計算三角形」は解法にパターンが生じたり，小学校や中学校といった垣根を越えた広い発展性のある教材であることが分かる。要するに,「本質的学習環境」はパターンの科学としての数学観や数学的な内容として発展性があるということがわかる。

この「計算三角形」を教材として用いた授業の流れについてヴィットマンは次のように述べている。《「計算三角形」は数学的な内容から考えて，自然に派生する一連の流れがあり，次のような指導の流れが考えられるだろう。

(1) 導入で，例題を示し，ルールを理解させる。

(2) 内部の領域全てに数を入れた例題を数問与える。

(3) 内部領域のいくつかと外の□いくつかに数を入れた例題を数問与える。

(4) 外の□3カ所だけに数を入れた問題を１問与える。

(5) (4)と同様な問題に取り組ませる。

このことから分かるように，「本質的学習環境」としての算数・数学の授業は基本的にオープンである。まず，鍵となる問題を設定し，その後は子ども達自身による解決を目指させる。教師の役割は問題解決ができるように子ども達を支援することである。》[4]

上の(1)～(5)の流れで授業を進めれば，授業の導入で一斉に問題の概要を理解した後は，個別で自力解決を行い，子ども同士議論をし，必要に応じて教師が支援しながら問題を解決していくことが予想される。これは，数学の一般的学習目標「数学化」「探求」「推論」「表現」を実現する学習の流れとなっているといえるであろう。

ここで，「数学的活動」の充実に向けた授業の方策について考える。本研究では「数学的活動」の充実を目指すので，「本質的学習環境」で重視しているパターンや発展性については追求しない。そうすることで，日本の教科書で扱っている教材についても応用できるであろう。そこで，「数学的活動」の充実に向けた授業の方策を以下のようにまとめた。

①導入で問題の概要を理解させる。

②導入の問題から派生した探求的な問題に取り組ませる。（自力解決，共同解決）その間，教師は子ども達を支援する。

③学んだことについて発表，議論をさせる。

④終末で授業のふり返りを行わせる。

3．「方程式の利用」の教材開発

ここで扱う問題は「１。はじめに」で示した問題「1個90円のオレンジと1個140円のりんごをあわせて15個買いました。そのときの代金の合計は1800円でした。オレンジとりんごは，それぞれ何個買いましたか。」と同様な問題にする。そうすることによって，普段日本の教科書で取り扱うような内容も，「本質的学習環境」を参考にし，「数学的活動」の充実に向けた教材開発が可能であることを示す。

ヴィットマンは「方程式の利用」の文章題のような問題を例として扱っていないので，平林の考え方を参考にする。現行の教材の範囲でも，多少の工夫をこらせば，豊かな数学的シチュエーションを構成し，その種々の変容を通して，子どもに活発な数学的思考を展開させることができると主張し，文章題を例にして，与えられた数値や変数，条件を変化させることでシチュエーションを変容させることを提唱している。[9] ここに述べた数値や変数，条件を変化させることでシチュエーションを変容させるという考え方は，2章で述べた計算三角形の問題を変化させていくのと共通したものがある。本稿では問題に含まれる数値に変化を与え，次ページのようなワークシートを作成した。（図2）

『　方程式の利用　』
氏名〔　　　　　　　　〕
1　鉛筆本 40 円、ペン本 70 円として次の問いに答えなさい。
例　鉛筆とペンあわせて 3 本買ったら 50 円でした。鉛筆を何本買ったでしょうか。

(1) 鉛筆とペンあわせて 5 本買ったら 320 円でした。鉛筆を何本買ったでしょうか。

(2) 鉛筆とペンあわせて 3 本買ったら 670 円でした。鉛筆を何本買ったでしょうか。

(3) 鉛筆とペンあわせて 40 本買ったら 990 円でした。鉛筆を何本買ったでしょうか。

(4) 上の問題をまねしてオリジナルの問題を作ってみましょう。

図２　ワークシート

以下ではワークシートの問題の分析を行う。導入で取り扱う問題は，「鉛筆とペンあわせて3本買ったら150円でした。鉛筆を何本買ったでしょうか。」であり，問題の意味を理解させることを主目的とする。この問題は，合わせて3本という設定であるので，鉛筆3本ペン0本，鉛筆2本ペン1本，鉛筆1本ペン2本，鉛筆0本ペン3本の4つの組み合わせしかなく，代金が150円となるのは，鉛筆2本ペン1本で40×2＋70×1＝150というのが方程式を使わなくてもすぐ求めることができ，答えは鉛筆2本となるのがわかる。

問題(1)は「鉛筆とペンあわせて5本買ったら320円でした。鉛筆を何本買ったでしょうか。」であり，鉛筆とペンの数の合計が5本になるように組み合わせることで十分考えることができる問題である。子ども達が問題を理解できたか確認するという意味と，数学が苦手な生徒にでも何とか自力解決させ，少しでも成就感を感じさせたいという願いを込めた。

問題(2)は「鉛筆とペンあわせて13本買ったら670円でした。鉛筆を何本買ったでしょうか。」であり，鉛筆とペンの数の組み合わせを考えるにはやや面倒である。同じ方法で問題を解くこともできるが，何か簡単にできる方法はないか子ども達が工夫するのを期待する問題である。

問題(3)は「鉛筆とペンあわせて40本買ったら1990円でした。鉛筆を何本買ったでしょうか。」であり，鉛筆とペンの数の組み合わせを考えるには大変面倒である。もはや同じ方法で問題を解こうと思わないレベルであろう。鉛筆をｘ本買うとして，方程式40x＋70(40－x)＝1990を立てて問題を解決したり，鉛筆を40本買ったとしたら1600円となり，差額が1990－1600＝390円となる。1本あたりの差額が70－40＝30円なので，390÷30＝13，ペンは13本になり，40－13＝27，鉛筆27本となる。いわゆる鶴亀算の考え方で解く方法もある。それでも組み合わせを考えて解く子どももいると思われる。教師の役割は子ども達を支援しつつ，多様な考え方をださせることである。

問題(4)は問題を早く解き終えた子ども達に準備した問題である。鉛筆1本の代金，ペン1本の代金，合わせた本数，合計の金額の関係をきちんと考えず，でたらめに問題を作ってしまうと，答えが分数や負の数になってしまうことがある。そういった数量関係を考慮して問題作成ができるか見るのに適した問題である。

以上のことから今回のワークシートでは，まず，導入の例題を考える中で問題の概要を理解し，それから数値を変化させた問題を探求していく中で多様な解法を引き出すことが期待できる。その際，どうやって答えを求めていったのか子ども達同士意見を出し合い，教師は個に応じた支援をしていくことになる。最後に，問題について，どのような解き方をしたのか発表させるといった授業の流れが予想される。この授業の流れは，2章の最後に述べた「数学的活動」の充実に向けた授業の方策に沿っているといってよいであろう。

このワークシートの問題では，同じ構造の問題を数だけ増加させ繰り返している。そうすることによって，例や問題(1)のように数が小さい場合は，組み合わせを考えて解決する方が簡単で，方程式等の方法を考える必要性を感じない。しかし，問題(2)(3)のように数が大きくなると，組み合わ

せを考える方法で解決するのは面倒であり，別の方法を考え出したくなる。ここがこれまでの研究とは異なる点であり，このような教材提示の工夫によって子ども達による主体的な探求をもくろむ。

4．授業の実際

今回のワークシートを用いて熊本県菊池市立菊池北中学校の1年生を対象に，研究授業を行った。研究授業の目的は，「方程式」の単元の中で，「方程式の利用」として開発した教材を用いた授業を行えば，「数学的活動」の充実が図れることを確認することである。

以下では授業における教師Tと生徒Cの発言や様子について記述する。授業の冒頭で，鉛筆とボールペンを1本ずつおもむろに取り出し，

T「この鉛筆とボールペンの値段はそれぞれいくらだったでしょう。」

すると教室のあちこちから思い思いに，

C「鉛筆は50円，ペンは100円」等声が上がる。

T「この鉛筆は40円，ペンは70円でした。今日は鉛筆1本40円，ペン1本70円として，問題に取り組んでもらいます。」

T「鉛筆とペン合わせて3本買ったら150円でした。鉛筆は何本買ったでしょう。」

例の問題を提示する。しばらくして，

T「わかった人」挙手を求める。すぐに，過半数の生徒が挙手をしたので，一人の生徒を指名すると

C「鉛筆は2本です。」と答える。

T「なぜ，2本とわかりますか。」と質問すると，その生徒は，

C「鉛筆が2本で，40×2＝80円，ペンが1本で70円合計80＋70＝150円です。」と答えた。

そこで，ワークシートを配布し，黒板に式と答えを板書した。そして，他の組み合わせは間違いであることも確認した。このとき，鉛筆とペン合わせて3本の組み合わせのみ強調し，前時まで学習してきている方程式を生徒に意識させないようにした。そうすることで，問題を解き進めたとき，生徒が鉛筆とペンの組み合わせから計算していき，問題(2)や(3)で面倒な体験をあえてさせることで，新しい方法を考え出させることを意図した。

T「それではワークシートの(1)～(3)の問題を解いてみましょう。」と指示を出し，自由に10分程度の時間で問題に取り組ませた。無人のような静けさで集中して問題を解いている様子が見て取れた。その間机間指導を行い，個別に生徒を支援した。

問題(1)は生徒全員が解くことができていた。解法としては全員，鉛筆とペンあわせて5本となる組み合わせを考えて，40＋70×4＝320円となるから，鉛筆は1本になると考えていた。

問題(2)は9割程の生徒が解くことができていた。この問題を解くことができていない生徒は，鉛筆とペンあわせて13本となる組み合わせを考えて，式に代入し値段を計算するという方法は分かっていたが，時間が足りなかったようであった。10分という時間では自力解決の時間が短すぎたことは反省すべきである。その中で，この問題をすぐに解決していた生徒が2人いた。その生徒に理由を尋ねると，

C「全部鉛筆を買ったと考えると，40×13＝520円で，差額が670－520＝150円となり，150÷30＝5，13－5＝8，鉛筆は8本。」と答えた。鶴亀算の考えを用いていた。もう一人の生徒も同じ考えだった。これらの生徒に鶴亀算を知っているか聞いてみたが知らないということだった。

問題(3)を時間内に解くことができていたのは，4人だった。そのうち2人は問題(2)を鶴亀算の方法で解いた生徒であった。残る2人のうち1人は，ペンを40本買ったとして差額を考える鶴亀算の方法で解いていた。残りの1人の解法を紹介する。

鉛筆20本ペン20本と考えると，40×20＋70×20＝2200円となり，1990円を超えるので，鉛筆を多くしなければならない。鉛筆を25本ペンを15本と考えると，40×25＋70×15＝2050円となり，1990円を超えるので，鉛筆を多くしなければならない。40×30＋70×10＝1900円となり，1990円より少ないので，鉛筆を少なくしなければならない。‥‥。これを繰り返し，鉛筆27本ペン13本という答えを見つけていた。いわゆる，はさみうちの原理を用いていた。この3人には，問題(4)のオリジナル問

題作りに取りかからせた。

自力解決している生徒は少なかったが時間の都合もあり，共同解決に取りかからせようとした。しかし，自分で解くことに夢中になり，なかなか話し合いを始めようとはしなかった。生徒はそれまで自分で考えた方法（鉛筆とペンの本数の組み合わせから解答を求める方法）で，しかも，自力で解決したいという思いが強いようだ。そこで，近くの人と相談しても，自力で解決してもよいことを伝えしばらく待った。しかし一部の生徒を除いては，鉛筆とペン40本の組み合わせから，答えを求めようとしていたので，なかなか解答が得られない様子だった。

そこで，クラス全体で，問題(1)(2)の答えだけを簡単に確認し，問題(3)について

Ｔ「問題(3)は面倒なので，なにか今まで学習したことが使えませんか。」と投げかけた。すると，

Ｃ「xを使う。」や，Ｃ「方程式。」という声が数人から聞こえてきた。

しかし，そう答えた生徒のワークシートを見ても方程式を用いて答えを求めようとはしていなかった。方程式を利用するよりは，少々面倒でも，問題(1)(2)と同じ方法で組み合わせを考える方が生徒にとって考えやすく身近に感じられたのであろう。そこで，

Ｔ「答えを出すのに苦労している人が多いようなので，この問題に方程式を利用したいと思います。」と方程式を利用することを宣言し，クラス全体で方程式の立式を考えていくことにした。10分強の時間では答えを出せない生徒も多数いたので，答えを知りたいという思いからか真剣な態度が見受けられた。

Ｔ「求めたいものは何ですか。」と発問すると，

Ｃ「鉛筆の数。」と一斉に声が上がった。

Ｔ「鉛筆をx本買ったとします。ペンは何本買いましたか。」と尋ねると，

Ｃ「y本。」，Ｃ「・・・」困っている様子だったので，

Ｔ「今まで学習してきた方程式では文字は何種類でてきましたか。」

Ｃ「1種類。」

Ｔ「ペンをy本とするとxとy文字が2種類でてくることになります。文字が2種類でてくる方程式はまだ勉強していません。ペンの本数をxを使って表すことはできませんか。」こう教師が話した後，下のような板書をし，ペンの本数をxを使って表す方法を考えさせた。

鉛筆をx本買うとする。

	鉛筆	ペン	合わせて
本数	x本	（　　　）本	40本

暫くして，

Ｔ「わかった人。」挙手を求めると，半数くらいが手を挙げた。そのうち一人を指名すると，

Ｃ「$(40-x)$本です。」と答えたので，それでよいことをクラス全体で確認した。次に，

Ｔ「鉛筆x本の値段，ペン$(40-x)$本の値段を表す式　はどうなりますか。」と発問し，図の下に代金を表す式を書くよう指示した。

鉛筆をx本買うとする。

	鉛筆	ペン	合わせて
本数	x本	（　　　）本	40本
代金	$40x$円	$70(40-x)$円	1990円

机間指導をしてみると多くの生徒が正しい式を書けていた。「文字と式」の単元で，この手の問題には慣れていたと考えられる。そこで，合計金額が1990円であることを確認し，

Ｔ「上の図を見て，方程式がつくれませんか。」と発問し，式を考えさせた。暫くして挙手を求めると10人ほどの手が挙がったので，一人指名すると，

Ｃ「$40x+70(40-x)=1990$です。」と答えた。

Ｔ「同じ式になった人。」と聞いてみると，多くの生徒の手が挙がった。自分の考えを全体の前で発表するのには勇気がいるということが伺える。

生徒が立式した方程式が正しいことを全体の前で確認して，方程式を解くように促した。机間指導をしながら，半数程度が解き終えたぐらいで，早く解き終えた生徒一人に板書するように指示した。

$$40x+70(40-x)=1990$$
$$40x+2800-70x=1990$$
$$40x-70x=1990-2800$$
$$-30x=-810$$
$$x=27$$

上のように板書したので，1行ずつ見ていき，x＝27になることを確認した。そこで，方程式の解が問題の中でどのような意味を持つか理解しているか確認したいという思いから，

Ｔ　「x＝27の27というのは何のことですか。」と質問してみた。ぼそっと小さい声で，

Ｃ「鉛筆の数」と答える生徒が数名いた。教師の問い方があまりよくなかったという反省も私自身の中にはある。

Ｔ「では，ペンは何本買ったことになりますか。」と尋ねると，次は先ほどよりも自信のある声で，

Ｃ「13本。」と答えてくれた。そこで，

Ｔ「なぜ13本と分かりましたか。」と質問すると，

Ｃ「40－27＝13，だから13です。」と返してくれた。

Ｔ「鉛筆27本ペン13本という答えは正しいのですか。」とわざと尋ねてみた。一瞬困った顔をする生徒もいた。そこで，

Ｔ「鉛筆27本ペン13本が正しいことをどうやったら確認できますか。」と質問したら，

Ｃ「鉛筆1本40円ペン1本70円なので，代金を計算すればいい。」という答えが返ってきた。そこで，下のように板書しながら，答えの確認を行った。

40×27＋70×13

＝1080＋790

＝1990　　　　答え　鉛筆27本

答えの確認の後，方程式を利用する良さを強調するため，

Ｔ「もし鉛筆とペン合わせた本数と代金を色々と変えた問題をだしたとしたら，組み合わせを考えて計算していき答えを求める方法と方程式を利用するのではどちらが便利だと思いますか。」

Ｔ「組み合わせを考える方がいいと思う人。」

数人しか手が挙がらない。

Ｔ「方程式がいいと思う人。」

多数手を挙げる。どうしてそう思ったか尋ねると。

Ｃ「組み合わせを考えるのは計算が面倒だから。」

Ｃ「本数が変わっても，同じ式で，一発で答えが求められるから。」といった答えが返ってきた。方程式のよさについて少しは考えることができた場面である。

この後，自力で解決していた生徒の考えを発表させていった。まずは，はさみうちの原理で考えた生徒に発表させた。

Ｃ「鉛筆20本ペン20本と考えると，40×20＋70×20＝2200円となります。1990円を超えるので，鉛筆の数を5本増やして，鉛筆25本と考えると，40×25＋70×15＝2050円となり，1990円を超えるので，まだ鉛筆を多くしなければなりません。こんな計算をしていったら鉛筆27本ペン13本という答えを見つけることができました。」

この説明の後，組み合わせを全て考えるのではなくて，要領よく探せていることを教師が補足した。次に，鶴亀算の方法を考えていた2人に板書させ，説明させた。

40×40＝1600

1990－1600＝390

70－40＝30

390÷30＝13

40－13＝27　　鉛筆27本

70×40＝2800

2800－1990＝810

70－40＝30円

810÷30＝27　　鉛筆は27本

これらの発表を聞いて，「おー。」という歓声が起こった。

Ｔ「2人の考えは似てるけど，どこが違うか分かりますか。」と発問した。

Ｃ「全部鉛筆と考えるか，ペンと考えるか。」という声が聞こえてきた。

最後に，全部ペンと考えた方法と，方程式を利

用した方法を丸で囲み，
Ｔ「全部ペンと考えた方法と方程式を利用した方法を見て気づくことがありませんか。」と発問した。すると1人の生徒が「わかった。」とつぶやいたので，指名すると，
Ｃ「方程式の3，4行目と同じになっている。」と答えたので，方程式の3，4行目を指しながら，左辺は鉛筆とペン1本あたりの差額を求める式になっていて，右辺は合わせた代金と全てをペンと考えたときの代金との差額となっていることを説明し，方程式も同じ計算が出てくることを確認した。最後に，本時だされた多様な解法についてふり返って授業を終えた。問題(4)に触れる時間はなかった。

今回の研究授業の考察を行う。導入で生徒に問題の概要を理解させ，数値を変化させた問題を与えたことで，生徒が自分のペースで自分なりの方法で問題を解決していった。このことは，生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営みを行ったといえよう。

特に，鉛筆とペンの組み合わせから適当に計算して答えを求めるのではなく，はさみうちの原理を用いたり，鶴亀算の方法で解答を求めたことは，「数学的活動」のア「既習の数学を基にして，数や図形の性質などを見いだす活動」の《既習のことを確定的，固定的に見ないで，新たな課題を見いだしてそれを解決し，発展的，創造的に考える活動》[1）]や《既習の数学的な見方や考え方が活用されるだけでなく，新たなものに気づいたり生み出したりすること》[1）]ができたと考えられる。

さらに，今回方程式を利用した方法だけでなく，多様な方法を見いだし伝え合ったことは，「数学的活動」のウ「数学的な表現を用いて，自分なりに説明し伝え合う活動」の《伝え合うことにより，お互いの考えをよりよいものにしたり，一人では気付くことのできなかった新たなことを見いだしたりする機会が生まれることを実体験できるようにする。》[1）]が実現できたと考えてよいであろう。

今回の研究授業の反省は，自力解決の時間が不足してしまったことと，「方程式の利用」の場面で授業したのであるが，生徒の多様な考え方を尊重したため，方程式としての扱いが薄かったように感じることである。「方程式の利用」であることを強調するために，この授業の後，方程式を利用することの必要性やよさを実感できる授業を行う必要がある。

また，「鉛筆をｘ本買ったとします。ペンは何本買いましたか。」と尋ねたら，「ｙ本。」という返事が返ってきた。授業中はその意見をそこで切ってしまったが，辺の本数をｙ本とすると以下のような2つの式を作ることができる。

$$x + y = 40$$
$$40x + 70y = 1990$$

それを授業の最後にでも紹介することで，連立方程式につながるという発展的な取り扱いを示すことができたはずである。さらに，この授業では鉛筆1本40円ペン1本70円を固定して考えさせたが，この数値を変化させることで，鉛筆の本数を求めるパターンを一般化させ，そのことも探求させることもできたはずである。このように，発展性やパターンの探求について授業中に取り上げることができなかったことは反省点であるし，そういった発展性やパターンをもっと取り上げるような授業の実現ができれば，「数学的活動」の充実だけでなく「本質的学習環境」としての授業となり得たと考える。

このように，いくつかの反省が残ったものの，「本質的学習環境」を参考にした教材開発を行い，教師による機械的な教え込みではなく，「数学的活動」の充実に向けた授業が展開できたことは有意義であった。

5．おわりに

本稿では，第一に，ヴィットマンの論文をもとに「本質的学習環境」の概念及び「数学的活動」の充実に向けた教材開発の方策について明らかにした。第二に，「数学的活動」の充実に向けた授業の方策を基にして中学校1年生の「方程式の利用」の教材開発を行った。第三に，そこで開発した教材をもとに研究授業を行い，授業を分析することで，「数学的活動」の充実に向けた授業とな

ることを確認した。

現場では「数学的活動」という理念は理解できていても，どうすれば実現できるのかという具体的な方法はまだ十分に確立されておらず，模索しているというのが私の実感である。今回の「本質的学習環境」を参考にした教材開発のあり方は「方程式の利用」だけでなく，様々な教材に応用できそうである。そのことによって，「数学的活動」の充実が図られるのであれば，日本の数学教育にとっても意義深いものとなろう。

今後の課題は，他の単元や教材において「本質的学習環境」の概念に基づいた教材開発や研究授業を行い，その有意義性を検証するなど実践的研究を行っていくことである。

【引用・参考文献】

(1) 文部科学省，『中学校学習指導要領解説数学編』，教育出版株式会社，2008，pp.1-142.

(2) 藤井斉亮/俣野博　他，『新しい数学１』，東京書籍株式会社，2012，p.93.

(3) E.Ch.Wittmann, The Alpha and Omega of teacher education organizing mathematical activities, in Holton et al.(Eds), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level,* An ICMI Study, Kluber Acdemic Publischer, 2001, pp.539-552.

(4) E.Ch.Wittmann, Mathematics education as a "design science", *Educational studies in Mathematics,* 1995, pp.355-374.

(5) E.Ch.Wittmann , "Developing mathematics education in a systemic process", *Educational Studies in Mathematices,* 2002, 48/1, pp.1-20.

(6) E.Ch.Wittmann, Teaching unit as the integrating core of mathematics education, *Educational Studies in Mathematics,* 15, 1984, pp.353-374.

(7) 國本景亀/山本信也，『算数・数学　授業改革から教育改革へ』，東洋館出版社，2004，pp.120-140.

(8) 山本信也，『生命論的デザイン科学としての数学教育学の課題と展望』，熊本日日新聞情報文化センター，2012，pp.1-174.

(9) 平林一榮，「教授単元の思想」，『CREAL生きる力を育む算数授業の創造』，ニチブン，第4巻，1999，pp.205-210.

(10) 平林一榮，『算数・数学教育のシツエーション』，広島大学出版研究会，1975，pp.1-70.