

臨界ノズルによる実在気体の 質量流量計測に関する研究

2014 年 3 月

佐賀大学大学院工学系研究科
システム創成科学専攻

長尾 淳司

目次

第 1 章 序論	1
1.1 従来の研究.....	4
1.1.1 流出係数の予測.....	4
1.1.2 無次元質量流量に及ぼす背圧比とレイノルズ数の影響.....	6
1.1.3 質量流量に及ぼす背圧変動の影響.....	8
1.1.4 流出係数に及ぼす実在気体効果の影響.....	10
1.2 本研究の目的.....	13
1.3 本論文の構成.....	15
第 2 章 気体の流量測定の概略と理論	16
2.1 気体の流量測定方法の分類.....	16
2.2 臨界ノズルの測定原理.....	20
2.2.1 臨界ノズルの測定原理.....	21
2.2.2 レイノルズ数と質量流量の関係.....	21
2.2.3 無次元質量流量.....	22
2.3 熱物性値.....	25
第 3 章 数値計算法	27
3.1 基礎方程式.....	27
3.1.1 実在気体効果を考慮した軸対称圧縮性流れの基礎方程式.....	27
3.1.2 状態方程式.....	31
3.1.3 実在気体の状態方程式の変形.....	36
3.1.4 実在気体の比熱の算出.....	41
3.1.5 実在気体の音速の算出.....	47
3.1.6 実在気体の状態量の比較.....	50
3.2 基礎方程式及び状態方程式の無次元化.....	52

3.3	基礎方程式の座標変換.....	71
3.4	数値解析手法.....	81
3.4.1	3次精度 MUSCL 型 TVD スキーム.....	81
3.4.2	二次元粘性問題への適用法.....	81
3.5	フローチャート.....	84
第4章	無次元質量流量に及ぼす背圧比とレイノルズ数の影響	85
4.1	計算手法及び条件.....	85
4.2	格子依存性.....	87
4.3	無次元質量流量に及ぼす背圧比の影響.....	88
4.4	臨界背圧比に及ぼすレイノルズ数とノズル形状の影響.....	89
4.5	まとめ.....	90
第5章	ノズル内の質量流量に及ぼす背圧変動の影響	91
5.1	計算手法及び条件.....	91
5.2	ノズル内の質量流量に及ぼす背圧変動の振幅の影響.....	93
5.3	ノズル内の質量流量に及ぼす背圧変動の周波数の影響.....	99
5.4	まとめ.....	100
第6章	高レイノルズ数流れの流出係数に及ぼす実在気体効果の影響	101
6.1	計算手法及び条件.....	101
6.2	水素の流出係数に及ぼす状態方程式の影響.....	103
6.3	流出係数に及ぼすガス種の影響.....	106
6.4	まとめ.....	115
第7章	結論	117
第8章	謝辞	120
	参考文献.....	121

Nomenclature

A	: Cross-section area, m^2
C	: Coefficient of amplitude, -
C_d	: Coefficient of discharge, -
c_p	: Specific heat at constant pressure, $J/(kg \cdot K)$
c_v	: Specific heat at constant volume, $J/(kg \cdot K)$
D	: Diameter, m
\mathbf{E}, \mathbf{F}	: Inviscid flux vector, -
E_t	: Total energy per unit volume, J/m^3
H_1	: Source term for axisymmetry, -
H_2	: Source term for turbulence, -
h	: Specific enthalpy, J/kg
J	: Jacobian, -
k	: Turbulent kinetic energy, J/s
M	: Mach number, -
\dot{m}	: Mass flow rate, kg/s
p	: Pressure, Pa
r	: Radius of curvature, m
R	: Gas constant, $J/(kg \cdot K)$
\mathbf{R}, \mathbf{S}	: Viscous flux vectors, -
Re	: Reynolds number
T	: Temperature, K
t	: Time, s
\mathbf{U}	: Conservative vector, m/s

u, v	: Velocity components, m/s
\bar{v}	: Specific volume, m ³ /kg
x, y	: Cartesian coordinates, m
Z	: Compressibility factor, -

Greeks

ε	: Dissipation rate, J/kg
γ	: Ratio of specific heat, -
κ	: Thermal conductivity, W/(m · K)
μ	: Molecular viscosity, Pa · s
ρ	: Density, kg/m ³
τ	: Shear stress, Pa
θ	: Angle of attack, °

Subscripts

0	: Stagnation point
b	: Back pressure region
c	: Critical point
cri.	: Critical state
e	: Nozzle exit
t	: Turbulent
th	: Throat
theo	: Theory

第1章 序論

近年、半導体産業における CVD 法[1]を用いた場合の気体流量の測定や環境計測における大気汚染物質の濃度測定、医療分野での医療用ガスの測定[2]などで、微小質量を正確に測定する必要性が増している[3][4][5]. このような分野において使用されている流量計の一つに熱式流量計がある. 熱式流量計の校正には基本的に窒素が使われ、測定する気体が窒素以外の場合には補正係数を掛けることで補正を行う[3]. しかしながら、この補正係数には物理的な意味はないため、精度の保証は難しいと考えられる. そこで、任意の微小気体を高精度で測定できる流量計の開発が必要となっており、その一つとして臨界ノズル[6]の使用が検討されている.

日本では 2015 年からの一般ユーザーへ向けた燃料電池車(Fuel Cell Vehicle)及び水素ステーションの普及へ向けた取り組みが行われており[7][8][9][10], 水素の製造技術の開発[11][12][13][14][15][16], 燃料電池車の開発[17][18]及びそれに伴う研究や実証試験, 技術開発が行われている[19][20][21][22][23]. 現時点で想定されている車載タンクへの水素の充填圧力は 70 MPa と言われ、水素ステーションも約 90 MPa まで対応したステーション[24]の建設が進んでおり、70 MPa という超高圧に耐えうる技術基準の策定[25][26][27][28], 法規制の見直し[29][30]及び実証試験[31][32][33]も行われている. そのため、このような超高圧条件にも耐えられる流量計の早期開発も求められている. 現在、水素ステーションで車載タンクへ供給される水素の質量流量を測定するのに使用する流量計はコリオリ式流量計 (Fig. 1.1)であるが、この流量計は測定原理上、可動部を持つため、長期安定的に使用できるかについては疑問が残る[34].

そこで、本研究では流量計の一つとして提案されている臨界ノズル[6]について調査する. 臨界ノズルは、コリオリ式流量計のような可動部を持たないため、長期安定的な質量流量の測定が可能であると考えられる. しかしながら、臨界ノズルを将来的な取引メーターと

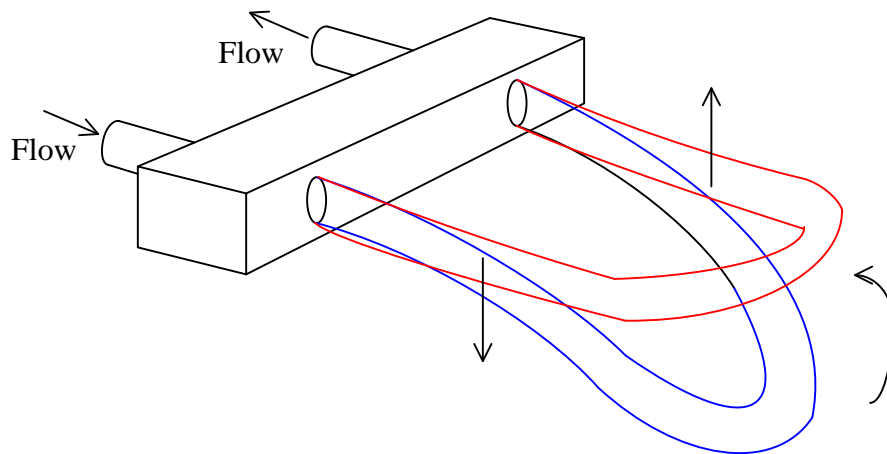


Fig. 1.1 Coriolis flow meter

して利用するには高精度な質量流量の測定が求められるため詳細な研究が必要となる．産業技術総合研究所では、これまで臨界ノズルを国家標準として整備し、低圧条件下での様々な気体の流量のデータ蓄積を行ってきた[34]．現在は、FCV をターゲットとした水素充填用流量計、もしくは充填用流量計の校正装置としての実用化を目指している[34]．しかしながら、高圧条件下でのデータ蓄積は十分とは言えず、今後も多くの実験的検証が必要であると考えられるが、コストや規制等を考慮すると 70 MPa という超高圧条件下で水素を扱った実験を十分に行えるとは考えにくい．そこで、窒素等の水素以外の代替流体を用いることが考えられるが、そのためには水素の流量特性との関連性を詳細に調べることが必要となる．

ところで、ノズル内流れが定常等エントロピー流れである場合、ノズル出口下流の背圧が十分低いと、最小断面積(ノズルスロート)の位置において流れはチョークし、質量流量は最大値に達する[6][35][36][37]．流れがチョークする際の圧力は臨界圧力と呼ばれ、この圧力より低い場合には、質量流量は一般的にノズルスロート下流の圧力条件により変化することはない．よって、流れがチョークしている場合の質量流量は、上流のよどみ点状態の温度、圧力、ノズルスロートの直径、および比熱比の関数として与えられる[35]．この原理を用いてノズルの質量流量を測定する装置が臨界ノズル[6] (Fig. 1.2)である．臨界ノズルは

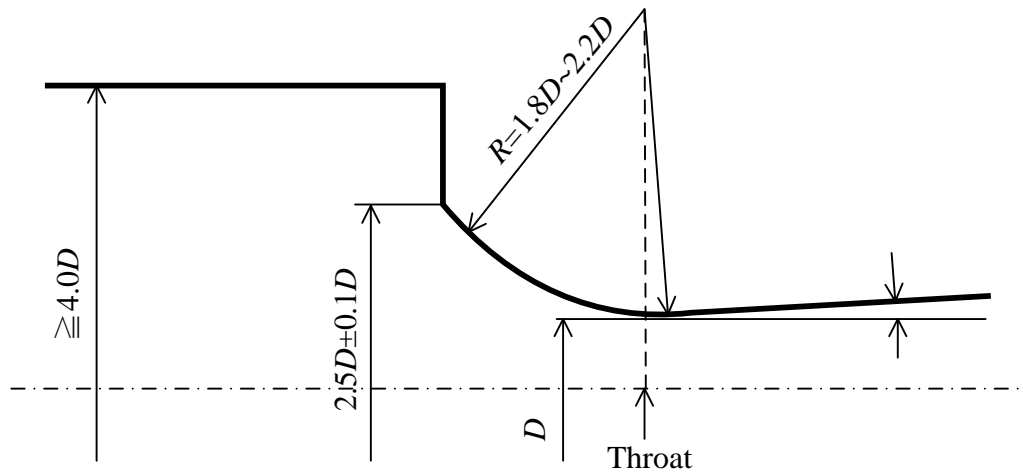


Fig. 1.2 Schematic diagram of toroidal throat Venturi nozzle (ISO9300)

工業製品としては、ソニックノズル[38][39]や音速ノズル[40]とも呼ばれている。しかし、臨界ノズルの場合、実際の質量流量と理論的に算出された質量流量の間には補正係数が必要であり、その補正に使われる係数である流出係数が重要なパラメーターとなる。

以上の観点から、本研究では数値流体力学(Computational Fluid Dynamics)を用いた解析コードを開発し、臨界ノズル内の流れ場の解析を行う。CFDを用いて解析を行うことは、試作と実験にかかるコストや時間を削減できることから効率的なノズルの設計が可能となり、水素ステーションの建設や運営にかかるコストを大幅に削減できるため、工学的に重要な研究課題であると考えられる。

1.1 従来の研究

本章では，従来の研究における問題点を明らかにし，本研究の目的を明確にする．

1.1.1 流出係数の予測

これまで，ノズル内流れの流出係数の予測は様々な解析的な手法により行われてきた [41][42][43][44][45][46]．馬杉[41]は，試料中の二酸化炭素の含有率を知る手法として臨界ノズルを提案し，その流量について理論的な説明を行っている．しかしながら，境界層の影響や流れの2次元性の影響については議論されておらず，実際の流量を物理的に予測できているとは言えない．Hall[42]は，スロート近傍での流れに着目し，ノズル形状の影響を考慮した流出係数の予測式を提案した．その結果，壁面の曲率の逆数を使い3次の項まで展開することで，これまでの手法[45][46]と比較して高精度な流出係数の予測を可能となった．Geropp[43]は，ノズル内の流れが等エントロピー流れであり，プラントル数は一定の完全気体，スロートの境界層は薄く，壁面は断熱条件を仮定し，流出係数を求めた．その結果，境界層厚さの影響を考慮することで流出係数を精度よく予測できることを示している．しかしながら，これらの解析結果は，研究に使われたノズルの旋盤による加工精度等の不確かさの影響も含まれるため，流出係数の理論的な予測法に対する信頼性が高いという証明にはなっていない．そこで，Ishibashiら[44]は加工精度による誤差を出来るだけ減らした超精密加工ノズル(High-precision nozzle)内の流出係数を測定し，Hall[42]及びGeropp[43]の手法を組み合わせた式と比較を行った．その結果，レイノルズ数が $Re > 8.0 \times 10^4$ において実際の質量流量との差の割合を 0.04% 以下で予測可能であることを示した．しかしながら，これらの流出係数の予測について 70 MPa 近傍の超高压条件下において検証された例はない．また，臨界ノズル内の流動場について CFD を用い，低レイノルズ数領域での直

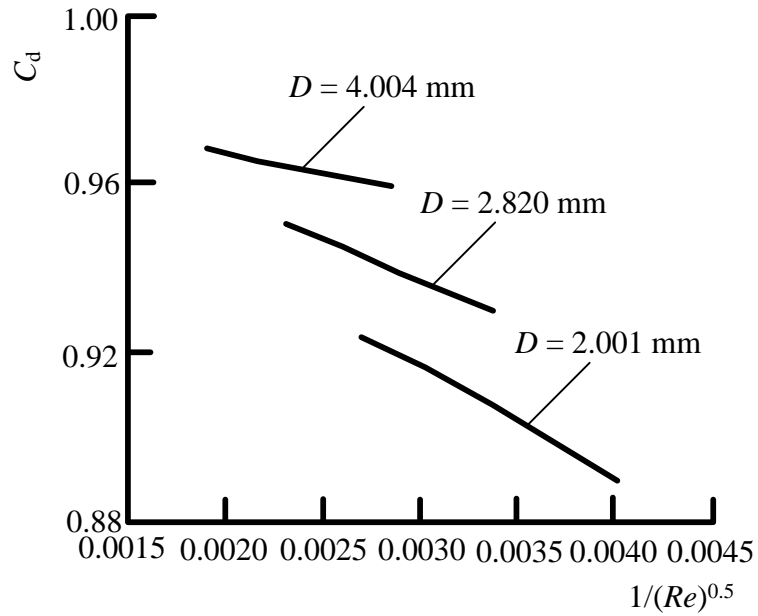


Fig. 1.3 Effect of throat diameter on coefficient of discharge [47] (Air)

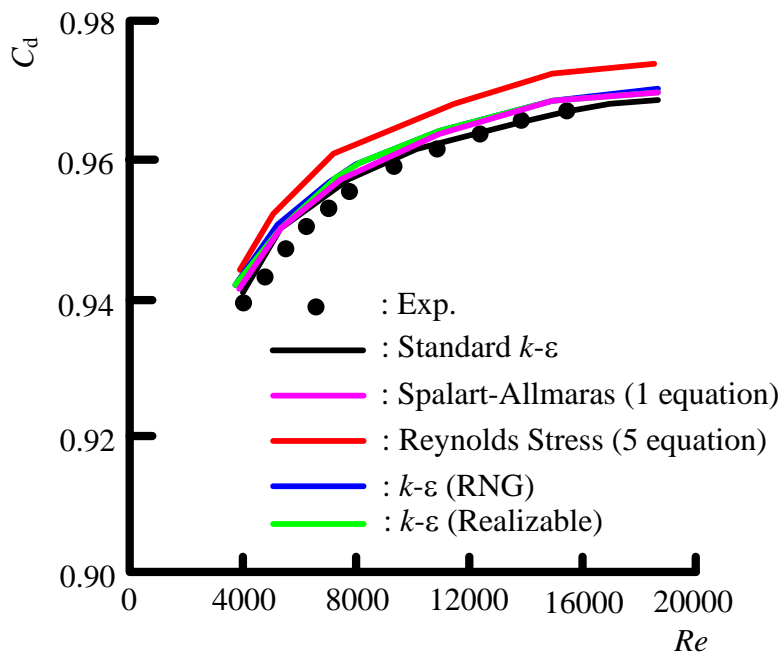


Fig. 1.4 Effect of turbulence model on coefficient of discharge [48] (Nitrogen)

径の影響[47] (Fig. 1.3)や乱流モデルの影響[48](Fig. 1.4)を調査した例は見られるが、70 MPa という超高压条件下の流動場の物性値について調査された例は少なく[49][50]、これらの研

究は商用ソフトを使用していることなどから、計算手法の詳細に関して今後の検討や改良が難しいと考えられる。しかしながら、ノズル内の高圧ガスの質量流量を予測することは、実験によって流出係数を算出する場合に必要な設計や試作によるコスト削減のためにも工学的には重要である。

1.1.2 無次元質量流量に及ぼす背圧比とレイノルズ数の影響

臨界状態を保つことができるノズル上流側の圧力 p_0 とノズル下流側の背圧 p_{b0} の比 p_{b0}/p_0 の最大値を臨界背圧比 $(p_{b0}/p_0)_{cri}$ と呼ぶ。ノズルを流量計として使用するには、流れが臨界状態となっている必要がある。そのため、測定に用いられるノズルの臨界背圧比を調べることは流出係数を調べることと同様に重要となる。また、 $p_{0,min}=p_{b0}/(p_{b0}/p_0)_{cri}$ ($p_{0,min}$: 臨界状態を保つことができる上流側よどみ点状態の圧力の下限值, p_{b0} : ノズル下流側の背圧, $(p_{b0}/p_0)_{cri}$: 臨界背圧比) の関係から、背圧が一定の場合、臨界ノズルを流量計として使用できる上流側のよどみ点状態の圧力の下限値は臨界背圧比が大きいほど背圧との差を小さくすることができる。つまり、臨界背圧比が大きいほど、臨界ノズルとして使用できる背圧比範囲が大きいということになる。このように、臨界ノズルの臨界背圧比を知ることは重要であることから、これまで数多くの研究が行われてきた[51][52][53][54][55]。

中尾ら[51]は、ISO9300 で規定されたノズル[56]の上流側をカットすることによって、レイノルズ数が 900 以下の領域において臨界背圧比が ISO 型のノズルよりも大きくなることを実験で示した。浅野ら[52]及び JIS 規格では[57]、ディフューザ一部を 10D 以上にするこ
とで、臨界背圧比を 0.1~0.3 大きくすることができることを実験により示している。また、浅野ら[52]の研究では、ある特定のレイノルズ数領域において臨界背圧比が減少するという未成熟領域について議論しており、この原因について過去の研究[53]を用いて境界層と衝撃波の干渉という観点から説明を行っている。中尾[55]及び森岡ら[34]は、5~70 MPa ま

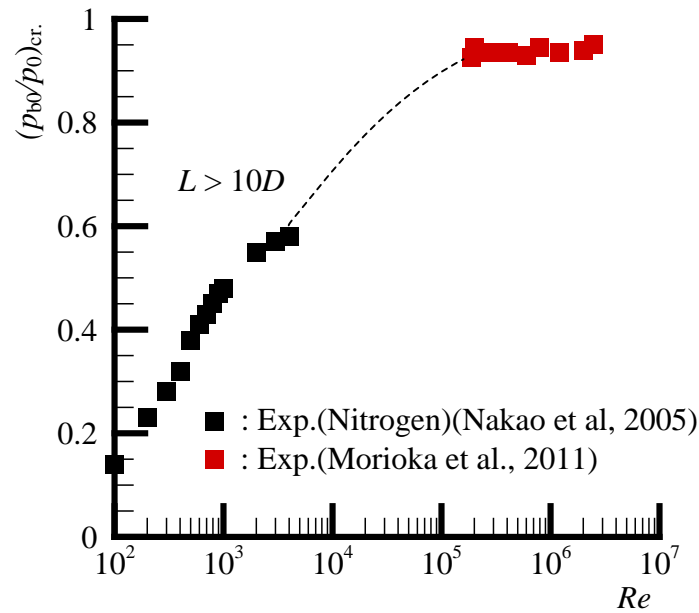


Fig. 1.5 Effect of Reynolds number on critical back pressure ratio [34][55]

での臨界背圧比を実験的に調べ、約 $Re > 3.0 \times 10^5$ において臨界背圧比が 0.93~0.95 であることがわかった(Fig. 1.5). この結果は、70 MPa 級の水素ステーションにおいて、高圧側の蓄圧器の圧力が 76 MPa あれば十分であることがわかり、昇圧に必要なエネルギーを減らし、高圧側の装置の設計圧力も大きくする必要がないため、低コストでの製造が可能であることを示している。しかしながら、これらの結果は計測に使用できる高圧水素ガス量が限られていることなどが原因[34]で、計測結果にバラつきがみられるため、十分検証できていたとは言えない。よって、さらなる検証が必要であるが、超高压条件に耐えることができる実験装置を製作することはコスト面を考慮すると簡単には行えないのが現状である。よって、シミュレーション等による高精度な検証が必要となってくる。

工業製品として各ノズルの臨界背圧比の算出は校正によって行われるが、校正装置を設計する際には臨界背圧比に合わせて装置の強度を決定する必要があり、どの程度の強度が必要なのか事前に知っておく必要がある。すなわち、シミュレーション等によって臨界背圧比を調査することが重要となってくる。

しかしながら、臨界ノズルのレイノルズ数と臨界背圧比に関して CFD を用いて超高压条件下まで調べたものは少ない。よって、工学的な観点から CFD を用いて臨界背圧比を調べることは重要な研究となると考えられる。

1.1.3 質量流量に及ぼす背圧変動の影響

近年、半導体産業や医療科学分析等の分野で小型製品の開発の必要性が増すとともに、微小質量を正確に測定する必要性が増している[3][4]。中尾ら[3][58]は、高精度な質量流量計測を行い、低レイノルズ数領域での臨界ノズルの流出係数とレイノルズ数の関係や、流出係数に及ぼす気体種の影響について調べている。その結果、レイノルズ数が低い場合の流出係数の値は、レイノルズ数に強く依存することを明らかにしている。ここで、ノズルのサイズが小さい場合、ノズル壁近傍の粘性の効果が支配的になり、質量流量は粘性の影響を大きく受けることが考えられる。Kim ら[48]は CFD を用い、臨界ノズル内流れに対する乱流モデルの影響を調べ、標準型 $k-\epsilon$ モデルを用いた場合に、流出係数と臨界背圧比を高精度で予測できることを示している。また、流出係数と臨界背圧比はレイノルズ数の関数となり、これらはノズルスロート直径に強く依存することも明らかにしている。

ところで、臨界ノズルのスロート下流側の流れ場は、衝撃波と境界層の干渉、音響波、および渦の影響によって、しばしば強い圧力変動を受けると考えられる[59][60]。低レイノルズ数領域においては、臨界背圧比以下の場合においても、この圧力変動が境界層の亜音速部を通過してノズルスロート上流側まで伝播することが考えられる。Von Lavante ら[61][62]はレイノルズ数が低い場合に圧力変動の波がスロート上流側へ伝播することを実験と数値計算を用いて示した。

一方、Kim ら[63]は、レイノルズ数が低い場合に、Von Lavante らと同様に臨界ノズル内の質量流量が変動すること、スロート近傍の音速線の位置は大きく変動し、境界層の影響

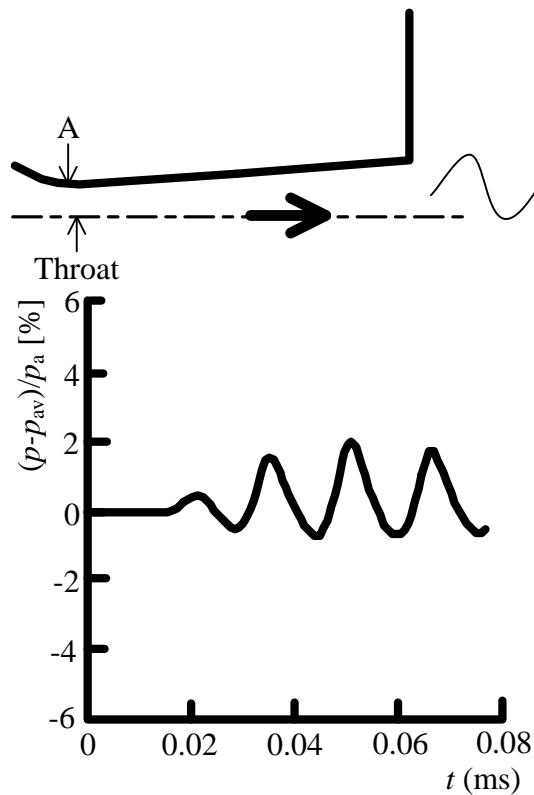


Fig. 1.6 Pressure time histories ($Re=500$) [61]

が流路壁面より離れた領域まで及ぶことを明らかにした(Fig. 1.6). しかしながら、これらの研究は作動気体に空気を用いた場合であり、水素のような他のガス種に対する背圧変動の影響についての研究は行われていない。また、背圧変動の周波数や振幅の影響に関するデータも十分であるとは言えない。

以上のことから、臨界ノズルを用いた質量流量の測定において、低レイノルズ数(低圧)領域では特殊な条件下での安定した流量測定が重要な研究課題となっており、測定時の質量流量の変動のメカニズムを詳細に明らかにする必要がある。

1.1.4 流出係数に及ぼす実在気体効果の影響

日本では 2015 年からの一般ユーザーへ向けた燃料電池自動車(FCV)及び水素ステーションの普及への取り組みが行われており[7]，現在想定されている車載タンクへの水素の充填圧力は 70 MPa と言われている．一般的に，ノズル内の流れは上流側のタンク内の圧力が上昇すると高レイノルズ数流れとなる．

ここで，ノズルスロートのレイノルズ数は以下の式で算出される[35]．

$$Re_{th} = \frac{Dp_0}{\mu_0\sqrt{R_0T_0}}\sqrt{\gamma_0}\left(\frac{2}{\gamma_0+1}\right)^{\frac{\gamma_0+1}{2(\gamma_0-1)}} \quad (1-1)$$

$D, p_0, \mu_0, R_0, T_0, \gamma_0$ はそれぞれ，スロート直径，上流側よどみ点状態の圧力，粘性係数，ガス定数，温度，および比熱比である．つまり，スロートのレイノルズ数はよどみ点状態の圧力，温度に左右される．また，

$$\sigma^* = \sqrt{\gamma_0}\left(\frac{2}{\gamma_0+1}\right)^{\frac{\gamma_0+1}{2(\gamma_0-1)}} \quad (1-2)$$

を臨界係数という[6]．

よって，式 (1-1)より，レイノルズ数が高い場合には境界層の存在による粘性の影響が小さくなるため，実際の質量流量は理論値($C_d=1.0$)へと近づくと考えられる．しかしながら，過去の研究によると，水素の高レイノルズ数領域における流出係数がノズル上流のよどみ点状態の圧力の増加とともに減少することが実験的に示されている[34][64]．しかし，この原因については明確には特定できていない．ここで，Johnson[65][66][67][68][69]は過去の研

究において、実在気体効果を考慮したスロートでの熱物性値を求めることで、臨界ノズル内の質量流量を解析的に求めた。その結果、高圧条件下では実在気体の質量流量が理想気体と大きく異なり、臨界係数が最も重要なパラメーターとなることを示した。しかしながら、森岡ら[34]はこれらの結果を使って流出係数を算出しなおしたにも関わらず、高レイノルズ数領域での流出係数はレイノルズ数の増加とともに減少してしまう結果となっており、Johnson による解析結果が十分妥当であるとは言えなかった。Mohamed ら[70]は、実在気体効果を考慮した数値解析を行い、水素タンクへ流入する際の音速、圧力、温度が理想気体の場合と比較して小さくなることを示している。Kim ら[49][50]は、解析ソフトとして Fluent, 状態方程式に Redlich-Kwong [71]を用い、実在気体効果を考慮した解析を行うことで、よどみ点状態の圧力の増加とともに流出係数が減少することを示した(Fig. 1.7)。しかしながら、商用ソフトによる解析であるため詳細な解析方法が不明であること、および流出係数の変化に及ぼす実在気体の状態方程式の影響などは十分に調べられていない。

また、これまで低レイノルズ数領域での流出係数に及ぼすガス種の影響についての研究も行われてきた[72][73][74][75]。Corpron[72]は、作動気体に H₂, Ar, He, Air および N₂ を用い、流出係数に及ぼすガス種の影響を調べている。その結果、低レイノルズ数領域での流出係数はガス種に依存しないと結論付けている。また、中尾ら[3][76]は作動気体に N₂, Ar, O₂, H₂, He, C₂H₂, CH₄, C₂H₆, C₃H₈, CO₂ および SF₆ を用い、低レイノルズ数領域の流出係数の挙動を調べている。この場合も CO₂ と SF₆ を除くと、Corpron[72]の結果と同様にガス種の影響がほとんど見られないことが示されている。しかしながら、高レイノルズ数領域(高圧)での水素以外のガス種の流出係数に関する情報は少ない。

臨界ノズルが将来的な商取引用の取引メーターとなる場合、高精度な流量測定が必要不可欠であるが、実際に使用する際に低圧から超高压領域までの流出係数を毎回算出すると、校正にかかる設備費などのコストが増加し、流量計としての実用化の大きな妨げとなる。よって、CFD を用いて 70 MPa 近傍の超高压での質量流量の測定時に発生する問題を詳細

に分析することは、水素ステーション普及に向けて大きく貢献できると考えられ、重要な研究課題である。また、水素を実際を使って校正するとなると、規制等により、各ノズルメーカーが独自に校正を行うことは難しい。そこで、窒素などの代替気体を用いた校正の可能性を調べるために、様々な気体の高圧特性を調べることは重要である。

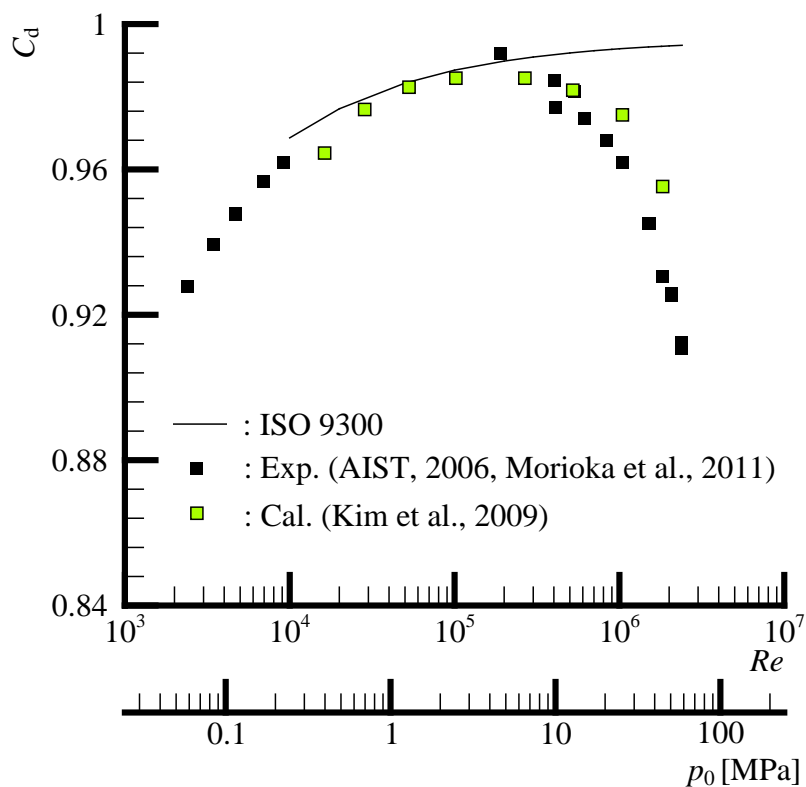


Fig. 1.7 Coefficient of discharge

1.2 本研究の目的

本論文では、従来の研究で未だに明らかになっていない部分を考慮した上で CFD コードの開発を行い、以下に述べる目的に従い臨界ノズル内の流れ場に関する計算を行った。

まず、臨界ノズルを流量計として使用するには流れが臨界状態に達している必要がある。しかしながら、臨界背圧比はスロートのレイノルズ数に大きく依存すると考えられる。そこで、臨界ノズルとして作動する条件を明確にするために、

1. 作動気体に水素を用い、 $Re=6.0 \times 10^2 \sim 1.1 \times 10^6$ の範囲での無次元質量流量とレイノルズ数の関係を調べる。
2. $Re=6.0 \times 10^2 \sim 1.1 \times 10^6$ の範囲でレイノルズ数と臨界背圧比の関係を調べる。
3. ノズルスロットから出口までの長さが臨界背圧比に及ぼす影響について調べる。

ところで、境界層の影響が大きくなる低レイノルズ数領域では、衝撃波と境界層の干渉、音響波、および渦の影響によって、強い圧力変動が発生し、臨界状態であるにも関わらず、その影響がスロットより上流側へ伝わり、質量流量が変動する可能性があることがわかっている[59][60][62][63]。そこで、下流側で発生した圧力変動の影響を基礎的に調べる手法として、ノズル出口下流側の背圧を任意に変動させ、背圧変動のスロット上流への伝播と質量流量の変動の関連性のメカニズムを調べるために以下のことを調査する。

4. 作動気体に水素を用い、レイノルズ数を $Re=5.0 \times 10^2 \sim 1.0 \times 10^5$ まで変化させ、ノズル下流側からの圧力変動の波の振幅と周波数の組み合わせがスロット部の質量流量の変動の有無と変動の大きさに及ぼす影響を調べる。

さらに、超高圧条件下での水素の流出係数の挙動をシミュレーションできる CFD コードの開発を行い、流出係数がレイノルズ数の増加に伴い減少する[34]原因を明らかにするために、

5. レイノルズ数を $Re=1.0\times 10^3\sim 1.0\times 10^7$ の間に設定し、実在気体の状態方程式の違いが流出係数の挙動に及ぼす影響を調べ、超高圧水素の流出係数の予測に最適な状態方程式を調べる.

また、

6. 窒素とヘリウムを作動気体として用い、高圧での流出係数の変化の様相を調べ、水素との差異を明らかにすることで、代替流体を用いた校正の可能性について調べる.

1.3 本論文の構成

本論文は、上述の目的に基づいて数値的に研究されたものであり、第1章から第7章までの各章で構成されている。以下に各章の概要について述べる。

第1章では、序論として過去の研究で明らかになっていない部分を明確にし、本研究の目的を述べる。

第2章では、臨界ノズルによる質量流量の測定原理を詳細に説明する。また、レイノルズ数と質量流量の関係性や考察するにあたって必要な理論の説明を行う。

第3章では、本研究で使用した基礎方程式を示し、乱流モデル、本研究に適用した離散化手法等の説明を行う。また、実在気体効果を考慮した状態方程式から比熱および音速の式の導出を行う。

第4章では、レイノルズ数が無次元質量流量と臨界背圧比に及ぼす影響についての結果を示し、考察を行う。

第5章では、低レイノルズ数流れの質量流量に及ぼすノズル下流の圧力変動の影響についての結果を示し、考察を行う。

第6章では、高レイノルズ数流れの流出係数に及ぼす実在気体効果の影響についての結果を示し、考察を行う。

第7章では、結論として第4章～第6章までの結果をまとめる。

第2章 気体の流量測定の概略と理論

本章では，臨界ノズルを用いた質量流量の測定原理，レイノルズ数と理論質量流量の関係を一次元理論を使って示す．

2.1 気体の流量測定方法の分類

将来の代替エネルギーの一つとして水素が注目されており，水素ステーションやFCVの普及に向けた研究開発が急速に進められている[83]．このような研究開発を行う際には，水素の使用量を調べる場合や，燃料電池の性能評価を行う場合など様々な場面で流量の測定が必要となる．また，水道メーターやガソリンメーターなど，将来の取引メーターとして使用する場合には流量の測定誤差が取引価格に直結するため，高精度な測定が必要不可欠となる．よって，流量計に関する研究は重要な研究分野の一つとなっている．

本節では，気体の流量測定に使用される流量計の例を挙げ，それぞれの長所と問題点を述べる．

1) コリオリ式流量計

コリオリ式流量計は，コリオリ力を利用した流量計である[83]．流体の移動方向に対して垂直に加速度が働く場合コリオリ力は発生する(Fig. 1.1)．U字型配管を振動させ，配管の内部を流体が流れると質量流量に応じたコリオリ力が流体に作用する．コリオリ力が往路と復路で上下逆向きに働く際に生ずる配管のねじれを利用し，ねじれ角と質量流量が比例関係にあることから質量流量の測定を行っている．最近では水素ステーションでの使用が検討されている．

コリオリ式流量計は、急激な圧力や温度変化などがない条件下では優れた性能を発揮することがこれまでの研究でわかっており、脈動流や高圧流体への応用に向けた研究も行われている。

しかしながら、外部からの振動の影響を受けやすく、ねじれ角のわずかな変化を測定することになるので、ゼロ点のドリフトが問題となる[84]。また、水素ステーションで長期間、取引メーターとして使用することを考慮すると、可動部を持つコリオリ式流量計は安定的な測定の面で不安が残る。

2) 渦流量計

渦流量計は、流体の振動現象を利用した流量計である[83]。流れの中にある物体の後方に生じる渦の発生周波数が流速に比例することを利用したもので、渦の発生に伴って生じる局所的な流速や圧力変化を検出し、渦発生周波数が測定される。渦流量計はレイノルズ数が同じであれば、流体の種類に依存しないという特徴を持つため、複数のガスの流量を測定したい場合に便利である。流量の測定範囲は渦放出の規則性・再現性が保たれる領域が目安となっており、レイノルズ数で $2 \times 10^3 \sim 10^5$ の範囲になる。低温状態や湿分を含む気体、液体などでも利用可能である。

渦流量計の問題点としては、安定的な渦を発生させるためには、流量計の流入部の流速分布を整える必要がある。また、低流速では渦発生が不安定になる流体の振動現象を利用しているので、機械的振動のある場所に取り付けることができないことや、脈動流の測定には適さないなどの制約がある。さらに、水素ステーションでの使用を考えると、レイノルズ数が 10^5 以上となることから、再現性の面で不安が残る。

3) 超音波流量計

超音波流量計は、流れの上流側と下流側に取り付けられた超音波センサから超音波を交互に送受信し、流れ方向とその逆方向の伝播時間の差が超音波経路上の平均流速に比例することを利用した流量計である[83]。超音波流量計の性能は、超音波伝播時間演算の処理速度、精度、分解能に依存して決まる。最近では、信号処理技術と高速回路技術の進歩に伴って超音波流量計の性能が向上し、高い分解能で計測できる製品が登場してきており、流量計測の分野で注目されている。

また、超音波流量計は、可動部がなく、応答性良いことや、圧力損失が小さいこと、測定レンジが広いことなどの利点を多く持つ。

水素の場合、空気に比べて密度が約 1/10 程度と小さいため、音の減衰が大きく、さらに音速が約 4 倍あるため、高い測定精度が必要であり、音響的な感度の点で超音波流量計の使用は不向きであると考えられている。しかしながら、従来の超音波センサの構造を見直すことで、超音波検出感度を向上させた製品も実用化されている。また、応答性が速いため非定常流の流量計測にも利用されている。

4) 熱式流量計

熱式流量計は、熱の移動を利用した流量計で、加熱された配管の温度分布を測定することにより、もしくは流体の温度をある一定の温度に上げるために必要なエネルギーを測定することにより質量流量が求められる[83]。ヒーターや温度センサの取り付けはいろいろな方法が提案されているが、大きく分けると、バイパス管を加熱する方式、直接主流管を加熱する方式、加熱センサを管の中に直接挿入する方式がある。流体を効率的に加熱し、応答性を早くするために、バイパス管を使う方式が最も多く用いられる。

コリオリ式流量計がその性質上大きな流量計測に向いているのに対して、熱式流量計は小さな流量の計測に向いている。コストは他の方式の流量計よりも安く、最近では超小型のフィルムセンサが開発され、課題であった応答性を克服した熱式流量計が実用化されている[83]。

5) 容積式流量計

容積式流量計は流量を直接的に測定する流量計で、流量計の内部に組込まれた回転子が上流側と下流側の圧力差によって作動する構造となっている[83]。

流量計上流側の速度分布の影響が小さいため、曲り管に近接して設置できることや長期間にわたって信頼性の高い測定ができることなどが挙げられる。

しかしながら、回転子と筐体間の隙間を通過してわずかに漏洩し、漏洩量は流体の種類、粘性係数、流量計の入口側と出口側の圧力差などによって変化するため、測定流体を使って校正を行う必要がある。また、回転子の慣性があるため、非定常流の流量計測には向かない。さらに、流体中に固形物などが含まれる場合には回転子が損傷する恐れがあるため、フィルタで取り去る必要がある。

6) 臨界ノズル

臨界ノズル(音速ノズル)[6]は、流れのチョーク現象を利用した流量計で、測定部上流の圧力と温度を測定することで質量流量を求めることができる。実際の質量流量は境界層の影響などにより、理論よりも小さくなるため、あらかじめ決められた流出係数(実際の質量流量/理論質量流量)を理論質量流量に掛けることで算出する[34]。また、測定原理上、可動部を持たないため長期間使用しても安定的に使用できると考えられている。

産業技術総合研究所では、低圧域(~0.7 MPa)での各種気体の流量測定を行うことで流出係数などのデータを蓄積しており、高精度での測定が可能であることが確認されていることから、特に校正装置として既に実用化されている分野もある[87]。しかしながら、FCVへの充填時の超高圧条件下(70 MPa)における高精度での質量流量測定の可否については不安な面が残る。また、現時点では流出係数を求めるにあたり、それぞれの圧力領域で校正を行う必要があるため、費用が嵩む可能性が考えられる。さらに、流量計として使用するには流れが音速以上でなければならず、臨界背圧比以下になるように上流もしくは下流側の圧力を調整しなければならないという制約がある。

2.2 臨界ノズルの測定原理

ノズル内の流れが定常等エントロピー流れである場合、ノズル出口下流の背圧が十分低いと、最小断面積(ノズルスロート)の位置において流れはチョークし、質量流量は最大値に達する。流れがチョークする際の圧力比は臨界背圧比と呼ばれ、この圧力より低い場合には、一般的に質量流量はノズルスロート下流の圧力条件により変化することはない。

ところで、よどみ点状態の圧力 p_0 と背圧 p_{b0} の比 p_{b0}/p_0 がある値(臨界背圧比)を超えると、流路の最小断面積部においてチョーク現象が起こり、質量流量が最大となる。流れがチョークすると、背圧の変動は音速面を超えて上流に伝わることはなく、よどみ点状態が一定に保たれる限り、流れの質量流量は一定となる。臨界状態における質量流量を式(2-1)に示す。

$$\dot{m}_{\text{theo}} = \frac{A_{\text{th}} p_0}{\sqrt{R_0 T_0}} \sqrt{\gamma_0} \left(\frac{2}{\gamma_0 + 1} \right)^{\frac{\gamma_0 + 1}{2(\gamma_0 - 1)}} \quad (2-1)$$

式(2-1)より，臨界状態での質量流量はよどみ点状態の圧力 p_0 ，温度 T_0 ，ノズルスロートの断面積 A_{th} ，比熱比 γ_0 の関数として与えられることがわかる．すなわち，よどみ点状態とスロート直径が決まれば，流れの質量流量の測定が可能となる．

以下に，臨界ノズルを使った質量流量の測定に際しての基本的な事項について述べる．

2.2.1 臨界ノズルの測定原理

式(2-1)を使うことで理論的に質量流量を求めることは可能であるが，実際には境界層の存在により質量流量は減少する．その補正のため，理論質量流量 \dot{m}_{theo} に対する実際の質量流量 \dot{m} の割合を表す流出係数 C_d を用いる[35]．流出係数の算出には以下の式を用いる．

$$C_d = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_{theo}} \quad (2-2)$$

一般的な流れ場においては，レイノルズ数が高くなるにつれて境界層の影響が小さくなるため，流出係数は 1 に近づくと考えられている．また，流出係数の値については各ノズルに対して実験的に校正を行うことで算出する．

2.2.2 レイノルズ数と質量流量の関係

レイノルズ数 Re と理論質量流量 \dot{m}_{theo} の間には式(2-3)のような関係が成り立つ[35]．

$$Re = \frac{4}{\pi\mu_0 D} \dot{m}_{theo} \quad (2-3)$$

ここで、 μ_0 はよどみ点における粘性係数である。式(2-1)と(2-3)より、スロートでのレイノルズ数 Re の値はよどみ点状態の圧力 p_0 に起因していることがわかる。

2.2.3 無次元質量流量

ある断面における無次元質量流量は以下のようなになる。

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\rho u}{\rho_0 a_0} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right]}\end{aligned}\quad (2-4)$$

本計算に用いるノズルはラバルノズルであるため、スロートでの圧力 p_{th} と背圧 p_{b0} は異なる。そこで、背圧比と無次元質量流量の関係を求める。ここで、流れ場全体が衝撃波の存在しない等エントロピー流れであると仮定し、 $p_{b0}=p_e$ とすると、スロートと出口の連続の式から、

$$\rho_{th} u_{th} A_{th} = \rho_e u_e A_e \quad (2-5)$$

変形して

$$\rho_{th} u_{th} = \rho_e u_e \frac{A_e}{A_{th}} \quad (2-6)$$

両辺をよどみ点状態の密度 ρ_0 と音速 a_0 で割ると,

$$\frac{\rho_{th} u_{th}}{\rho_0 a_0} = \frac{\rho_e u_e}{\rho_0 a_0} \frac{A_e}{A_{th}} \quad (2-7)$$

$$\sigma_{th} = \sigma_e \frac{A_e}{A_{th}} \quad (2-8)$$

となる。また,

$$A = \frac{1}{4} \pi D^2$$

となるから,

$$\sigma_{th} = \sigma_e \frac{D_e^2}{D_{th}^2} \quad (2-9)$$

式(2-4)より,

$$\sigma_{th} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right\}} \frac{D_e^2}{D_{th}^2} \quad (2-10)$$

となる。式(2-10)より、任意の背圧比とスロートでの無次元質量流量の関係を求めることができる。ここで、無次元質量流量は、式(2-11)でも表すことができる[35].

$$\sigma = M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (2-11)$$

式(2-11)より、 σ はマッハ数 M のみの関数であることがわかる。無次元質量流量は、マッハ数が 1 のときに最大となることから、式(2-11)を変形して無次元質量流量の最大値を求めると、

$$\sigma = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (2-12)$$

となり、比熱比 γ の関数となる。

2.3 熱物性値

以下の表は，各気体に対して本計算で使用した理想気体の熱物性値を示す．それぞれの値は熱物性値ハンドブック[85][86]などを参考にした．なお，実在気体の場合は 3.1.2 で示す式を使って算出している．

Table 2.1 Physical properties

(a) Hydrogen

Molecular viscosity μ	8.98029×10^{-6}	[Pa · s]
Prandtl number Pr	0.7109	[-]
Molecular weight M	2.016	[-]
Specific heat ratio γ_0	1.405	[-]
Critical temperature T_{cr}	33.2	[K]
Critical pressure p_{cr}	1.316	[MPa]
Critical density ρ_{cr}	31.6	[kg/m ³]

(b) Nitrogen

Molecular viscosity μ	17.7×10^{-6}	[Pa · s]
Prandtl number Pr	0.714	[-]
Molecular weight M	28.013	[-]
Specific heat ratio γ_0	1.399	[-]
Critical temperature T_{cr}	126.2	[K]
Critical pressure p_{cr}	3.4	[MPa]
Critical density ρ_{cr}	314	[kg/m ³]

(c) Helium

Molecular viscosity μ	19.8×10^{-6}	[Pa · s]
Prandtl number Pr	0.688	[-]
Molecular weight M	4.003	[-]
Specific heat ratio γ_0	1.658	[-]
Critical temperature T_{cr}	5.2	[K]
Critical pressure p_{cr}	0.228	[MPa]
Critical density ρ_{cr}	69.6	[kg/m ³]

第3章 数値計算法

ここでは、本計算で用いた数値計算法について説明を行う。

3.1 基礎方程式

本計算で使用した基礎方程式、その無次元化及び座標変換について記載する。

3.1.1 実在気体効果を考慮した軸対称圧縮性流れの基礎方程式

本計算は、流体の圧縮性を考慮した連続の式、 x, y 方向の運動方程式、及びエネルギー保存式に加え、乱流運動エネルギー k と散逸率 ε の輸送方程式を解く。各方程式を以下に示す。

1) 連続の式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \tag{3-1}$$

2) 運動方程式

x 方向

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) = \frac{\partial}{\partial x}(t_{xx} + \rho \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(t_{yx} + \rho \tau_{yx}) \tag{3-2}$$

y 方向

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p) = \frac{\partial}{\partial x}(t_{xy} + \rho \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(t_{yy} + \rho \tau_{yy}) \tag{3-3}$$

3) エネルギー保存式

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t}(E_t) + \frac{\partial}{\partial x}\{u(E_t + p)\} + \frac{\partial}{\partial y}\{v(E_t + p)\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{u(t_{xx} + \rho\tau_{xx}) + v(t_{yx} + \rho\tau_{yx}) + \eta \frac{\partial T}{\partial x}\right\} \\
 &+ \frac{\partial}{\partial y}\left\{u(t_{xy} + \rho\tau_{xy}) + v(t_{yy} + \rho\tau_{yy}) + \eta \frac{\partial T}{\partial y}\right\}
 \end{aligned} \tag{3-4}$$

ここで、 E_t は単位体積あたりの全エネルギーであり、以下の関係が成り立つ。

$$E_t = E + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) + \rho k \tag{3-5}$$

4) 乱流運動エネルギーの輸送方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho k u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho k v) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial y}\right] + P_k - \rho\varepsilon + T_M \tag{3-6}$$

5) 散逸率の輸送方程式

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\varepsilon u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\varepsilon v) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right] \\
 &+ C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}P_k - C_{2\varepsilon}\rho\frac{\varepsilon^2}{k}
 \end{aligned} \tag{3-7}$$

6) 有次元ベクトル表示

ρ , ρu , ρv , E_t , ρk , $\rho \varepsilon$ を独立変数として, ベクトル表示を行う. 保存量ベクトルを \mathbf{U} , 非粘性流束ベクトルを \mathbf{E} , \mathbf{F} , 粘性ベクトルを \mathbf{R} , \mathbf{S} , 軸対称項を \mathbf{H}_1 , 乱流の補正項を \mathbf{H}_2 とすると, 式(3-1)~(3-7)は以下のようになる.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} + \frac{1}{y} \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 \quad (3-8)$$

ここで,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \\ \rho k \\ \rho \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E_t + p) \\ \rho ku \\ \rho \varepsilon u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E_t + p) \\ \rho kv \\ \rho \varepsilon v \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ t_{xx} + \rho \tau_{xx} \\ t_{xy} + \rho \tau_{xy} \\ u(t_{xx} + \rho \tau_{xx}) + v(t_{xy} + \rho \tau_{xy}) + \eta \frac{\partial T}{\partial x} \\ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \\ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ t_{yx} + \rho \tau_{yx} \\ t_{yy} + \rho \tau_{yy} \\ u(t_{yx} + \rho \tau_{yx}) + v(t_{yy} + \rho \tau_{yy}) + \eta \frac{\partial T}{\partial y} \\ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \\ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} -\rho v \\ t_{yx} + \rho\tau_{yx} - \rho uv \\ t_{yy} + \rho\tau_{yy} - \tau_{ax} - \rho v^2 \\ u(t_{yx} + \rho\tau_{yx}) + v(t_{yy} + \rho\tau_{yy}) + \eta \frac{\partial T}{\partial y} - v(E_t + p) \\ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right) \frac{\partial k}{\partial y} - \rho kv \\ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \rho \varepsilon v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_K - \rho \varepsilon - T_M \\ C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_K - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{bmatrix}$$

ここで,

$$t_{xx} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad t_{xy} = t_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad t_{yy} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$\rho\tau_{xx} = \mu_t \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \rho k, \quad \rho\tau_{xy} = \rho\tau_{yx} = \mu_t \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \rho\tau_{yy} = \mu_t \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \rho k,$$

$$\tau_{ax} = 2(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{y} \right),$$

$$P_K = \rho\tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \rho\tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \rho\tau_{yx} \frac{\partial v}{\partial x} + \rho\tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad T_M = 2\rho\varepsilon M_t^2, \quad M_t = \sqrt{\frac{k}{a^2}}$$

また、標準型 k - ε モデルの定数として以下の値を使用している。

$$\sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.0, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad C_\mu = 0.09$$

3.1.2 状態方程式

基礎方程式を解くには、式(3-1)～(3-7)に加え、状態方程式を解く必要がある。一般的に、大気圧状態(常温)では理想気体の関係が成り立つが、高圧になると理想気体の関係が成り立たない。よって、ノズル内の流出係数の値に影響を及ぼすと考えられる。そこで、本研究では実在気体の状態方程式として、Redlich-Kwong[71][77][78][79][80][81][82], Lee-Kesler[88][89][90], Peng-Robinson[91][92][93][94]の状態方程式を使用した。以下にそれぞれの状態方程式が過去の研究において使用された際の作動気体、圧力、温度範囲及びそれらの比較結果をまとめた論文を示す(Table 3.1)。ここで、本研究で適用された圧力及び温度範囲は、特に低圧部分に関して以下に挙げた論文の圧力及び温度の範囲外の条件となっているが、低圧では実在気体効果の影響が小さく、式の違いによる影響も小さいと考え、これらの状態方程式を適用した。

Table 3.1 Ranges of application for pressure p and temperature T

(a) Redlich-Kwong

Paper No.	Working Gas	p [kPa]	T [K]
[71]	Ethan	0~70,910	511
	n-butane	0~70,910	410~510
	Hydrogen	0~101,300	273~672
	Carbon dioxide	0~70,910	308~511
[77]	Helium	100~10,300	19~588
	Hydrogen	350~17,200	89~366
	Methane	100~9,300	144~394
	Nitrogen	100~9,600	105~1,366
	Ethylene	100~10,300	200~560
	Propane	100~8,300	310~478
	I-Butane	100~6,900	310~810
	Carbone Dioxide	100~13,800	222~589
	N-Pentane	100~6,900	377~700
	Ammonia	100~13,900	344~588
	R134a	30~8,100	262~588
	Steam	100~17,200	422~1,144
[79]	n-Hexane	6~2,998	273~473

(b) Lee-Kesler

Paper No.	Gas	p [kPa]	T [K]
[95]	Hydrogen	0~100,000	313, 353
[88]	Methane	1,700~13,790	116~284
	Ethane	1,360~13,780	122~412
	Propane	3,440~13,810	118~395
	n-Pentane	1,380~9,670	295~610
	n-Octane	1,370~9,650	295~585
	Cyclohexane	690~9,650	420~620
	Benzene	1,370~9,650	467~647

(c) Peng-Robinson

Paper	Gas	p [kPa]	T [K]
[91]	Nitrogen	1,379~13,790	127~283
	Methane	1,723~13,790	127~283
	N-Pentane	1,379~9,653	24~371
	N-Octane	1,379~9,653	24~316
	Cyclohexane	1,379~9,653	148.9~360

以下に計算で使用した各状態方程式を記載する.

1) 理想気体の状態方程式

$$p = \rho RT \quad (3-9)$$

2) Redlich-Kwong の状態方程式[71][77][78][79][80][81][82]

$$p = \frac{RT}{\bar{v} - \tilde{b}} - \frac{a(T)}{\bar{v}(\bar{v} + b_0)} \quad (3-10)$$

ここで,

$$a(T) = \tilde{a}_0 \left(\frac{T_c}{T} \right), \quad \tilde{b} = b_0 - c_0, \quad \tilde{a}_0 = 0.42747 \frac{RT_c}{p_c}, \quad b_0 = 0.08664 \frac{RT_c}{p_c},$$

$$c_0 = \frac{RT_c}{p_c + \frac{\tilde{a}_0}{\bar{v}_c(\bar{v}_c + b_0)}} + b_0 - \bar{v}_c$$

3) Lee-Kesler の状態方程式[88][89][90]

$$Z = \frac{p_R \bar{v}_R}{T_R} = 1 + \frac{B}{\bar{v}_R} + \frac{C}{\bar{v}_R^2} + \frac{D}{\bar{v}_R^5} + \frac{c_4}{T_R^3 \bar{v}_R^2} \left(\beta + \frac{\delta}{\bar{v}_R^2} \right) \exp \left(-\frac{\delta}{\bar{v}_R^2} \right) \quad (3-11)$$

ここで,

$$B = b_1 - \frac{b_2}{T_R} - \frac{b_3}{T_R^2} - \frac{b_4}{T_R^2}, \quad C = c_1 - \frac{c_2}{T_R} + \frac{c_3}{T_R^3}, \quad \tilde{D} = d_1 + \frac{d_2}{T_R}$$

$$b_1 = 0.10860082, b_2 = 0.25376417, b_3 = 0.15050929, b_4 = 0.03162790, c_1 = 0.02625350,$$

$$c_2 = 0.02259126, c_3 = 0.0, c_4 = 0.04483937, d_1 \times 10^4 = 0.04483937, d_2 \times 10^4 = 0.04483937,$$

$$\beta = 0.58038985, \delta = 0.06016921, a(T) = a_0 \left(\frac{T_c}{T} \right)$$

ここで、換算圧力 p_R , 換算温度 T_R は

$$p_R = \frac{p}{p_c}, T_R = \frac{T}{T_c}$$

4) Peng-Robinson[91][92][93][94]

$$p = \frac{RT}{\bar{v} - b} - \frac{\tilde{a}}{\bar{v}(\bar{v} + b) + b(\bar{v} - b)} \quad (3-12)$$

ここで、

$$\tilde{a} = a_c \left\{ 1 + n(1 - T_R^{0.5}) \right\}^2, \quad a_c = 0.45724 \frac{R^2 T_c^2}{p_c}, \quad b = 0.07780 \frac{R_0 T_c}{p_c},$$

$$n = 0.37464 + 1.54226\omega - 0.26992\omega^2$$

ここで、換算温度 T_R は

$$T_R = \frac{T}{T_c}$$

3.1.3 実在気体の状態方程式の変形

基礎方程式を解くにあたり，音速や比熱の計算が必要となる．ここでは，比熱[6]

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (3-13)$$

$$c_p - c_v = -T \left\{ \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial T} \right)_p \right\}^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \bar{v}} \right)_T \quad (3-14)$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (3-15)$$

及び，音速[6]

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} = \sqrt{- \left(\frac{c_p}{c_p - \Delta C} \right) \frac{v^2}{\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial p} \right)_T}} \quad (3-16)$$

の算出を行うために，各実在気体の状態方程式の変形を行う．

1) Redlich-Kwong

Redlich-Kwong の状態方程式を比体積を使った 3 次の方程式に変形すると

$$\bar{v}^3 + a_1\bar{v}^2 + a_2\bar{v} + a_3 = 0 \quad (3-17)$$

となる。ここで、

$$a_1 = c_0 - \frac{RT}{p}, \quad a_2 = -\left(\tilde{b}b_0 + \frac{RTb_0}{p} - \frac{a(T)}{p}\right), \quad a_3 = -\frac{a(T)\tilde{b}}{p}$$

また、陰関数定理[96]を使って(3-17)を微分すると、

$$\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial p}\right)_T = -\frac{(a_1)_p'\bar{v}^2 + (a_2)_p'\bar{v} + (a_3)_p'}{3\bar{v}^2 + 2a_1\bar{v} + a_2} \quad (3-18)$$

$$\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial T}\right)_p = -\frac{(a_1)_T'\bar{v}^2 + (a_2)_T'\bar{v} + (a_3)_T'}{3\bar{v}^2 + 2a_1\bar{v} + a_2} \quad (3-19)$$

ここで、

$$(a_1)_p' = \frac{RT}{p^2}, \quad (a_2)_p' = \frac{RTb_0 - a(T)}{p^2}, \quad (a_3)_p' = \frac{a(T)\tilde{b}}{p^2},$$

$$(a_1)_T' = -\frac{R}{p}, \quad (a_2)_T' = \frac{-Rb_0 + \frac{da(T)}{dT}}{p}, \quad (a_3)_T' = -\frac{da(T)\tilde{b}}{dT p},$$

$$\frac{da(T)}{dT} = -n \frac{a(T)}{T}, \quad a(T) = a_0 \left(\frac{T_c}{T} \right)$$

となる。

2) Lee-Kesler

Lee-Kesler の状態方程式を変形すると、

$$\bar{v}_R^6 + a_1 \bar{v}_R^5 + a_2 \bar{v}_R^4 + a_3 \bar{v}_R^3 + a_4 = 0 \quad (3-20)$$

ここで

$$a_1 = -\frac{T_R}{p_R}, \quad a_2 = -\frac{\tilde{B}T_R}{p_R}, \quad a_3 = -\frac{\tilde{C}T_R}{p_R},$$

$$a_4 = -\frac{c_4 \bar{v}_R^2}{T_R^2 p_R} \left\{ 3 \left(\beta + \frac{\delta}{\bar{v}_R^2} \right) - \frac{2\delta}{\bar{v}_R^2} \left(\beta + 1 + \frac{\delta}{\bar{v}_R^2} \right) \right\} \exp \left(-\frac{\delta}{\bar{v}_R^2} \right)$$

よって、陰関数の微分[96]より

$$\left(\frac{\partial \bar{v}_R}{\partial p_R} \right)_{T_R} = -\frac{(a_1)_{p_R}' \bar{v}_R^5 + (a_2)_{p_R}' \bar{v}_R^4 + (a_3)_{p_R}' \bar{v}_R^3 + (a_4)_{p_R}'}{6\bar{v}_R^5 + 5a_1 \bar{v}_R^4 + 4a_2 \bar{v}_R^3 + 3a_3 \bar{v}_R^2 + a_4} \quad (3-21)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{v}_R}{\partial T_R} \right)_{p_R} = -\frac{(a_1)_{T_R}' \bar{v}_R^5 + (a_2)_{T_R}' \bar{v}_R^4 + (a_3)_{T_R}' \bar{v}_R^3 + (a_4)_{T_R}'}{6\bar{v}_R^5 + 5a_1 \bar{v}_R^4 + 4a_2 \bar{v}_R^3 + 3a_3 \bar{v}_R^2 + a_4} \quad (3-22)$$

ここで

$$(a_1)_{p_R}' = \frac{T_R}{p_R^2}, \quad (a_2)_{p_R}' = \frac{\tilde{B}T_R}{p_R^2}, \quad (a_3)_{p_R}' = \frac{\tilde{C}T_R}{p_R^2},$$

$$(a_4)_{p_R}' = \frac{\tilde{D}T_R}{p_R^2} + \frac{c_4 \bar{v}_R^3}{T_R^2 p_R^2} \left(\beta + \frac{\delta}{\bar{v}_R^2} \right) \exp\left(-\frac{\delta}{\bar{v}_R^2}\right),$$

$$(a_1)_{T_R}' = -\frac{1}{p_R}, \quad (a_2)_{T_R}' = -\frac{1}{p_R} \frac{\partial(\tilde{B}T_R)}{\partial T_R}, \quad (a_3)_{T_R}' = -\frac{1}{p_R} \frac{\partial(\tilde{C}T_R)}{\partial T_R}$$

$$(a_4)_{T_R}' = -\frac{1}{p_R} \frac{\partial(\tilde{D}T_R)}{\partial T_R} + \frac{2c_4 v_R^3}{T_R^3 p_R} \left(\beta + \frac{\delta}{v_R^2} \right) \exp\left(-\frac{\delta}{v_R^2}\right)$$

$$\tilde{B} = b_1 - \frac{b_2}{T_R} - \frac{b_3}{T_R^2} - \frac{b_4}{T_R^3}, \quad \tilde{C} = c_1 - \frac{c_2}{T_R} + \frac{c_3}{T_R^3}, \quad \tilde{D} = d_1 + \frac{d_2}{T_R}$$

$$\frac{\partial(\tilde{B}T_R)}{\partial T_R} = b_1 + \frac{b_3}{T_R^2} + \frac{2b_4}{T_R^3}, \quad \frac{\partial(\tilde{C}T_R)}{\partial T_R} = c_1 - \frac{2c_3}{T_R^3}, \quad \frac{\partial(\tilde{D}T_R)}{\partial T_R} = d_1$$

また,

$$T_R = \frac{T}{T_c}, \quad p_R = \frac{p}{p_c}, \quad v_R = \frac{p_c v}{RT_c}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{v}_R}{\partial p_R} \right)_{T_R} = \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial p} \right)_T \left\{ \frac{\frac{p_c}{RT_c}}{\frac{1}{p_c}} \right\}, \quad \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial p} \right)_T = \left(\frac{\partial \bar{v}_R}{\partial p_R} \right)_{T_R} \frac{RT_c}{p_c^2},$$

$$\left(\frac{\partial \bar{v}_R}{\partial T_R} \right)_{p_R} = \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial T} \right)_p \left\{ \frac{\frac{p_c}{RT_c}}{\frac{1}{T_c}} \right\}, \quad \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial \bar{v}_R}{\partial T_R} \right)_{p_R} \frac{R}{p_c}$$

$$b_1 = 0.1181193, b_2 = 0.265728, b_3 = 0.154790, b_4 = 0.030323$$

$$c_1 = 0.0236744, c_2 = 0.0186984, c_3 = 0.0, c_4 = 0.042724,$$

$$d_1 = 0.155488 \times 10^{-4}, d_2 = 0.623689 \times 10^{-4}, \beta = 0.65392, \delta = 0.060167$$

3) Peng-Robinson

Peng-Robinson の状態方程式を変形すると

$$\bar{v}^3 + a_1 \bar{v}^2 + a_2 \bar{v} + a_3 = 0 \quad (3-23)$$

ここで

$$a_1 = \frac{bp - RT}{p}, a_2 = \frac{a - 3b^2 p - 2bRT}{p}, a_3 = \frac{b^3 p + b^2 RT - ab}{p}$$

よって、陰関数の微分[96]より

$$\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial p} \right)_T = - \frac{(a_1)_p' \bar{v}^2 + (a_2)_p' \bar{v} + (a_3)_p'}{3\bar{v}^2 + 2a_1 \bar{v} + a_2} \quad (3-24)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial T} \right)_p = - \frac{(a_1)_T' \bar{v}^2 + (a_2)_T' \bar{v} + (a_3)_T'}{3\bar{v}^2 + 2a_1 \bar{v} + a_3} \quad (3-25)$$

ここで

$$(a_1)'_p = \frac{RT}{p^2}, (a_2)'_p = -\frac{a - 2bRT}{p^2}, (a_3)'_p = \frac{ab - b^2RT}{p^2}$$

$$(a_1)'_T = -\frac{R}{p}, (a_2)'_T = -\frac{2bR}{p}, (a_3)'_T = \frac{b^2R}{p}$$

3.1.4 実在気体の比熱の算出

完全気体の仮定では定圧比熱及び定積比熱などの状態量は、温度や密度によらず一定と考えられている。しかしながら、高圧条件下ではその仮定が成立しないと考えられる。そこで、本計算では、比熱に温度と密度の影響を考慮した以下の式を適用する。

1) Redlich-Kwong

Redlich-Kwong の状態方程式の場合、実在気体の比エンタルピーは以下のようになる[77].

$$h = h^0(T) + p\bar{v} - RT - \frac{a(T)}{b_0}(1+n)\ln\left(\frac{\bar{v} + b_0}{\bar{v}}\right) \quad (3-26)$$

定圧比熱の定義[6]は、

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \quad (3-27)$$

となるので、(3-26)を微分すると、実在気体の定圧比熱は以下のようになる。

$$c_p = c_p^0 + p \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial T} \right)_p - R - \frac{da(T)}{dT} \frac{(1+n)}{b_0} \ln \left(\frac{\bar{v} + b_0}{\bar{v}} \right) + a(T)(1+n) \frac{\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial T} \right)_p}{\bar{v}(\bar{v} + b_0)} \quad (3-28)$$

ここで,

$$n = 0.4986 + 1.1735\omega + 0.475\omega^2$$

ω は偏心率を表す。また、 c_p^0 は理想気体の場合の定圧比熱であり、M.J., Moran の手法[97]より算出する。

$$\frac{c_p^0}{R} = C_1 + C_2 T + C_3 T^2 + C_4 T^3 + C_5 T^4 \quad (3-29)$$

さらに、定圧比熱と定積比熱の関係は以下のようなになる[6].

$$c_p - c_v = -T \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right\}^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \quad (3-30)$$

2) Peng-Robinson

Peng-Robinson の実在気体の状態方程式の場合の比エンタルピーは[91]

$$h - h^0 = RT(Z - 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}B} \frac{RT}{p} \ln \left(\frac{Z + (1 + \sqrt{2})B}{Z + (1 - \sqrt{2})B} \right) \left[T \frac{d}{dT} \left\{ A \frac{(RT)^2}{p} \right\} - A \frac{(RT)^2}{p} \right] \quad (3-31)$$

ここで、

$$Z = \frac{p\bar{v}}{RT}, \quad A = \tilde{a} \frac{p}{(RT)^2}, \quad B = b \frac{p}{RT}$$

より

$$\begin{aligned} h &= h^0 + p\bar{v} - RT \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}b} \ln \left\{ \frac{\frac{p\bar{v}}{RT} + (1+\sqrt{2})b \frac{p}{RT}}{\frac{p\bar{v}}{RT} + (1-\sqrt{2})b \frac{p}{RT}} \right\} \left[T \frac{d}{dT} \left\{ a \frac{p}{(RT)^2} \frac{(RT)^2}{p} \right\} - a \frac{p}{(RT)^2} \frac{(RT)^2}{p} \right] \\ &= h^0 + p\bar{v} - RT + \frac{T \frac{da}{dT} - a}{2\sqrt{2}b} \ln \left\{ \frac{v + (1+\sqrt{2})b}{v + (1-\sqrt{2})b} \right\} \end{aligned} \quad (3-32)$$

定圧比熱の定義は

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (3-33)$$

となるので

$$\begin{aligned}
c_p = & c_p^0(T) + p \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial T} \right)_p - R + \frac{\frac{\partial \tilde{a}}{\partial T} + T \frac{\partial^2 \tilde{a}}{\partial T^2} - \frac{\partial \tilde{a}}{\partial T}}{2\sqrt{2}b} \ln \left\{ \frac{\bar{v} + (1 + \sqrt{2})b}{\bar{v} + (1 - \sqrt{2})b} \right\} \\
& + \frac{T \frac{\partial \tilde{a}}{\partial T} - \tilde{a}}{2\sqrt{2}b} \frac{\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial T} \right)_p \left\{ \bar{v} + (1 - \sqrt{2})b \right\} - \left\{ \bar{v} + (1 + \sqrt{2})b \right\} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial T} \right)_p}{\left\{ \bar{v} + (1 - \sqrt{2})b \right\}^2} \frac{\bar{v} + (1 - \sqrt{2})b}{\bar{v} + (1 + \sqrt{2})b}
\end{aligned} \tag{3-34}$$

$$\begin{aligned}
= & C_p^0(T) + p \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial T} \right)_p - R + \frac{T \frac{\partial^2 \tilde{a}}{\partial T^2}}{2\sqrt{2}b} \ln \left\{ \frac{\bar{v} + (1 + \sqrt{2})b}{\bar{v} + (1 - \sqrt{2})b} \right\} \\
& - \left(T \frac{\partial \tilde{a}}{\partial T} - \tilde{a} \right) \frac{\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial T} \right)_p}{\left\{ \bar{v} + (1 - \sqrt{2})b \right\} \left\{ \bar{v} + (1 + \sqrt{2})b \right\}}
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
c_p = & c_p^0(T) + p \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial T} \right)_p - R + \\
& \frac{1.06964a_0 T \frac{\partial^2 \alpha}{\partial T^2}}{2\sqrt{2}b} \ln \left\{ \frac{\bar{v} + (1 + \sqrt{2})(0.89797b_0)}{\bar{v} + (1 - \sqrt{2})(0.89797b_0)} \right\} \\
& - \frac{1.06964a_0 \left[T \frac{\partial \alpha}{\partial T} - \alpha \right]}{\left\{ \bar{v} + (1 - \sqrt{2})(0.89797b_0) \right\} \left\{ \bar{v} + (1 + \sqrt{2})(0.89797b_0) \right\}} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial T} \right)_p
\end{aligned} \tag{3-35}$$

ここで

$$\alpha = \left\{ 1 + n \left(1 - \sqrt{T_R} \right) \right\}^2, \quad a_0 = 0.42747 \frac{R^2 T_c^2}{P_c}, \quad b_0 = 0.08664 \frac{RT_c}{P_c}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial T} = -\frac{n+n^2}{\sqrt{T_c}} T^{-\frac{1}{2}} + \frac{n^2}{T_c}, \quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial T^2} = \frac{n+n^2}{2\sqrt{T_c}} T^{-\frac{3}{2}}$$

3) Lee-Kesler

Lee-Kesler の実在気体の状態方程式を用いた場合の比エンタルピーの式は[88]

$$\begin{aligned} h &= h^0 + RT_c T_R \left[\frac{p_R \bar{v}_R}{T_R} - 1 - \frac{b_2 + \frac{2b_3}{T_R} + \frac{3b_4}{T_R^2}}{T_R \bar{v}_R} - \frac{c_2 - \frac{3c_3}{T_R^2}}{2T_R \bar{v}_R^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d_2}{5T_R \bar{v}_R^5} + 3 \frac{c_4}{2T_R^3 \delta} \left\{ \beta + 1 - \left(\beta + 1 + \frac{\delta}{\bar{v}_R^2} \right) \exp \left(-\frac{\delta}{\bar{v}_R^2} \right) \right\} \right] \\ &= h^0 + RT_c \left[p_R \bar{v}_R - T_R - \frac{b_2 + \frac{2b_3}{T_R} + \frac{3b_4}{T_R^2}}{\bar{v}_r} - \frac{c_2 - \frac{3c_3}{T_R^2}}{2\bar{v}_r^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d_2}{5\bar{v}_R^5} + \frac{3c_4}{2T_R^2 \delta} \left\{ \beta + 1 - \left(\beta + 1 + \frac{\delta}{\bar{v}_R^2} \right) \exp \left(-\frac{\delta}{\bar{v}_R^2} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (3-36)$$

定圧比熱の式は

$$c_P = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (3-37)$$

となるので

$$T_R = \frac{T}{T_c}, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T_c} \left(\frac{\partial H}{\partial T_R} \right)_{p_R}$$

より

$$\begin{aligned}
c_P &= \left(\frac{\partial h^0}{\partial T} \right)_P + \left(\frac{\partial h^1}{\partial T} \right)_P \\
&= \left(\frac{\partial h^0}{\partial T} \right)_P + \frac{1}{T_c} \left(\frac{\partial H^1}{\partial T_r} \right)_{PR} \\
&= c_P^0 + \frac{1}{T_c} RT_c \left\langle p_R \left(\frac{\partial v_R}{\partial T_R} \right)_{PR} - 1 \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left(-\frac{2b_3}{T_R^2} - 2\frac{3b_4}{T_R^3} \right) v_r - \left(b_2 + \frac{2b_3}{T_R} + \frac{3b_4}{T_R^2} \right) \left(\frac{\partial \bar{v}_R}{\partial T_R} \right)_{PR}}{\bar{v}_R^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\frac{3c_3}{T_R^3} \bar{v}_R^2 - \left(c_2 - \frac{3c_3}{T_R^2} \right) \left(\frac{\partial \bar{v}_R^2}{\partial T_R} \right)_{PR}}{2v_R^4} + \frac{d_2}{5} \left\{ \frac{\partial}{\partial T_R} \left(\frac{1}{\bar{v}_R^5} \right) \right\}_{PR} \right. \\
&\quad \left. + (-2) \frac{3c_4}{2T_R^3 \delta} \left\{ (\beta+1) - \left(\beta+1 + \frac{\delta}{\bar{v}_R^2} \right) \exp \left(-\frac{\delta}{\bar{v}_R^2} \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3c_4}{2T_R^2 \delta} \left[-\delta \left\{ \frac{\partial}{\partial T_R} \left(\frac{1}{\bar{v}_R^2} \right) \right\}_{PR} \exp \left(-\frac{\delta}{\bar{v}_R^2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(\beta+1 + \frac{\delta}{\bar{v}_R^2} \right) (-\delta) \left\{ \frac{\partial}{\partial T_R} \left(\frac{1}{\bar{v}_R^2} \right) \right\}_{PR} \exp \left(-\frac{\delta}{\bar{v}_R^2} \right) \right] \right\rangle
\end{aligned} \tag{3-38}$$

変形して

$$\begin{aligned}
c_p = C_p^0(T) + R \left\langle p_R \left(\frac{\partial \bar{v}_R}{\partial T_R} \right)_{p_R} - 1 + \frac{\left(\frac{2b_3}{T_R^2} + \frac{6b_4}{T_R^3} \right) \bar{v}_R + \left(b_2 + \frac{2b_3}{T_R} + \frac{3b_4}{T_R^2} \right) \left(\frac{\partial \bar{v}_R}{\partial T_R} \right)_{p_R}}{v_R^2} \right. \\
- \frac{\frac{3c_3}{T_R^3} \bar{v}_R - \left(c_2 - \frac{3c_3}{T_R^2} \right) \left(\frac{\partial \bar{v}_R}{\partial T_R} \right)_{p_R} - \frac{d_2}{v_R^6} \left(\frac{\partial \bar{v}_R}{\partial T_R} \right)_{p_R}}{v_R^3} \\
- \frac{3c_4}{T_R^3 \delta} \left\{ (\beta + 1) - \left(\beta + 1 + \frac{\delta}{\bar{v}_R^2} \right) \exp \left(-\frac{\delta}{\bar{v}_R^2} \right) \right\} \\
\left. - \frac{3c_4}{T_R^2 \bar{v}_R^3} \left[\left(\beta + \frac{\delta}{\bar{v}_R^2} \right) \left(\frac{\partial \bar{v}_R}{\partial T_R} \right)_{p_R} \exp \left(-\frac{\delta}{\bar{v}_R^2} \right) \right] \right\rangle
\end{aligned} \tag{3-39}$$

3.1.5 実在気体の音速の算出

音速の定義[6]は,

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} \tag{3-40}$$

ここで, 等エントロピー体積弾性率[6]は,

$$K_S = -\bar{v} \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \tag{3-41}$$

という関係が成り立つので,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = -\bar{v}^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \bar{v}}\right)_s \quad (3-42)$$

ここで,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \bar{v}}\right)_T \quad (3-43)$$

より, (3-42)は

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = -\gamma \frac{\bar{v}^2}{\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial p}\right)_T} = -\left(\frac{c_p}{c_v}\right) \frac{\bar{v}^2}{\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial p}\right)_T} \quad (3-44)$$

となる. ここで, (3-30)より

$$-T \left\{ \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial T} \right)_p \right\}^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \bar{v}} \right)_T = \Delta C$$

とすると, (3-44)は

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = -\left(\frac{c_p}{c_p - \Delta C}\right) \frac{\bar{v}^2}{\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial p}\right)_T} \quad (3-45)$$

となる。よって、実在気体の音速は

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{-\left(\frac{c_p}{c_p - \Delta C}\right) \frac{\bar{v}^2}{\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial p}\right)_T}} \quad (3-46)$$

ここで、本計算では以下のような式変形を行う。

$$a = \sqrt{\frac{-\left(\frac{c_p}{c_p - \Delta C}\right) \frac{\bar{v}^2}{\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial p}\right)_T}}{\gamma_0 RT}} \gamma_0 RT \quad (3-47)$$

ここで、

$$S_{K1} = \frac{-\left(\frac{c_p}{c_p - \Delta C}\right) \frac{\bar{v}^2}{\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial p}\right)_T}}{\gamma_0 RT} \quad (3-48)$$

と置くと、(3-47)式は以下のようになる。

$$a = \sqrt{S_{K1} \gamma_0 RT} \quad (3-49)$$

3.1.6 実在気体の状態量の比較

これまで、本計算で使用した実在気体の状態方程式，比熱，音速の算出を行った．ここでは，これらの式より算出された圧縮係数，比熱比，音速と圧力の関係を示す．

Fig. 3.1 は，圧力と圧縮係数の値の関係を示した図である．図より，圧力が増加するにつれて圧縮係数は増加しており，理想気体の値から大きくずれていることがわかる．つまり，流れが高圧になるにつれて，理想気体の仮定が適用できなくなることがわかる．また，低温になるにつれ圧縮係数の値は大きくなっており，気体がノズル内で加速され，膨張すると，実在気体効果の影響が無視できなくなることが予測される．さらに状態方程式で比較すると，同じ圧力の場合，Lee-Kesler の状態方程式を用いた場合が最も圧縮係数の値が大きく，Peng-Robinson の状態方程式を用いた場合が最も小さい．

Fig. 3.2 は圧力と比熱比の関係を示している．図より，圧力が約 1 MPa になると，比熱比が理想気体の値から大きく離れていくことがわかる．また，その差は温度が低いほど大きくなっている．さらに，比熱比は圧力の増加に伴い増加し，その値は状態方程式により異なることがわかる．式(2-1)を考慮すると，この結果から高圧での流出係数の予測には比熱比に及ぼす実在気体効果の影響が無視できないと考えられる．

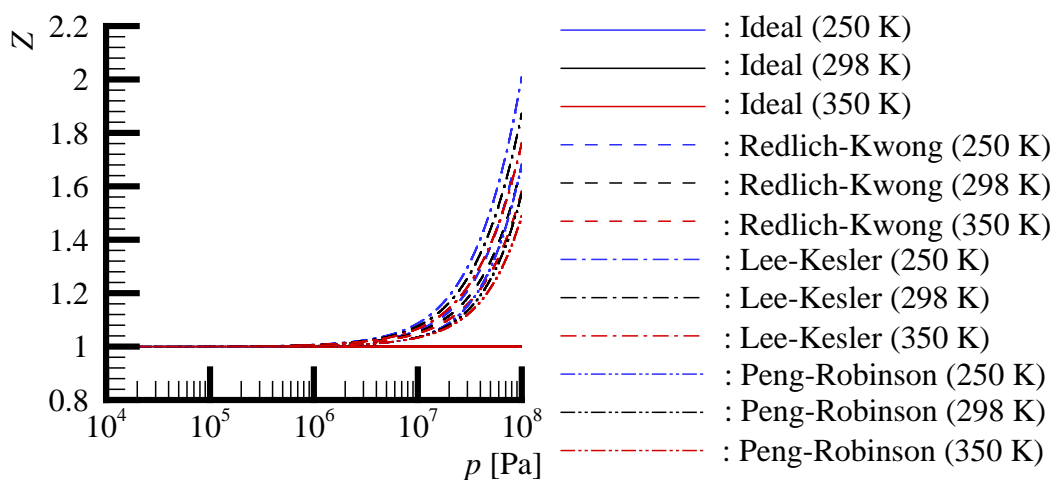


Fig. 3.1 Relationships between pressure p and compressibility factor Z

Fig. 3.3 は圧力と音速の関係を示した図である。図より、圧力が増加するにつれ、音速の値は増加していることがわかる。また、温度の影響を見てみると、理想気体の場合も含めて、温度が増加するにつれて音速の値も増加していることがわかる。さらに、状態方程式で比較してみると、Lee-Kesler の状態方程式が音速を最も大きく予測しており、Peng-Robinson の状態方程式が最も小さく予測していることがわかる。

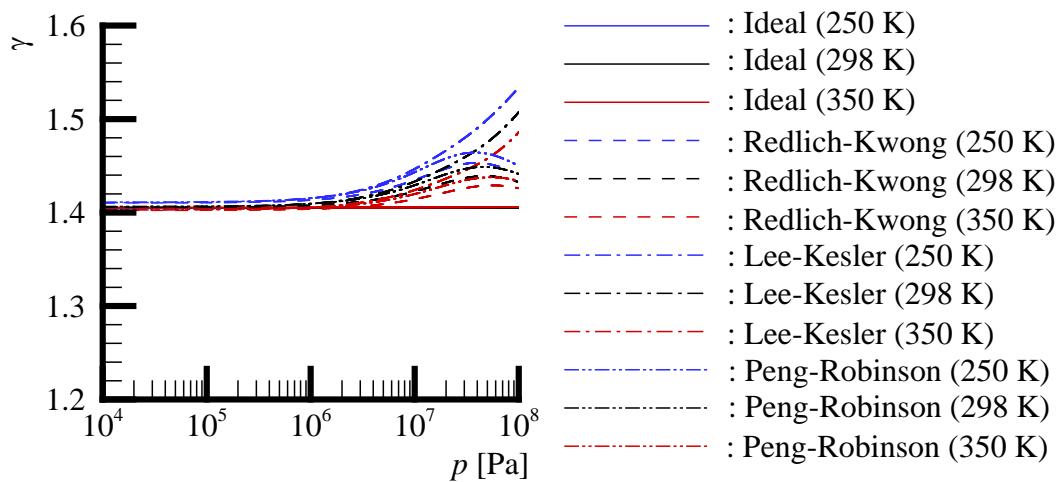


Fig. 3.2 Relationships between pressure p and ratio of specific heat γ

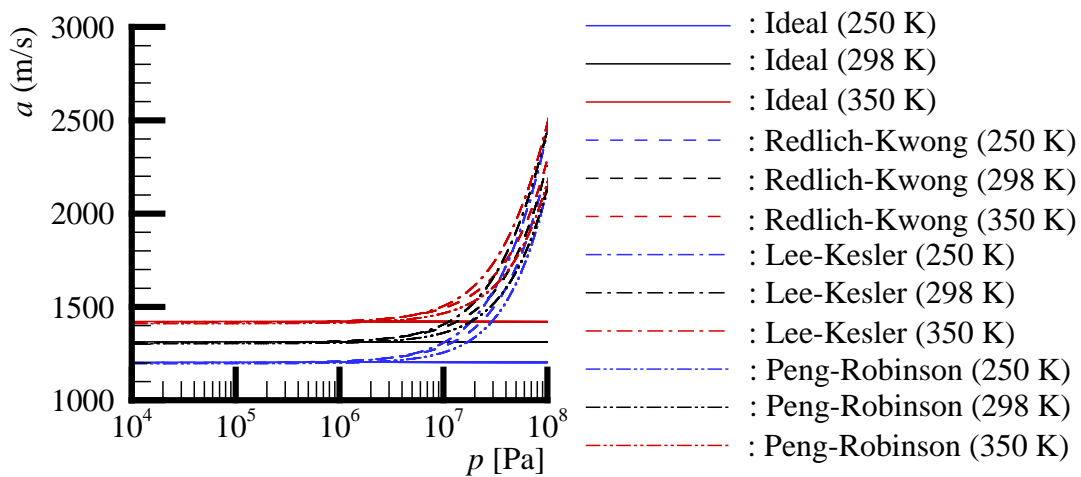


Fig. 3.3 Relationships between pressure p and speed of sound a

3.2 基礎方程式及び状態方程式の無次元化

本計算はよどみ点状態の物理量を使って無次元化を行った。関係式については以下に示す。

$$u^* = \frac{u}{a_0}, \quad v^* = \frac{v}{a_0}, \quad x^* = \frac{x}{D}, \quad y^* = \frac{y}{D}, \quad t^* = \frac{t}{\left(\frac{D}{a_0}\right)}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad T^* = \frac{T}{T_0}, \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad e^* = \frac{e}{a_0^2},$$

$$E_t^* = \frac{E_t}{\rho_0 a_0^2}, \quad k^* = \frac{k}{a_0^2}, \quad \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\left(\frac{a_0^3}{D}\right)}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{\eta_0}$$

また、圧力の無次元化に関しては以下のようなになる。

$$p^* = \frac{p}{\rho_0 a_0^2}$$

(3-49)より

$$p^* = \frac{p}{S_{K10} \gamma_0 \rho_0 R T_0}$$

ここで

$$R T_0 = \frac{p_0}{Z_0 \rho_0}$$

となるので、代入して

$$\begin{aligned}
 p^* &= \frac{p}{S_{K10} \gamma_0 \rho_0 \frac{\rho_0}{Z_0 \rho_0}} \\
 &= \frac{p}{\frac{S_{K10}}{Z_0} \gamma_0 \rho_0}
 \end{aligned}
 \tag{3-50}$$

次に、これらの式を使って基礎方程式の無次元化を行う。

1) 基礎方程式の無次元化

連続の式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0
 \tag{3-51}$$

$$\frac{\partial}{\partial \left(t^* \frac{D}{a_0} \right)} (\rho^* \rho_0) + \frac{\partial}{\partial (x^* D)} (\rho^* \rho_0 u^* a_0) + \frac{\partial}{\partial (y^* D)} (\rho^* \rho_0 v^* a_0) = 0$$

$$\frac{\rho_0 a_0}{D} \frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^*) + \frac{\rho_0 a_0}{D} \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* u^*) + \frac{\rho_0 a_0}{D} \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* v^*) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^*) + \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* v^*) = 0
 \tag{3-52}$$

運動方程式

x 方向

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) = \frac{\partial}{\partial x}(t_{xx} + \rho \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(t_{yx} + \rho \tau_{yx})
 \tag{3-53}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \left(t^* \frac{D}{a_0} \right)} (\rho^* \rho_0 u^* a_0) + \frac{\partial}{\partial (x^* D)} (\rho^* \rho_0 u^{*2} a_0^2 + p^* \rho_0 a_0^2) \\
& + \frac{\partial}{\partial (y^* D)} (\rho^* \rho_0 u^* a_0 v^* a_0) \\
& = \frac{\mu_0 a_0}{D} \frac{\partial}{\partial (x^* D)} (t_{xx}^* + \rho \tau_{xx}^*) + \frac{\mu_0 a_0}{D} \frac{\partial}{\partial (y^* D)} (t_{yx}^* + \rho \tau_{yx}^*) \\
& \frac{\rho_0 a_0^2}{D} \frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^* u^*) + \frac{\rho_0 a_0^2}{D} \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* u^{*2} + p^*) + \frac{\rho_0 a_0^2}{D} \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* u^* v^*) \\
& = \frac{\mu_0 a_0}{D^2} \frac{\partial}{\partial x^*} (t_{xx}^* + \rho \tau_{xx}^*) + \frac{\mu_0 a_0}{D^2} \frac{\partial}{\partial y^*} (t_{yx}^* + \rho \tau_{yx}^*) \\
& \frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^* u^*) + \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* u^{*2} + p^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* u^* v^*) \\
& = \frac{\mu_0}{\rho_0 a_0 D} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^*} (t_{xx}^* + \rho \tau_{xx}^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (t_{yx}^* + \rho \tau_{yx}^*) \right\} \\
& \frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^* u^*) + \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* u^{*2} + p^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* u^* v^*) \\
& = \frac{1}{Re_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^*} (t_{xx}^* + \rho \tau_{xx}^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (t_{yx}^* + \rho \tau_{yx}^*) \right\} \tag{3-54}
\end{aligned}$$

y 方向も同様にして

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + p) = \frac{\partial}{\partial x} (t_{xy} + \rho \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (t_{yy} + \rho \tau_{yy}) \tag{3-55}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^* v^*) + \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* u^* v^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* v^{*2} + p^*) \\
& = \frac{1}{Re_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^*} (t_{xy}^* + \rho \tau_{xy}^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (t_{yy}^* + \rho \tau_{yy}^*) \right\} \tag{3-56}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
t_{xx} + \rho\tau_{xx} &= (\mu + \mu_t) \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \rho k \\
&= (\mu^* \mu_0 + \mu_t^* \mu_0) \left(\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial(x^* D)} (u^* a_0) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial(y^* D)} (v^* a_0) \right) \\
&\quad - \frac{2}{3} \rho^* \rho_0 k^* a_0^2 \\
&= \frac{\mu_0 a_0}{D} \left\{ (\mu^* + \mu_t^*) \left(\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial(x^* D)} (u^*) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial(y^* D)} (v^*) \right) - \frac{2}{3} Re_0 \rho^* k^* \right\} \\
&= \frac{\mu_0 a_0}{D} (t_{xx}^* + \rho\tau_{xx}^*)
\end{aligned} \tag{3-57}$$

$$\begin{aligned}
t_{yx} + \rho\tau_{yx} &= 2(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
&= 2(\mu^* \mu_0 + \mu_t^* \mu_0) \left(\frac{\partial}{\partial x^*} (v^* a_0) + \frac{\partial}{\partial y^*} (u^* a_0) \right) \\
&= \frac{\mu_0 a_0}{D} 2(\mu^* + \mu_t^*) \left(\frac{\partial}{\partial x^*} (v^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (u^*) \right) \\
&= \frac{\mu_0 a_0}{D} (t_{yx}^* + \rho\tau_{yx}^*)
\end{aligned} \tag{3-58}$$

$$\begin{aligned}
t_{yy} + \rho\tau_{yy} &= (\mu + \mu_t) \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \rho k \\
&= \frac{\mu_0 a_0}{D} \left\{ (\mu^* + \mu_t^*) \left(\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y^*} (v^*) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x^*} (u^*) \right) - \frac{2}{3} Re_0 \rho^* k^* \right\} \\
&= \frac{\mu_0 a_0}{D} (t_{yy}^* + \rho\tau_{yy}^*)
\end{aligned} \tag{3-59}$$

$$\begin{aligned}
t_{xy} + \rho\tau_{xy} &= 2(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\mu_0 a_0}{D} 2(\mu^* + \mu_t^*) \left(\frac{\partial}{\partial x^*} (v^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (u^*) \right) \\
&= \frac{\mu_0 a_0}{D} (t_{yx}^* + \rho\tau_{yx}^*)
\end{aligned} \tag{3-60}$$

エネルギー保存式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(E_t) + \frac{\partial}{\partial x}\{u(E_t + p)\} + \frac{\partial}{\partial y}\{v(E_t + p)\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{u(t_{xx} + \rho\tau_{xx}) + v(t_{yx} + \rho\tau_{yx}) + \eta \frac{\partial T}{\partial x}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{u(t_{xy} + \rho\tau_{xy}) + v(t_{yy} + \rho\tau_{yy}) + \eta \frac{\partial T}{\partial y}\right\} \end{aligned} \quad (3-61)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\left(t^* \frac{D}{a_0}\right)}\left(E_t^* \rho_0 a_0^2\right) + \frac{\partial}{\partial(x^* D)}\left\{u^* a_0\left(E_t^* \rho_0 a_0^2 + p^* \rho_0 a_0^2\right)\right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial(y^* D)}\left\{v^* a_0\left(E_t^* \rho_0 a_0^2 + p^* \rho_0 a_0^2\right)\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial(x^* D)}\left\{u^* a_0 \frac{\mu_0 a_0}{D}\left(t_{xx}^* + \rho\tau_{xx}^*\right) + v^* a_0 \frac{\mu_0 a_0}{D}\left(t_{yx}^* + \rho\tau_{yx}^*\right) + \eta^* \eta_0 \frac{\partial(T^* T_0)}{\partial(x^* D)}\right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial(y^* D)}\left\{u^* a_0 \frac{\mu_0 a_0}{D}\left(t_{xy}^* + \rho\tau_{xy}^*\right) + v^* a_0 \frac{\mu_0 a_0}{D}\left(t_{yy}^* + \rho\tau_{yy}^*\right) + \eta^* \eta_0 \frac{\partial(T^* T_0)}{\partial(y^* D)}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_0 a_0^3}{D} \frac{\partial}{\partial t^*}(E_t^*) + \frac{\rho_0 a_0^3}{D} \frac{\partial}{\partial x^*}\{u^*(E_t^* + p^*)\} + \frac{\rho_0 a_0^3}{D} \frac{\partial}{\partial y^*}\{v^*(E_t^* + p^*)\} \\ &= \frac{\mu_0 a_0^2}{D^2} \left[\frac{\partial}{\partial x^*}\left\{u^*(t_{xx}^* + \rho\tau_{xx}^*) + v^*(t_{yx}^* + \rho\tau_{yx}^*) + \frac{\eta_0 T_0}{\mu_0 a_0^2} \eta^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*}\right\} \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y^*}\left\{u^*(t_{xy}^* + \rho\tau_{xy}^*) + v^*(t_{yy}^* + \rho\tau_{yy}^*) + \frac{\eta_0 T_0}{\mu_0 a_0^2} \eta^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right\} \right] \end{aligned} \quad (3-62)$$

ここで、(3-62)の右辺に現れる無次元化

$$\frac{\eta_0 T_0}{\mu_0 a_0^2} \eta^* \quad (3-63)$$

について考える。

ここで,

$$c_p - c_v = S_{K2} R$$

$$R = \frac{c_p - c_v}{S_{K2}}$$

音速の式に代入すると,

$$a_0 = \sqrt{S_{K10} \gamma_0 \frac{c_p - c_v}{S_{K2}} T_0}$$

また

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

$$c_v = \frac{c_p}{\gamma}$$

より

$$a_0 = \sqrt{\frac{S_{K10}}{S_{K2}} \gamma_0 \frac{1}{\gamma} c_p (\gamma - 1) T_0}$$

さらに,

$$\eta^* = \frac{\eta}{\eta_0} = \frac{\mu c_p}{Pr_0} \frac{1}{\eta_0} = \frac{\mu^* c_p}{Pr_0} \frac{\mu_0}{\eta_0}$$

となるので, (3-63)に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\eta_0 T_0}{\mu_0 a_0^2} \eta^* &= \frac{\eta_0}{\mu_0 c_p} \frac{1}{\frac{S_{K10}}{S_{K2}} \gamma_0 \frac{1}{\gamma} (\gamma-1) T_0} \frac{T_0}{Pr_0} \frac{\mu^* c_p}{\eta_0} \\ &= \frac{S_{K2}}{S_{K10}} \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{\mu^*}{Pr_0 (\gamma-1)} \end{aligned} \quad (3-64)$$

また, 乱流モデルを使用する場合は(3-64)は以下のようになる

$$\frac{S_{K2}}{S_{K10}} \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{1}{(\gamma-1)} \left(\frac{\mu^*}{Pr_0} + \frac{\mu_t^*}{Pr_{t0}} \right) \quad (3-65)$$

よって,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t^*} (E_t^*) + \frac{\partial}{\partial x^*} \{u^* (E_t^* + p^*)\} + \frac{\partial}{\partial y^*} \{v^* (E_t^* + p^*)\} \\ &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \{u^* (t_{xx}^* + \rho \tau_{xx}^*) + v^* (t_{yx}^* + \rho \tau_{yx}^*) + \frac{S_{K2}}{S_{K10}} \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{1}{(\gamma-1)} \left(\frac{\mu^*}{Pr_0} + \frac{\mu_t^*}{Pr_{t0}} \right) \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y^*} \{u^* (t_{xy}^* + \rho \tau_{xy}^*) + v^* (t_{yy}^* + \rho \tau_{yy}^*) + \frac{S_{K2}}{S_{K10}} \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{1}{(\gamma-1)} \left(\frac{\mu^*}{Pr_0} + \frac{\mu_t^*}{Pr_{t0}} \right) \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right] \end{aligned} \quad (3-66)$$

乱流運動エネルギー

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho k u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho k v) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P_K - \rho \varepsilon + T_M \quad (3-67)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \left(t^* \frac{D}{a_0} \right)} (\rho^* \rho_0 k^* a_0^2) + \frac{\partial}{\partial (x^* D)} (\rho^* \rho_0 k^* a_0^2 u^* a_0) + \frac{\partial}{\partial (y^* D)} (\rho^* \rho_0 k^* a_0^2 v^* a_0) \\ &= \frac{\partial}{\partial (x^* D)} \left\{ \left(\mu^* \mu_0 + \frac{\mu_t^* \mu_0}{\sigma_k} \right) \frac{\partial (k^* a_0^2)}{\partial (x^* D)} \right\} + \frac{\partial}{\partial (y^* D)} \left\{ \left(\mu^* \mu_0 + \frac{\mu_t^* \mu_0}{\sigma_k} \right) \frac{\partial (k^* a_0^2)}{\partial (y^* D)} \right\} \\ &+ P_K - \rho^* \rho_0 \varepsilon^* \frac{a_0^2}{D} + T_M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_0 a_0^3}{D} \frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^* k^*) + \frac{\rho_0 a_0^3}{D} \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* k^* u^*) + \frac{\rho_0 a_0^3}{D} \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* k^* v^*) \\ &= \frac{\mu_0 a_0^2}{D^2} \frac{\partial}{\partial x^*} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial x^*} \right] + \frac{\mu_0 a_0^2}{D^2} \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right] \\ &+ P_K - \frac{\rho_0 a_0^3}{D} \rho^* \varepsilon^* + T_M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^* k^*) + \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* k^* u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* k^* v^*) \\ &= \frac{\mu_0}{\rho_0 a_0 D} \frac{\partial}{\partial x^*} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial x^*} \right] + \frac{\mu_0}{\rho_0 a_0 D} \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right] \\ &+ \frac{D}{\rho_0 a_0^3} P_K - \frac{\mu_0}{\rho_0 a_0 D} \rho^* \varepsilon^* + \frac{D}{\rho_0 a_0^3} T_M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^* k^*) + \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* k^* u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* k^* v^*) \\ &= \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x^*} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial x^*} \right] + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right] \\ &+ \frac{D}{\rho_0 a_0^3} P_K - \frac{1}{Re} \rho^* \varepsilon^* - \frac{D}{\rho_0 a_0^3} T_M \end{aligned} \quad (3-68)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 \rho\tau_{xx} &= \frac{\mu_0 a_0}{D} \left\{ \mu_t^* \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) - \frac{2}{3} \frac{\rho_0 a_0 D}{\mu_0} \rho^* k^* \right\} \\
 &= \frac{\mu_0 a_0}{D} \left\{ \mu_t^* \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) - \frac{2}{3} Re_0 \rho^* k^* \right\} \\
 &= \frac{\mu_0 a_0}{D} \rho\tau_{xx}^*
 \end{aligned} \tag{3-69}$$

$$\rho\tau_{xy} = \rho\tau_{yx} = \frac{\mu_0 a_0}{D} \left\{ \mu_t^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) \right\} = \frac{\mu_0 a_0}{D} \rho\tau_{xy}^* = \frac{\mu_0 a_0}{D} \rho\tau_{yx}^* \tag{3-70}$$

$$\begin{aligned}
 \rho\tau_{yy} &= \frac{\mu_0 a_0}{D} \left\{ \mu_t^* \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) - \frac{2}{3} \frac{\rho_0 a_0 D}{\mu_0} \rho^* k^* \right\} \\
 &= \frac{\mu_0 a_0}{D} \left\{ \mu_t^* \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) - \frac{2}{3} Re_0 \rho^* k^* \right\} \\
 &= \frac{\mu_0 a_0}{D} \rho\tau_{yy}^*
 \end{aligned} \tag{3-71}$$

$$\begin{aligned}
 P_K &= \frac{\mu_0 a_0^2}{D^2} \left(\rho\tau_{xx}^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho\tau_{xy}^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \rho\tau_{yx}^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \rho\tau_{yy}^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) \\
 &= \frac{\mu_0 a_0^2}{D^2} P_K^*
 \end{aligned} \tag{3-72}$$

$$\begin{aligned}
 T_M &= 2\rho\varepsilon \frac{k}{a^2} \\
 &= \frac{\rho_0 a_0^2}{D} 2\rho^* \varepsilon^* \frac{k^*}{a^2} \\
 &= \frac{\rho_0 a_0^2}{D} T_M^*
 \end{aligned} \tag{3-73}$$

よって

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* k^*) + \frac{\partial}{\partial x^*}(\rho^* k^* u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho^* k^* v^*) \\
&= \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x^*} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial x^*} \right] + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right] \\
&+ \frac{1}{Re} P_K^* - \frac{1}{Re} \rho^* \varepsilon^* - a_0^2 T_M^*
\end{aligned} \tag{3-74}$$

散逸率

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \varepsilon u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \varepsilon v) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] \\
&+ C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_K - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \\
& \frac{\partial}{\partial \left(t^* \frac{D}{a_0} \right)} \left(\rho^* \rho_0 \varepsilon^* \frac{a_0^3}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial (x^* D)} \left(\rho^* \rho_0 \varepsilon^* \frac{a_0^3}{D} u^* a_0 \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial (y^* D)} \left(\rho^* \rho_0 \varepsilon^* \frac{a_0^3}{D} v^* a_0 \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial (x^* D)} \left[\left(\mu^* \mu_0 + \frac{\mu_t^* \mu_0}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \left(\varepsilon^* \frac{a_0^3}{D} \right)}{\partial (x^* D)} \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial (y^* D)} \left[\left(\mu^* \mu_0 + \frac{\mu_t^* \mu_0}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \left(\varepsilon^* \frac{a_0^3}{D} \right)}{\partial (y^* D)} \right] \\
&+ C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon^* \frac{a_0^3}{D}}{k^* a_0^2} P_K - C_{2\varepsilon} \rho^* \rho_0 \frac{\varepsilon^* \frac{a_0^6}{D^2}}{k^* a_0^2}
\end{aligned} \tag{3-75}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_0 a_0^4}{D^2} \frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^* \varepsilon^*) + \frac{\rho_0 a_0^4}{D^2} \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* \varepsilon^* u^*) + \frac{\rho_0 a_0^4}{D^2} \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* \varepsilon^* v^*) \\
&= \frac{\mu_0 a_0^3}{D^3} \frac{\partial}{\partial x^*} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*} \right] + \frac{\mu_0 a_0^3}{D^3} \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} \right] \\
&+ \frac{a_0}{D} C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon^*}{k^*} P_K - \frac{\rho_0 a_0^4}{D^2} C_{2\varepsilon} \rho^* \frac{\varepsilon^*}{k^*}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^* \varepsilon^*) + \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* \varepsilon^* u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* \varepsilon^* v^*) \\
&= \frac{\mu_0}{\rho_0 a_0 D} \frac{\partial}{\partial x^*} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*} \right] + \frac{\mu_0}{\rho_0 a_0 D} \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} \right] \\
&+ \frac{D}{\rho_0 a_0^3} C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon^*}{k^*} P_K - C_{2\varepsilon} \rho^* \frac{\varepsilon^*}{k^*}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^* \varepsilon^*) + \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* \varepsilon^* u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* \varepsilon^* v^*) \\
&= \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x^*} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*} \right] + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} \right] \\
&+ \frac{D}{\rho_0 a_0^3} C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon^*}{k^*} P_K - C_{2\varepsilon} \rho^* \frac{\varepsilon^*}{k^*}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^* \varepsilon^*) + \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* \varepsilon^* u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* \varepsilon^* v^*) \\
&= \frac{1}{Re} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^*} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*} \right] + \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} \right] \right\rangle \\
&+ \frac{1}{Re} C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon^*}{k^*} P_K^* - C_{2\varepsilon} \rho^* \frac{\varepsilon^*}{k^*}
\end{aligned} \tag{3-76}$$

2) 無次元ベクトル表示

無次元値で表された ρ^* , ρ^*u^* , ρ^*v^* , E_t^* , ρ^*k^* , $\rho^*\varepsilon^*$ を独立変数として, ベクトル表示を行う. 保存量ベクトルを \mathbf{U}^* , 非粘性流束ベクトルを \mathbf{E}^* , \mathbf{F}^* , 粘性ベクトルを \mathbf{R}^* , \mathbf{S}^* , 軸対称項を \mathbf{H}_1^* , 乱流の補正項を \mathbf{H}_2^* とすると, ベクトル表示された式は以下のようになる.

$$\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial y^*} = \frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \mathbf{S}^*}{\partial y^*} + \frac{1}{y^*} \mathbf{H}_1^* + \mathbf{H}_2^* \quad (3-77)$$

ここで,

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} \rho^* \\ \rho^*u^* \\ \rho^*v^* \\ E_t^* \\ \rho^*k^* \\ \rho^*\varepsilon^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}^* = \begin{bmatrix} \rho^*u^* \\ \rho^*u^{*2} + p^* \\ \rho^*u^*v^* \\ u^*(E_t^* + p^*) \\ \rho^*k^*u^* \\ \rho^*\varepsilon^*u^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} \rho^*v^* \\ \rho^*u^*v^* \\ \rho^*v^{*2} + p^* \\ v^*(E_t^* + p^*) \\ \rho^*k^*v^* \\ \rho^*\varepsilon^*v^* \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ t_{xx}^* + \rho\tau_{xx}^* \\ t_{xy}^* + \rho\tau_{xy}^* \\ \bar{\alpha} \\ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k^*}\right) \frac{\partial k^*}{\partial x^*} \\ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_\varepsilon^*}\right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ t_{yx}^* + \rho\tau_{yx}^* \\ t_{yy}^* + \rho\tau_{yy}^* \\ \bar{\beta} \\ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k^*}\right) \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \\ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_\varepsilon^*}\right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_1^* = \begin{bmatrix} -\rho^* v^* \\ t_{yx}^* + \rho \tau_{yx}^* - \rho^* u^* v^* \\ t_{yy}^* + \rho \tau_{yy}^* - \tau_{ax}^* - \rho^* v^{*2} \\ \bar{\beta}^* - v^* (E_t^* + p^*) \\ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial y^*} - \rho^* k^* v^* \\ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} - \rho^* \varepsilon^* v^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_K^* - \rho^* \varepsilon^* - T_M^* \\ C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon^*}{k^*} P_K^* - C_{2\varepsilon} \rho^* \frac{\varepsilon^{*2}}{k^*} \end{bmatrix}$$

ここで,

$$\bar{\alpha}^* = u^* (t_{xx}^* + \rho \tau_{xx}^*) + v^* (t_{yx}^* + \rho \tau_{yx}^*) + \frac{S_{K2}}{S_{K10}} \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{1}{(\gamma-1)} \left(\frac{\mu^*}{Pr_0} + \frac{\mu_t^*}{Pr_{t0}} \right) \frac{\partial T^*}{\partial x^*}$$

$$\bar{\beta}^* = u^* (t_{xy}^* + \rho \tau_{xy}^*) + v^* (t_{yy}^* + \rho \tau_{yy}^*) + \frac{S_{K2}}{S_{K10}} \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{1}{(\gamma-1)} \left(\frac{\mu^*}{Pr_0} + \frac{\mu_t^*}{Pr_{t0}} \right) \frac{\partial T^*}{\partial y^*}$$

$$t_{xx}^* = \mu^* \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right), \quad t_{xy}^* = t_{yx}^* = \mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right), \quad t_{yy}^* = \mu^* \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right),$$

$$\rho \tau_{xx}^* = \mu_t^* \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) - \frac{2}{3} Re_0 \rho^* k^*, \quad \rho \tau_{xy}^* = \rho \tau_{yx}^* = \mu_t^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right),$$

$$\rho \tau_{yy}^* = \mu_t^* \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) - \frac{2}{3} Re_0 \rho^* k^*, \quad \tau_{ax}^* = 2(\mu^* + \mu_t^*) \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{v^*}{y^*} \right),$$

$$P_K^* = \rho \tau_{xx}^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho \tau_{xy}^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \rho \tau_{yx}^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \rho \tau_{yy}^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*}, \quad T_M^* = 2\rho^* \varepsilon^* \frac{k^*}{a^2},$$

また、標準型 k - ε モデルの定数として以下の値を使用している。

$$\sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.0, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad C_\mu = 0.09$$

3) 補足式の無次元化

実在気体の状態方程式は

$$p = Z\rho RT$$

ここで

$$R = \frac{C_p - C_v}{S_{K2}}$$

より

$$p = Z\rho \frac{C_p - C_v}{S_{K2}} T \tag{3-78}$$

比内部エネルギーは

$$e = C_v T$$

$$T = \frac{e}{C_v}$$

となるので、(3-78)に代入して、

$$\begin{aligned}
p &= \frac{Z}{S_{K2}} \rho e \frac{C_p - C_v}{C_v} \\
&= \frac{Z}{S_{K2}} \rho e (\gamma - 1) \\
&= \frac{Z}{S_{K2}} E (\gamma - 1)
\end{aligned} \tag{3-79}$$

ここで

$$e_t = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + k$$

より，両辺に ρ をかけて

$$\begin{aligned}
\rho e_t &= \rho e + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) + \rho k \\
E_t &= E + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) + \rho k \\
E &= E_t - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) - \rho k
\end{aligned} \tag{3-80}$$

式(3-79)に代入して，

$$p = \frac{Z}{S_{K2}} \left(E_t - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) - \rho k \right) (\gamma - 1) \tag{3-81}$$

次に式(3-81)無次元化を行う。

$$p^* (\rho_0 a_0^2) = \frac{Z}{S_{K2}} \left(E_t^* (\rho_0 a_0^2) - \frac{1}{2} \rho^* \rho_0 a_0^2 (u^{*2} + v^{*2}) - \rho^* k^* \rho_0 a_0^2 \right) (\gamma - 1) \tag{3-82}$$

$$p^* = \frac{Z}{S_{K2}} \left(E_t^* - \frac{1}{2} \rho^* (u^{*2} + v^{*2}) - \rho^* k^* \right) (\gamma - 1) \quad (3-83)$$

ここで

$$e = C_v T$$

より

$$e^* = \frac{e}{a_0^2} = \frac{C_v T}{a_0^2} \quad (3-84)$$

よって,

$$e^* = \frac{C_v T^* T_0}{S_{K10} \gamma_0 R T_0} \quad (3-85)$$

ここで,

$$C_p - C_v = S_{K2} R$$

$$\frac{C_p}{C_v} - 1 = S_{K2} \frac{R}{C_v}$$

$$\gamma - 1 = S_{K2} \frac{R}{C_v}$$

$$C_v = S_{K2} \frac{R}{\gamma - 1}$$

(3-85)に代入して,

$$e^* = \frac{S_{K2} R}{\gamma - 1} \frac{T^* T_0}{S_{K10} \gamma_0 R T_0} = \frac{S_{K2}}{S_{K10}} \frac{T^*}{\gamma_0 (\gamma - 1)} \quad (3-86)$$

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{S_{K10}}{S_{K2}} \gamma_0 (\gamma - 1) e^* \\ &= \frac{S_{K10}}{S_{K2}} \frac{1}{\rho^*} \rho^* e^* \gamma_0 (\gamma - 1) \\ &= \frac{S_{K10}}{S_{K2}} \frac{1}{\rho^*} E^* \gamma_0 (\gamma - 1) \end{aligned} \quad (3-87)$$

(3-80)を無次元化して代入すると,

$$T^* = \frac{S_{K10}}{S_{K2}} \frac{1}{\rho^*} \left(E_t^* - \frac{1}{2} \rho^* (u^{*2} + v^{*2}) - \rho^* k^* \right) \gamma_0 (\gamma - 1) \quad (3-88)$$

より

$$T^* = \frac{S_{K10}}{Z} \frac{\gamma_0 P^*}{\rho^*} \quad (3-89)$$

また(3-83)を変形すると

$$E_t^* = \frac{S_{K2}}{Z} \frac{P^*}{(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \rho^* (u^{*2} + v^{*2}) + \rho^* k^* \quad (3-90)$$

また, (3-85)は

$$p^* = \frac{Z}{S_{K10}} \frac{\rho^* T^*}{\gamma_0} \quad (3-91)$$

より

$$T^* = \frac{Z}{S_{K10}} \frac{\rho^* p^*}{\gamma_0(\gamma-1)} + \frac{1}{2} \rho^* (u^{*2} + v^{*2}) + \rho^* k^* \quad (3-92)$$

エネルギー式は

$$E_t^* = \frac{S_{K2}}{S_{K10}} \frac{T^* \rho^*}{\gamma_0(\gamma-1)} + \frac{1}{2} \rho^* (u^{*2} + v^{*2}) + \rho^* k^* \quad (3-93)$$

4) 状態方程式の無次元化

まず, 圧力の無次元化は(3-50)より

$$p^* = \frac{p}{\frac{S_{K10}}{Z_0} \gamma_0 p_0} \quad (3-94)$$

p, T, ρ の関係は,

$$p = Z\rho RT$$

となる. 両辺をよどみ点状態で割ると,

$$\frac{p}{p_0} = \frac{Z}{Z_0} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{R T}{R T_0}$$

$$\frac{S_{K10}}{Z_0} \gamma_0 p^* = \frac{Z}{Z_0} \rho^* T^*$$

よって、密度は

$$\rho^* = \frac{S_{K10}}{Z} \frac{\gamma_0 p^*}{T^*} \tag{3-95}$$

温度は

$$T^* = \frac{S_{K10}}{Z} \frac{\gamma_0 p^*}{\rho^*} \tag{3-96}$$

3.3 基礎方程式の座標変換

1) 基礎方程式の座標変換

本計算では基礎方程式を x - y 座標系から ξ - η 座標系への変換を行った。座標変換には以下の式を用いる。

$$\xi_x = \frac{1}{J} y_\eta, \quad \eta_x = -\frac{1}{J} y_\xi, \quad \xi_y = -\frac{1}{J} x_\eta, \quad \eta_y = \frac{1}{J} x_\xi \quad (3-97)$$

ここで

$$J = |x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta|$$

また、反変速度は

$$U^* = u^* \xi_x^* + v^* \xi_y^*, \quad V^* = u^* \eta_x^* + v^* \eta_y^*$$

これらの関係式を使って基礎方程式の座標変換を行うと以下のようになる。

連続の式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^*) + \frac{\partial}{\partial x^*}(\rho^* u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho^* v^*) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^*) + \frac{\partial}{\partial \xi^*}(\rho^* u^*) \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial \eta^*}(\rho^* u^*) \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \\ + \frac{\partial}{\partial \xi^*}(\rho^* v^*) \frac{\partial \xi^*}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial \eta^*}(\rho^* v^*) \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} &= 0 \end{aligned} \quad (3-98)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^*) + \frac{\partial}{\partial \xi^*} \{ \rho^* (u^* \xi_x^* + v^* \xi_y^*) \} + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \{ \rho^* (u^* \eta_x^* + v^* \eta_y^*) \} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^*) + \frac{\partial}{\partial \xi^*}(\rho^* U^*) + \frac{\partial}{\partial \eta^*}(\rho^* V^*) &= 0 \end{aligned} \quad (3-99)$$

運動方程式

x 方向

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* u^*) + \frac{\partial}{\partial x^*}(\rho^* u^{*2} + p^*) + \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho^* u^* v^*) \\ = \frac{1}{Re_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^*} (t_{xx}^* + \rho \tau_{xx}^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (t_{yx}^* + \rho \tau_{yx}^*) \right\} \end{aligned} \quad (3-100)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* u^*) + \frac{\partial}{\partial \xi^*}(\rho^* u^{*2} + p) \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial \eta^*}(\rho^* u^{*2} + p) \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \\ + \frac{\partial}{\partial \xi^*}(\rho^* u^* v^*) \frac{\partial \xi^*}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial \eta^*}(\rho^* u^* v^*) \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} \\ = \frac{1}{Re_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi^*} (t_{xx}^* + \rho \tau_{xx}^*) \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial \eta^*} (t_{xx}^* + \rho \tau_{xx}^*) \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \xi^*} (t_{yx}^* + \rho \tau_{yx}^*) \frac{\partial \xi^*}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial \eta^*} (t_{yx}^* + \rho \tau_{yx}^*) \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* u^*) + \frac{\partial}{\partial \xi^*}(\rho^* u^{*2} + p) \xi_x^* + \frac{\partial}{\partial \eta^*}(\rho^* u^{*2} + p) \eta_x^* \\ + \frac{\partial}{\partial \xi^*}(\rho^* u^* v^*) \xi_y^* + \frac{\partial}{\partial \eta^*}(\rho^* u^* v^*) \eta_y^* \\ = \frac{1}{Re_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi^*} (t_{xx}^* + \rho \tau_{xx}^*) \xi_x^* + \frac{\partial}{\partial \eta^*} (t_{xx}^* + \rho \tau_{xx}^*) \eta_x^* \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \xi^*} (t_{yx}^* + \rho \tau_{yx}^*) \xi_x^* + \frac{\partial}{\partial \eta^*} (t_{yx}^* + \rho \tau_{yx}^*) \eta_x^* \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* u^*) + \frac{\partial}{\partial \xi^*} \{(\rho^* u^{*2} + p^*)\xi_x^* + (\rho^* u^* v^*)\xi_y^*\} \\
& + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \{(\rho^* u^{*2} + p^*)\eta_x^* + (\rho^* u^* v^*)\eta_y^*\} \\
& = \frac{1}{Re_0} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^*} \{(t_{xx}^* + \rho\tau_{xx}^*)\xi_x^* + (t_{yx}^* + \rho\tau_{yx}^*)\xi_y^*\} \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \{(t_{xx}^* + \rho\tau_{xx}^*)\eta_x^* + (t_{yx}^* + \rho\tau_{yx}^*)\eta_y^*\} \right]
\end{aligned} \tag{3-101}$$

y 方向

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* v^*) + \frac{\partial}{\partial x^*}(\rho^* u^* v^*) + \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho^* v^{*2} + p^*) \\
& = \frac{1}{Re_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^*} (t_{xy}^* + \rho\tau_{xy}^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (t_{yy}^* + \rho\tau_{yy}^*) \right\}
\end{aligned} \tag{3-102}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* u^*) + \frac{\partial}{\partial \xi^*} \{(\rho^* u^* v^*)\xi_x^* + (\rho^* v^{*2} + p^*)\xi_y^*\} \\
& + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \{(\rho^* u^* v^*)\eta_x^* + (\rho^* v^{*2} + p^*)\eta_y^*\} \\
& = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^*} \{(t_{xy}^* + \rho\tau_{xy}^*)\xi_x^* + (t_{yy}^* + \rho\tau_{yy}^*)\xi_y^*\} \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \{(t_{xy}^* + \rho\tau_{xy}^*)\eta_x^* + (t_{yy}^* + \rho\tau_{yy}^*)\eta_y^*\} \right]
\end{aligned} \tag{3-103}$$

エネルギー保存式

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t^*}(E_t^*) + \frac{\partial}{\partial x^*}\{u^*(E_t^* + p^*)\} + \frac{\partial}{\partial y^*}\{v^*(E_t^* + p^*)\} \\
 &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x^*}\{u^*(t_{xx}^* + \rho\tau_{xx}^*) + v^*(t_{yx}^* + \rho\tau_{yx}^*) + \frac{S_{K2}}{S_{K10}} \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{1}{(\gamma-1)} \left(\frac{\mu^*}{Pr_0} + \frac{\mu_t^*}{Pr_{t0}} \right) \frac{\partial T^*}{\partial x^*}\} \right. \\
 & \left. + \frac{\partial}{\partial y^*}\{u^*(t_{xy}^* + \rho\tau_{xy}^*) + v^*(t_{yy}^* + \rho\tau_{yy}^*) + \frac{S_{K2}}{S_{K10}} \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{1}{(\gamma-1)} \left(\frac{\mu^*}{Pr_0} + \frac{\mu_t^*}{Pr_{t0}} \right) \frac{\partial T^*}{\partial x^*}\} \right] \quad (3-104)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t^*}(E_t^*) + \frac{\partial}{\partial \xi^*}\{u^*(E_t^* + p^*)\}\xi_x^* + \frac{\partial}{\partial \eta^*}\{u^*(E_t^* + p^*)\}\eta_x^* \\
 & + \frac{\partial}{\partial \xi^*}\{v^*(E_t^* + p^*)\}\xi_y^* + \frac{\partial}{\partial \eta^*}\{v^*(E_t^* + p^*)\}\eta_y^* \\
 &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^*}\{u^*(t_{xx}^* + \rho\tau_{xx}^*) + v^*(t_{yx}^* + \rho\tau_{yx}^*) + \frac{S_{K2}}{S_{K10}} \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{1}{(\gamma-1)} \left(\frac{\mu^*}{Pr_0} + \frac{\mu_t^*}{Pr_{t0}} \right) \frac{\partial T^*}{\partial x^*}\} \xi_x^* \right. \\
 & + \frac{\partial}{\partial \eta^*}\{u^*(t_{xx}^* + \rho\tau_{xx}^*) + v^*(t_{yx}^* + \rho\tau_{yx}^*) + \frac{S_{K2}}{S_{K10}} \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{1}{(\gamma-1)} \left(\frac{\mu^*}{Pr_0} + \frac{\mu_t^*}{Pr_{t0}} \right) \frac{\partial T^*}{\partial x^*}\} \eta_x^* \\
 & + \frac{\partial}{\partial \xi^*}\{u^*(t_{xy}^* + \rho\tau_{xy}^*) + v^*(t_{yy}^* + \rho\tau_{yy}^*) + \frac{S_{K2}}{S_{K10}} \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{1}{(\gamma-1)} \left(\frac{\mu^*}{Pr_0} + \frac{\mu_t^*}{Pr_{t0}} \right) \frac{\partial T^*}{\partial y^*}\} \xi_y^* \\
 & \left. + \frac{\partial}{\partial \eta^*}\{u^*(t_{xy}^* + \rho\tau_{xy}^*) + v^*(t_{yy}^* + \rho\tau_{yy}^*) + \frac{S_{K2}}{S_{K10}} \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{1}{(\gamma-1)} \left(\frac{\mu^*}{Pr_0} + \frac{\mu_t^*}{Pr_{t0}} \right) \frac{\partial T^*}{\partial y^*}\} \eta_y^* \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t^*}(E_t^*) + \frac{\partial}{\partial \xi^*}\{u^*(E_t^* + p^*)\xi_x^* + v^*(E_t^* + p^*)\xi_y^*\} \\
 & + \frac{\partial}{\partial \eta^*}\{u^*(E_t^* + p^*)\eta_x^* + v^*(E_t^* + p^*)\eta_y^*\} \\
 &= \frac{1}{Re} \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left[\{u^*(t_{xx}^* + \rho\tau_{xx}^*) + v^*(t_{yx}^* + \rho\tau_{yx}^*) + \frac{S_{K2}}{S_{K10}} \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{1}{(\gamma-1)} \left(\frac{\mu^*}{Pr_0} + \frac{\mu_t^*}{Pr_{t0}} \right) \frac{\partial T^*}{\partial x^*}\} \xi_x^* \right. \right. \\
 & \left. + \{u^*(t_{xy}^* + \rho\tau_{xy}^*) + v^*(t_{yy}^* + \rho\tau_{yy}^*) + \frac{S_{K2}}{S_{K10}} \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{1}{(\gamma-1)} \left(\frac{\mu^*}{Pr_0} + \frac{\mu_t^*}{Pr_{t0}} \right) \frac{\partial T^*}{\partial y^*}\} \xi_y^* \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left[\{u^*(t_{xx}^* + \rho\tau_{xx}^*) + v^*(t_{yx}^* + \rho\tau_{yx}^*) + \frac{S_{K2}}{S_{K10}} \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{1}{(\gamma-1)} \left(\frac{\mu^*}{Pr_0} + \frac{\mu_t^*}{Pr_{t0}} \right) \frac{\partial T^*}{\partial x^*}\} \eta_x^* \right. \\
 & \left. \left. + \{u^*(t_{xy}^* + \rho\tau_{xy}^*) + v^*(t_{yy}^* + \rho\tau_{yy}^*) + \frac{S_{K2}}{S_{K10}} \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{1}{(\gamma-1)} \left(\frac{\mu^*}{Pr_0} + \frac{\mu_t^*}{Pr_{t0}} \right) \frac{\partial T^*}{\partial y^*}\} \eta_y^* \right] \right\rangle \quad (3-105)
 \end{aligned}$$

乱流エネルギー

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* k^*) + \frac{\partial}{\partial x^*}(\rho^* k^* u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho^* k^* v^*) \\ &= \frac{1}{Re} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^*} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial x^*} \right] + \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right] \right\rangle + \frac{1}{Re} P_K^* - \frac{1}{Re} \rho^* \varepsilon^* - a_0^2 T_M^* \end{aligned} \quad (3-106)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* k^*) + \frac{\partial}{\partial \xi^*}(\rho^* k^* u^*) \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial \eta^*}(\rho^* k^* u^*) \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi^*}(\rho^* k^* v^*) \frac{\partial \xi^*}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial \eta^*}(\rho^* k^* v^*) \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} \\ &= \frac{1}{Re} \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial x^*} \right\} \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial x^*} \right\} \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right\} \frac{\partial \xi^*}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right\} \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} \right\rangle \\ &+ \frac{1}{Re} P_K^* - \frac{1}{Re} \rho^* \varepsilon^* - a_0^2 T_M^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* k^*) + \frac{\partial}{\partial \xi^*}(\rho^* k^* u^*) \xi_x^* + \frac{\partial}{\partial \eta^*}(\rho^* k^* u^*) \eta_x^* \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi^*}(\rho^* k^* v^*) \xi_y^* + \frac{\partial}{\partial \eta^*}(\rho^* k^* v^*) \eta_y^* \\ &= \frac{1}{Re} \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial x^*} \right\} \xi_x^* + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial x^*} \right\} \eta_x^* \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right\} \xi_y^* + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right\} \eta_y^* \right\rangle \\ &+ \frac{1}{Re} P_K^* - \frac{1}{Re} \rho^* \varepsilon^* - a_0^2 T_M^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* k^*) + \frac{\partial}{\partial \xi^*} \{ (\rho^* k^* u^*) \xi_x^* + (\rho^* k^* v^*) \xi_y^* \} + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \{ (\rho^* k^* u^*) \eta_x^* + (\rho^* k^* v^*) \eta_y^* \} \\ &= \frac{1}{Re} \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left[\left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial x^*} \right\} \xi_x^* + \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right\} \xi_y^* \right] \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left[\left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial x^*} \right\} \eta_x^* + \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right\} \eta_y^* \right] \right\rangle \\ &+ \frac{1}{Re} P_K^* - \frac{1}{Re} \rho^* \varepsilon^* - a_0^2 T_M^* \end{aligned} \quad (3-107)$$

散逸率

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* \varepsilon^*) + \frac{\partial}{\partial x^*}(\rho^* \varepsilon^* u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho^* \varepsilon^* v^*) \\
 &= \frac{1}{Re} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^*} \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*} \right\} + \frac{\partial}{\partial y^*} \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} \right\} \right\rangle + \frac{1}{Re} C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon^*}{k^*} P_K^* - C_{2\varepsilon} \rho^* \frac{\varepsilon^*}{k^*} \tag{3-108} \\
 & \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* \varepsilon^*) + \frac{\partial}{\partial \xi^*}(\rho^* \varepsilon^* u^*) \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial \eta^*}(\rho^* \varepsilon^* u^*) \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \\
 & + \frac{\partial}{\partial \xi^*}(\rho^* \varepsilon^* v^*) \frac{\partial \xi^*}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial \eta^*}(\rho^* \varepsilon^* v^*) \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} \\
 &= \frac{1}{Re} \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*} \right\} \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*} \right\} \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \right\rangle \\
 & + \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} \right\} \frac{\partial \xi^*}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} \right\} \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} \right\rangle \\
 & + \frac{1}{Re} C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon^*}{k^*} P_K^* - C_{2\varepsilon} \rho^* \frac{\varepsilon^*}{k^*} \\
 & \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* \varepsilon^*) + \frac{\partial}{\partial \xi^*}(\rho^* \varepsilon^* u^*) \xi_x^* + \frac{\partial}{\partial \eta^*}(\rho^* \varepsilon^* u^*) \eta_x^* \\
 & + \frac{\partial}{\partial \xi^*}(\rho^* \varepsilon^* v^*) \xi_y^* + \frac{\partial}{\partial \eta^*}(\rho^* \varepsilon^* v^*) \eta_y^* \\
 &= \frac{1}{Re} \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*} \right\} \xi_x^* + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*} \right\} \eta_x^* \right\rangle \\
 & + \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} \right\} \xi_y^* + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} \right\} \eta_y^* \right\rangle \\
 & + \frac{1}{Re} C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon^*}{k^*} P_K^* - C_{2\varepsilon} \rho^* \frac{\varepsilon^*}{k^*}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* \varepsilon^*) + \frac{\partial}{\partial \xi^*} \{(\rho^* \varepsilon^* u^*) \xi_x^* + (\rho^* \varepsilon^* v^*) \xi_y^*\} + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \{(\rho^* \varepsilon^* u^*) \eta_x^* + (\rho^* \varepsilon^* v^*) \eta_y^*\} \\
&= \frac{1}{Re} \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left[\left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*} \right\} \xi_x^* + \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} \right\} \xi_y^* \right] \right. \\
&+ \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left[\left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*} \right\} \eta_x^* + \left\{ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} \right\} \eta_y^* \right] \left. \right\rangle \\
&+ \frac{1}{Re} C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon^*}{k^*} P_K^* - C_{2\varepsilon} \rho^* \frac{\varepsilon^*}{k^*}
\end{aligned} \tag{3-109}$$

よって

$$\frac{\partial U}{\partial t^*} + \frac{\partial E}{\partial \xi^*} + \frac{\partial F}{\partial \eta^*} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial R}{\partial \xi^*} + \frac{\partial S}{\partial \eta^*} \right) + H_1 + \frac{1}{y} H_2 \tag{3-110}$$

2) 座標変換された基礎方程式のベクトル表示

保存量ベクトルを \mathbf{U}^* ，非粘性流束ベクトルを \mathbf{E}^* ， \mathbf{F}^* ，粘性ベクトルを \mathbf{R}^* ， \mathbf{S}^* ，軸対称項を \mathbf{H}_1^* ，乱流の補正項を \mathbf{H}_2^* とすると，ベクトル表示された無次元化された基礎方程式は以下のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \xi^*} + \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \eta^*} = \frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \xi^*} + \frac{\partial \mathbf{S}^*}{\partial \eta^*} + \frac{1}{y^*} \mathbf{H}_1^* + \mathbf{H}_2^* \quad (3-111)$$

ここで，

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} \rho^* \\ \rho^* u^* \\ \rho^* v^* \\ E_t^* \\ \rho^* k^* \\ \rho^* \varepsilon^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}^* = \begin{bmatrix} \rho^* U^* \\ (\rho^* u^{*2} + p^*) \xi_x^* + (\rho^* u^* v^*) \xi_y^* \\ (\rho^* u^* v^*) \xi_x^* + (\rho^* v^{*2} + p^*) \xi_y^* \\ u^* (E_t^* + p^*) \xi_x^* + v^* (E_t^* + p^*) \xi_y^* \\ (\rho^* k^* u^*) \xi_x^* + (\rho^* k^* v^*) \xi_y^* \\ (\rho^* \varepsilon^* u^*) \xi_x^* + (\rho^* \varepsilon^* v^*) \xi_y^* \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} \rho^* V^* \\ (\rho^* u^{*2} + p^*) \eta_x^* + (\rho^* u^* v^*) \eta_y^* \\ (\rho^* u^* v^*) \eta_x^* + (\rho^* v^{*2} + p^*) \eta_y^* \\ u^* (E_t^* + p^*) \eta_x^* + v^* (E_t^* + p^*) \eta_y^* \\ (\rho^* k^* u^*) \eta_x^* + (\rho^* k^* v^*) \eta_y^* \\ (\rho^* \varepsilon^* u^*) \eta_x^* + (\rho^* \varepsilon^* v^*) \eta_y^* \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ (t_{xx}^* + \rho\tau_{xx}^*)\xi_x^* + (t_{yx}^* + \rho\tau_{yx}^*)\xi_y^* \\ (t_{xy}^* + \rho\tau_{xy}^*)\xi_x^* + (t_{yy}^* + \rho\tau_{yy}^*)\xi_y^* \\ \bar{\alpha}\xi_x^* + \bar{\beta}\xi_y^* \\ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k^*}{\partial x^*}\xi_x^* + \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k^*}{\partial y^*}\xi_y^* \\ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*}\xi_x^* + \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*}\xi_y^* \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ (t_{xx}^* + \rho\tau_{xx}^*)\eta_x^* + (t_{yx}^* + \rho\tau_{yx}^*)\eta_y^* \\ (t_{xy}^* + \rho\tau_{xy}^*)\eta_x^* + (t_{yy}^* + \rho\tau_{yy}^*)\eta_y^* \\ \bar{\alpha}\eta_x^* + \bar{\beta}\eta_y^* \\ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k^*}{\partial x^*}\eta_x^* + \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k^*}{\partial y^*}\eta_y^* \\ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*}\eta_x^* + \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*}\eta_y^* \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_1^* = \begin{bmatrix} -\rho^*v^* \\ t_{yx}^* + \rho\tau_{yx}^* - \rho^*u^*v^* \\ t_{yy}^* + \rho\tau_{yy}^* - \tau_{ax}^* - \rho^*v^{*2} \\ \bar{\beta}^* - v^*(E_t^* + p^*) \\ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k^*}{\partial y^*} - \rho^*k^*v^* \\ \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} - \rho^*\varepsilon^*v^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_K^* - \rho^*\varepsilon^* - T_M^* \\ C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon^*}{k^*}P_K^* - C_{2\varepsilon}\rho^*\frac{\varepsilon^{*2}}{k^*} \end{bmatrix}$$

ここで,

$$\bar{\alpha} = u^*(t_{xx}^* + \rho\tau_{xx}^*) + v^*(t_{yx}^* + \rho\tau_{yx}^*) + \frac{S_{K2}}{S_{K10}}\frac{\gamma}{\gamma_0}\frac{1}{(\gamma-1)}\left(\frac{\mu^*}{Pr_0} + \frac{\mu_t^*}{Pr_{t0}}\right)\frac{\partial T^*}{\partial x^*}$$

$$\bar{\beta} = u^*(t_{xy}^* + \rho\tau_{xy}^*) + v^*(t_{yy}^* + \rho\tau_{yy}^*) + \frac{S_{K2}}{S_{K10}} \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{1}{(\gamma-1)} \left(\frac{\mu^*}{Pr_0} + \frac{\mu_t^*}{Pr_{t0}} \right) \frac{\partial T^*}{\partial y^*}$$

$$t_{xx}^* = \mu^* \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right), \quad t_{xy}^* = t_{yx}^* = \mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right), \quad t_{yy}^* = \mu^* \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right),$$

$$\rho\tau_{xx}^* = \mu_t^* \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) - \frac{2}{3} Re_0 \rho^* k^*, \quad \rho\tau_{xy}^* = \rho\tau_{yx}^* = \mu_t^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right),$$

$$\rho\tau_{yy}^* = \mu_t^* \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) - \frac{2}{3} Re_0 \rho^* k^*, \quad \tau_{ax}^* = 2(\mu^* + \mu_t^*) \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{v^*}{y^*} \right),$$

$$P_K^* = \rho\tau_{xx}^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho\tau_{xy}^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \rho\tau_{yx}^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \rho\tau_{yy}^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*}, \quad T_M^* = 2\rho^* \varepsilon^* \frac{k^*}{a^2},$$

また、標準型 k - ε モデルの定数として以下の値を使用している。

$$\sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.0, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad C_\mu = 0.09$$

3.4 数値解析手法

3.4.1 3次精度 MUSCL 型 TVD スキーム

本計算の離散化には差分法を用いた。しかし、差分法は滑らかな関数の微分に対しては適用が可能であるが、流れ場に衝撃波が存在する場合には数値的な振動を起こす可能性がある。本計算のように超音速の流れ場においては衝撃波が存在する可能性があるため、この影響を無視することができない。そこで、Harten [100]は高精度で数値的な振動がない TVD(Total Variation Diminishing)有限差分スキームを提案した。さらに、高次精度に拡張するために、TVD 条件を保持するリミター関数を導入して流束の傾きを制限し、衝撃波を高精度に捉えることに成功した。

本研究では、TVD 有限差分スキームを対流項に適用することで、衝撃波などの不連続な流れが存在する場合でも対応できるようにした。また、TVD 条件を満たしつつ、高精度化を維持する方法として、数値流束に MUSCL 法[101][102][103]を適用した。本章では、TVD 有限差分スキームについて説明を行う。なお、時間積分については陽解法を用いた時間分割法[104]を適用している。

3.4.2 二次元粘性問題への適用法

今回の計算対象である粘性を考慮した二次元流れにおける離散化について以下に示す。

$$\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + \frac{\partial E^*}{\partial \xi^*} + \frac{\partial F^*}{\partial \eta^*} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial R^*}{\partial \xi^*} + \frac{\partial S^*}{\partial \eta^*} \right) + H_1^* + \frac{1}{y^*} H_2^* \quad (3-112)$$

これを離散化すると、

$$\begin{aligned}
& \frac{U^{*n+1} - U^{*n}}{\Delta t^*} + \frac{E_{i+1/2,j}^{*n} - E_{i-1/2,j}^{*n}}{\Delta \xi^*} + \frac{F_{i,j+1/2}^{*n} - F_{i,j-1/2}^{*n}}{\Delta \eta^*} \\
&= \frac{1}{Re} \left(\frac{R_{i+1/2,j}^{*n} - R_{i-1/2,j}^{*n}}{\Delta \xi^*} + \frac{S_{i,j+1/2}^{*n} - S_{i,j-1/2}^{*n}}{\Delta \eta^*} \right) \\
&+ H_1^{*n} + \frac{1}{y} H_2^{*n} \\
U^{*n+1} &= U^{*n} - \frac{\Delta t^*}{\Delta \xi^*} (E_{i+1/2,j}^{*n} - E_{i-1/2,j}^{*n}) - \frac{\Delta t^*}{\Delta \eta^*} (F_{i,j+1/2}^{*n} - F_{i,j-1/2}^{*n}) \\
&+ \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\Delta t^*}{\Delta \xi^*} (R_{i+1/2,j}^{*n} - R_{i-1/2,j}^{*n}) + \frac{\Delta t^*}{\Delta \eta^*} (S_{i,j+1/2}^{*n} - S_{i,j-1/2}^{*n}) \right\} \\
&+ H_1^{*n} + \frac{1}{y} H_2^{*n}
\end{aligned} \tag{3-113}$$

ここで、数値流束は MUSCL 法による高次精度化を適用すると以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned}
E_{i+1/2,j}^{*n} &= \frac{1}{2} \left[E^* (U_{R,i+1/2,j}^{*n}) + E^* (U_{L,i+1/2,j}^{*n}) \right. \\
&\quad \left. - |A^*|_{i+1/2,j}^n (U_{R,i+1/2,j}^{*n} - U_{L,i+1/2,j}^{*n}) \right]
\end{aligned} \tag{3-114}$$

$$\begin{aligned}
F_{i,j+1/2}^{*n} &= \frac{1}{2} \left[F^* (U_{R,i,j+1/2}^{*n}) + F^* (U_{L,i,j+1/2}^{*n}) \right. \\
&\quad \left. - |A^*|_{i,j+1/2}^n (U_{R,i,j+1/2}^{*n} - U_{L,i,j+1/2}^{*n}) \right]
\end{aligned} \tag{3-115}$$

ここで、 $|A|$ は \mathbf{E} および \mathbf{F} の流束ヤコビアン行列である。また、以下の制限関数を導入し、解の単調性を維持するために以下の式を用いる。

$$U_{R,i+1/2,j}^{*n} = U_{i+1,j}^{*n} - \frac{1}{4} \left[(1 - \bar{\eta}) \Delta_{i+3/2,j}^{*n} + (1 + \bar{\eta}) \Delta_{i+1/2,j}^{*n} \right] \tag{3-116}$$

$$U_{L,i+1/2,j}^{*n} = U_{i,j}^{*n} - \frac{1}{4} \left[(1 - \bar{\eta}) \Delta^{**}_{i-1/2,j}^n + (1 + \bar{\eta}) \Delta^*_{i+1/2,j}^n \right] \quad (3-117)$$

$$U_{R,i,j+1/2}^{*n} = U_{i,j+1}^{*n} - \frac{1}{4} \left[(1 - \bar{\eta}) \Delta^*_{i,j+3/2}^n + (1 + \bar{\eta}) \Delta^{**}_{i,j+1/2}^n \right] \quad (3-118)$$

$$U_{L,i,j+1/2}^{*n} = U_{i,j}^{*n} - \frac{1}{4} \left[(1 - \bar{\eta}) \Delta^{**}_{i,j-1/2}^n + (1 + \bar{\eta}) \Delta^*_{i,j+1/2}^n \right] \quad (3-119)$$

となる．ここで，本計算では3次精度の風上差分スキームを適用するため $\eta=1/3$ とした．また，制限関数には以下の minmod 関数を用いる．

$$\begin{aligned} \Delta^*_{i+k,j} &= \text{minmod}(\Delta_{i+k,j}, \bar{\beta} \Delta_{i+k-1,j}) \\ \Delta^{**}_{i+k,j} &= \text{minmod}(\Delta_{i+k,j}, \bar{\beta} \Delta_{i+k+1,j}) \\ \Delta^*_{i,j+k} &= \text{minmod}(\Delta_{i,j+k}, \bar{\beta} \Delta_{i,j+k-1}) \\ \Delta^{**}_{i,j+k} &= \text{minmod}(\Delta_{i,j+k}, \bar{\beta} \Delta_{i,j+k+1}) \end{aligned} \quad (3-120)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{i+3/2,j} &= U_{i+2,j} - U_{i+1,j} \\ \Delta_{i+1/2,j} &= U_{i+1,j} - U_{i,j} \\ \Delta_{i-1/2,j} &= U_{i,j} - U_{i,j-1} \\ \Delta_{i,j+3/2} &= U_{i,j+2} - U_{i,j+1} \\ \Delta_{i,j+1/2} &= U_{i,j+1} - U_{i,j} \\ \Delta_{i,j-1/2} &= U_{i,j} - U_{i,j-1} \end{aligned} \quad (3-121)$$

となる．j 方向も同様である．

以上の離散化された式を本研究では Fortran 言語を用い，CFD コードの作成を行った．

3.5 フローチャート

以下に本計算プログラムの基本的な流れについて掲載する.

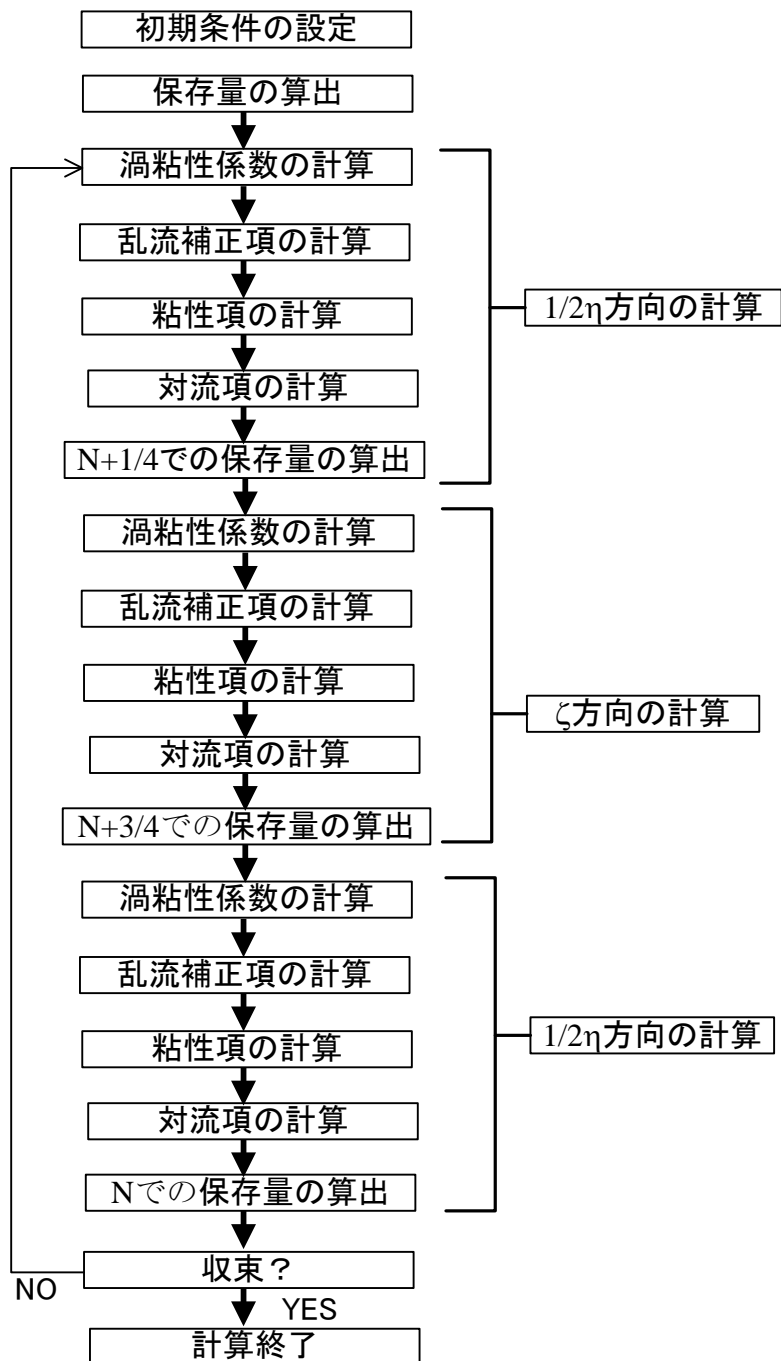


Fig. 3.4 Flow chart for present CFD

第4章 無次元質量流量に及ぼす背圧比とレイノルズ数の影響

4.1 計算手法及び条件

本計算では、2次元軸対称圧縮性ナビエ・ストークス方程式を用い、基礎方程式は有限差分法により離散化された。対流項には Roe 近似の Riemann 解法を応用した空間3次精度の MUSCL 型有限差分 TVD スキーム[98]を適用し、粘性項は2次精度の中心差分法により評価した。時間積分は2次精度の時間分割法を用いた。乱流モデルには標準型の $k-\epsilon$ モデル [99]を使用した。

Fig. 4.1 は本計算において使用した ISO 型トロイダルスロート・ベンチュリーノズル[56]を示す。ノズルの開き角は 3° である。また、実験[34]において臨界背圧比を算出する際のスロートから出口までの距離 L はスロート直径 D の10倍以上となっているが、実験で使用されたノズルの正確な長さが不明であるため、本計算では $L=3D \sim 30D$ で計算を行いノズルスロートから下流までの長さの影響を調べた。また、スロートでの曲率半径は $2D$ であ

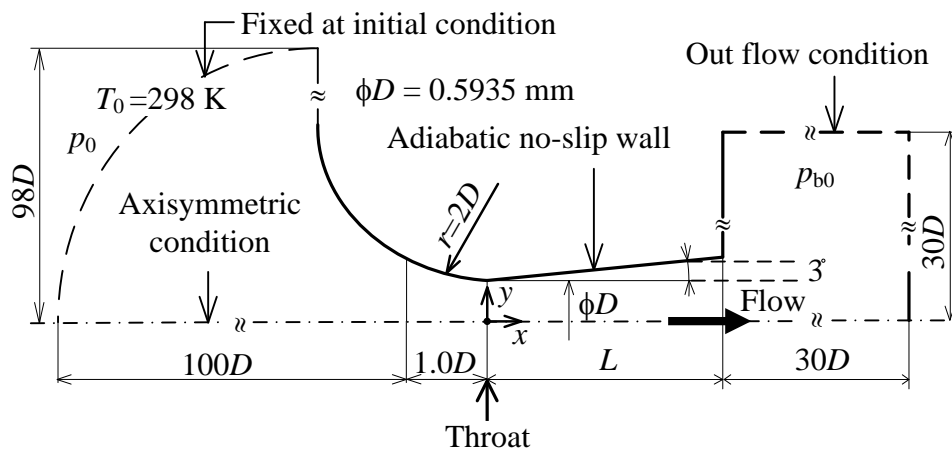


Fig. 4.1 Computational geometry

Table 4.1 Computational conditions

Re	[-]	$6.0 \times 10^2 \sim 1.1 \times 10^6$
p_0	[kPa]	13~23,000
p_{b0}/p_0	[-]	0.2~0.95

る. 本計算で使用した格子数は 260×121 である. 作動気体には水素を用いた. Table 4.1 は計算条件を示す. スロートでのレイノルズ数 Re の範囲は $6.0 \times 10^2 \sim 1.1 \times 10^6$ の範囲とし, その値に伴い入口全圧を 13 kPa~23 MPa の間で変化させている. 下流の背圧 p_{b0} は入口全圧 p_0 の 0.2~0.95 倍となるように設定し, 入口温度 T_0 は 298 K の一定とした.

4.2 格子依存性

Fig. 4.2 は本計算のメッシュの妥当性を示すために、計算により得られた流出係数 C_d とレイノルズ数 Re の関係を実験結果[34]とともに示したものである。図より、本計算で用いた格子数 280×141 と 260×121 は実験結果とほぼ一致しており、本計算結果が妥当であると言える。よって、本計算では計算時間を考慮して格子数は 260×121 とした。なお、第4章以降の計算においても、本計算結果を考慮して格子数は 260×121 としている。

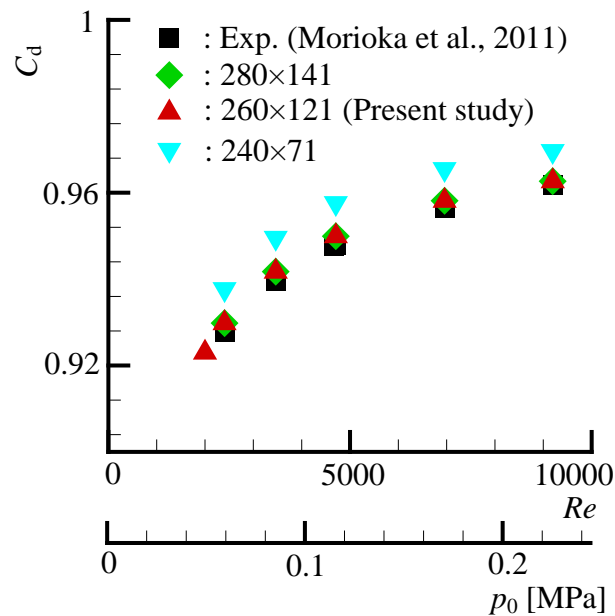


Fig. 4.2 Mesh dependency (Hydrogen)

4.3 無次元質量流量に及ぼす背圧比の影響

Fig. 4.3 は、スロートから出口までの長さ L が $3D$ の場合の各レイノルズ数における水素の無次元質量流量と背圧比の関係を示す。横軸は、入口全圧 p_0 と背圧 p_{b0} の比 p_{b0}/p_0 を、縦軸は無次元質量流量 $\sigma(=\rho u/\rho_0 a_0)$ である。Fig. 4.3 より、レイノルズ数が増加するにつれて、無次元質量流量も増加していることがわかる。また、 $Re=384,650$ と $Re=153,961$ では、無次元質量流量がほぼ同じ値となっていることがわかる。これは、レイノルズ数の増加に伴い、流路断面に占める境界層の割合が小さくなり、無次元質量流量に及ぼす境界層の影響が小さくなったためであると考えられる。さらに、本計算では $Re=613$ では $p_{b0}/p_0=0.4$ 、 $Re=3,100$ では $p_{b0}/p_0=0.5$ 、 $Re=384,650$ および $Re=1,153,961$ では、 $p_{b0}/p_0=0.8$ より背圧比が小さくなると、無次元質量流量が一定になっていることがわかる。これは流れが臨界状態になったためである。

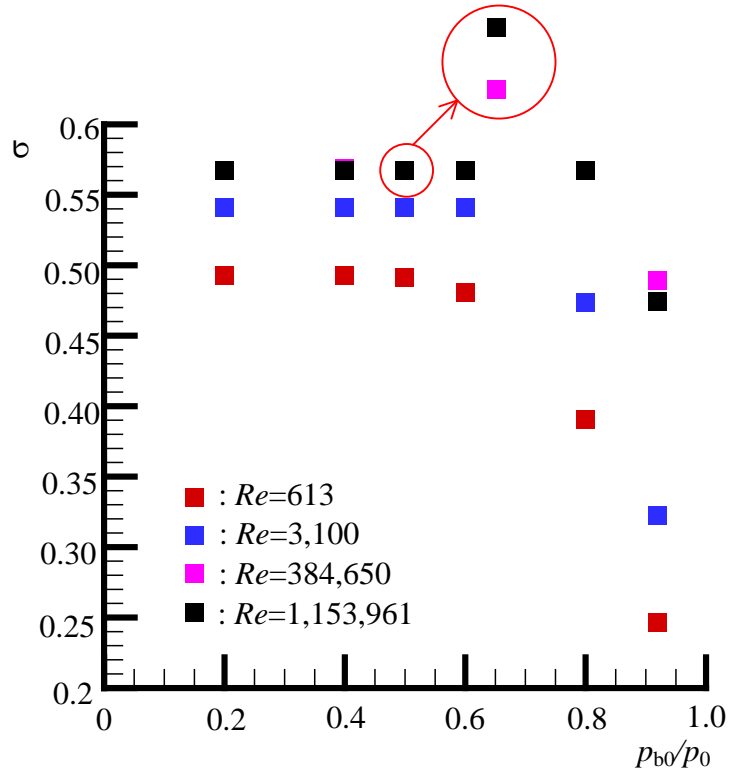


Fig. 4.3 Effect of back pressure ratio on non-dimensional mass flow rate (Hydrogen, $L=3D$)

4.4 臨界背圧比に及ぼすレイノルズ数とノズル形状の影響

Fig. 4.4 は、レイノルズ数と臨界背圧比の関係を示す。横軸がレイノルズ数、縦軸が臨界背圧比である。ここで、臨界背圧比 $(p_{b0}/p_0)_{cr.}$ は Fig. 4.3 において背圧比を減少させても無次元質量流量が一定になるときの背圧比としている。また、作動気体に窒素を用いた場合の実験結果[55](■, $Re < 1.0 \times 10^4$)と作動気体に水素を用いた場合の実験結果[34] (■, $Re > 1.0 \times 10^5$)も掲載している。なお、実験におけるノズルスロートから出口までの距離については、 $Re < 1.0 \times 10^4$ では不明であり、 $Re > 1.0 \times 10^5$ では $10D$ 以上となっていることから、今回はノズルスロートから出口までの距離を $3D \sim 30D$ まで設定し、その影響を調査した。

Fig. 4.4 を見てみると、臨界背圧比はレイノルズ数の増加とともに増加していることがわかる。これは、高レイノルズ数流れ場では低レイノルズ数の流れ場と比較して、ノズル上流側の圧力を高くしなくても、臨界ノズルが流量計として作動することを意味している。

また、 $L=3D$ と $30D$ の場合の結果を比較すると、 $L=30D$ のほうが $L=3D$ の場合と比較し

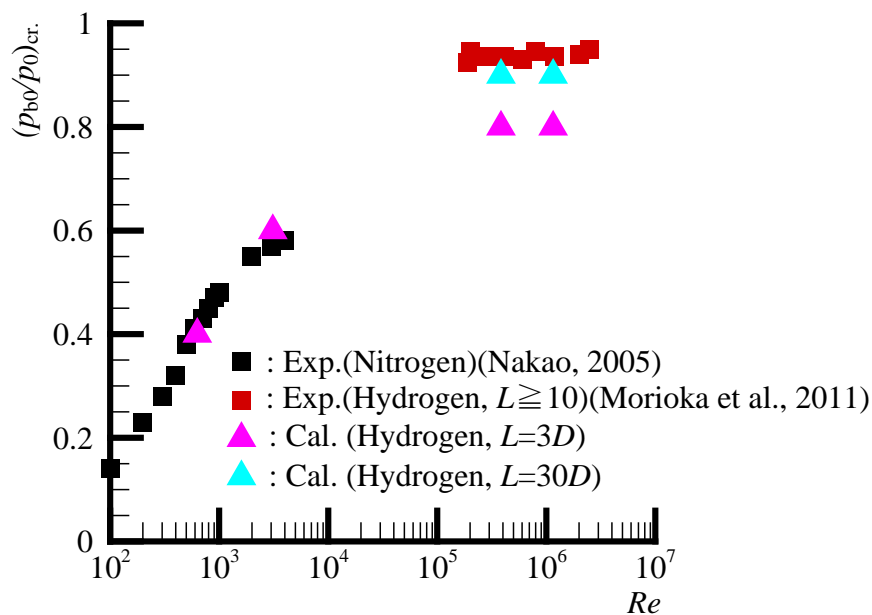


Fig. 4.4 Effect of Reynolds number on critical back pressure ratio (Hydrogen)

て臨界背圧比が大きくなっていることがわかる。このことから臨界背圧比はノズルスロートより下流側の長さに大きく依存することがわかる。

以上の結果から、水素ステーション等で水素供給設備の設計を行う際に臨界ノズルの臨界背圧比を CFD を使ってあらかじめ算出しておけば、ノズル上流側の圧力上昇に使う圧縮機の性能向上や、配管の強度を向上にかかるコストを出来るだけ抑えることができ、実用上のメリットが大きいと考えられる。

4.5 まとめ

以上のことから、以下の結論を得ることができた。

1. 作動気体が水素の場合、レイノルズ数が低い領域では無次元質量流量はレイノルズ数の増加に伴い増加する。しかしながら、レイノルズ数が高い領域では、レイノルズ数が増加しても無次元質量流量は増加しない。これは、断面に占める境界層の割合が小さくなるためである。
2. 臨界背圧比はレイノルズ数の増加とともに臨界背圧比は大きくなることを CFD によって示すことができた。
3. 臨界背圧比はノズルスロートから出口までの長さが長くなるほど大きくなった。

第5章 ノズル内の質量流量に及ぼす背圧変動の影響

5.1 計算手法及び条件

Fig. 5.1 は本計算において使用した ISO 型トロイダルスロート・ベンチュリーノズル[56]を示す。ノズルの開き角は 3° であり，スロートから出口までの距離がスロート直径 $D(=0.5935 \text{ mm})$ の 3 倍となっている。また，スロートの曲率半径は $2D$ である。ノズル出口から下流の急拡大部は，長さが $30D$ ，高さがノズル中心線より垂直方向に $30D$ の大きさを有している。図中の K は，静圧の変動を調べるための測定点であり，スロートの位置を原点とした場合に $-0.1D$ の位置に設置してある。本計算で使用した格子数は 260×121 である。作動気体には水素を用い，下流の背圧 p_{b0} は入口全圧 p_0 の 0.5 倍となるように設定し，入口温度 T_0 は 298 K の一定とした。

Table 5.1 は本計算における計算条件を示す。本計算において，スロート上流への下流からの圧力じょう乱の伝播およびスロートでの無次元質量流量 $\sigma(=pu/\rho_0 a_0)$ (a :音速，添え字 0: ノズル上流のよどみ点状態)に及ぼすレイノルズ数の効果を調べる場合には入口全圧 p_0 を

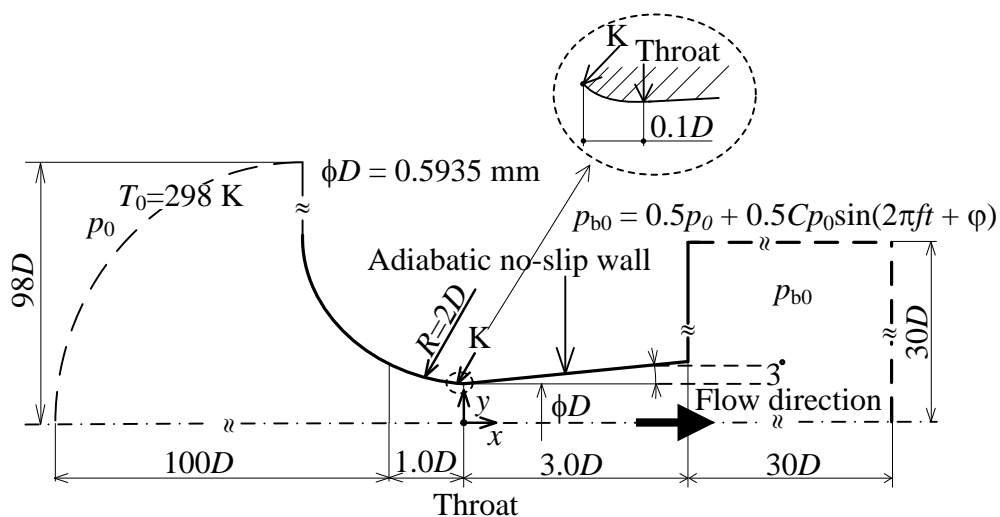


Fig. 5.1 Computational geometry

Table 5.1 Computational conditions

Working gas	Hydrogen
Re	$5.0 \times 10^2 - 1.0 \times 10^5$
C	0.01 - 0.1
f [kHz]	0.1 - 300

15 kPa～202.6 kPa($Re=6.0 \times 10^2 \sim 8.3 \times 10^4$)まで変化させた。ここで、レイノルズ数 Re はノズルスロートにおけるレイノルズ数を示し、ノズル上流のよどみ点状態での粘性係数、理論質量流量、およびスロート直径より定義されている(式(2-1))。

ノズルスロートでの流れのチョーキングに及ぼす圧力変動の影響を調べる場合は、下流の境界条件として、Fig. 5.1 に示す C を振幅係数とし、背圧の 0.01～0.1 倍になるように与えた。また、背圧変動の周波数 f を 0.1 kHz～300 kHz を与えた。また、ノズル中心軸上では対象条件を、壁面では断熱、滑りなしの条件を適用した。

5.2 ノズル内の質量流量に及ぼす背圧変動の振幅の影響

Fig. 5.2(a)と(b)は、周波数 f が 30 kHz で、レイノルズ数 Re がそれぞれ 1.5×10^3 , 1.5×10^4 の場合の Fig. 5.1 で示すノズル壁面上の位置 K における静圧の変化を示す。なお、それぞれの図中には振幅係数 C が 0.01 と 0.05 の場合を示す。図の横軸は時間 t s を、縦軸は局所静圧 p をよどみ点圧力 p_0 で無次元化した値を示す。Fig. 5.2 (a)と(b)より、レイノルズ数が低い場合(Fig. 5.2(a)), 振幅係数 C が 0.01 では点 K においてわずかな圧力変動が見られるが、 $C=0.05$ の場合には $C=0.01$ と比較して大きな圧力変動が確認できる。一方、レイノルズ数が高い場合(Fig. 5.2(b))においては、振幅係数 C が 0.01 と 0.05 のいずれの場合においても点 K において圧力変動は見られない。

Fig. 5.3(a)と(b)は、周波数 f が 60 kHz で、それぞれレイノルズ数 Re が 1.5×10^3 と 1.5×10^4 の場合の Fig. 5.1 で示すノズル壁面上の位置 K における静圧の変化を示す。なお、それぞれの図中には振幅係数 C が 0.01 と 0.05 の場合を示している。図の横軸と縦軸は Fig. 5.2 と同様である。Fig. 5.3(a)と(b)より、レイノルズ数が低い場合(Fig. 5.3(a)), 振幅係数 C が 0.01 と 0.05 のいずれの場合においても、点 K において圧力の変動が観察されることがわかる。また、振幅係数が大きくなると、点 K において測定される圧力変動の振幅も大きくなることがわかる。一方、レイノルズ数が高い場合(Fig. 5.3(b)), 振幅係数 C が 0.01 の場合は点 K において圧力の変動が観測されないのに対し、 $C=0.05$ の場合には点 K において圧力変動が観察される。

本計算条件で用いたレイノルズ数の範囲では、下流でマッハ数が 1 となる領域が存在するが、特に圧力変動が存在する場合には、圧力変動はスロート上流まで伝わり、一般的な超音速ノズルにおけるチョーキング現象とは異なることがわかる。この変動がスロート上流へ伝播する原因は、境界層の亜音速領域を通して、下流側の圧力変動の影響がスロート上流へ伝わるためであると考えられる。

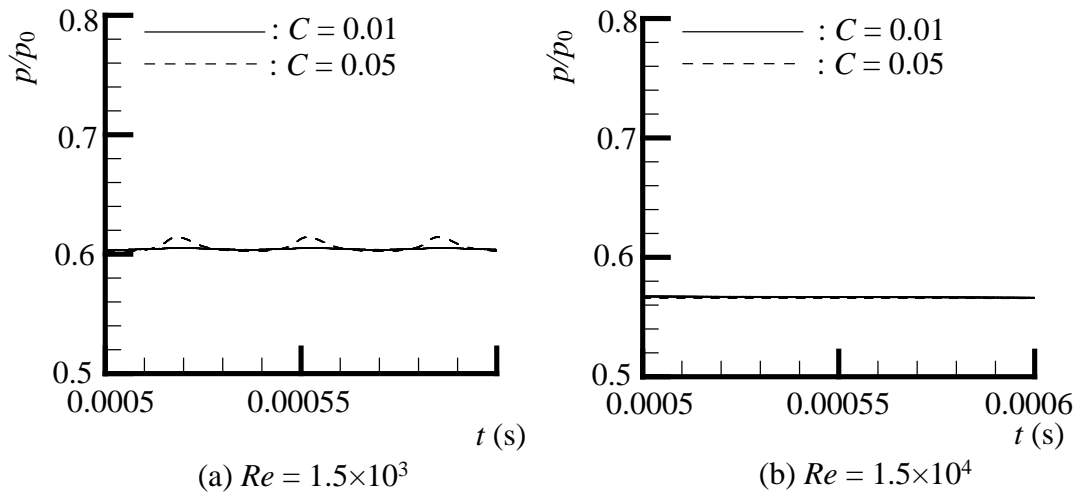


Fig. 5.2 Pressure-time histories at point K ($f=30$ kHz)

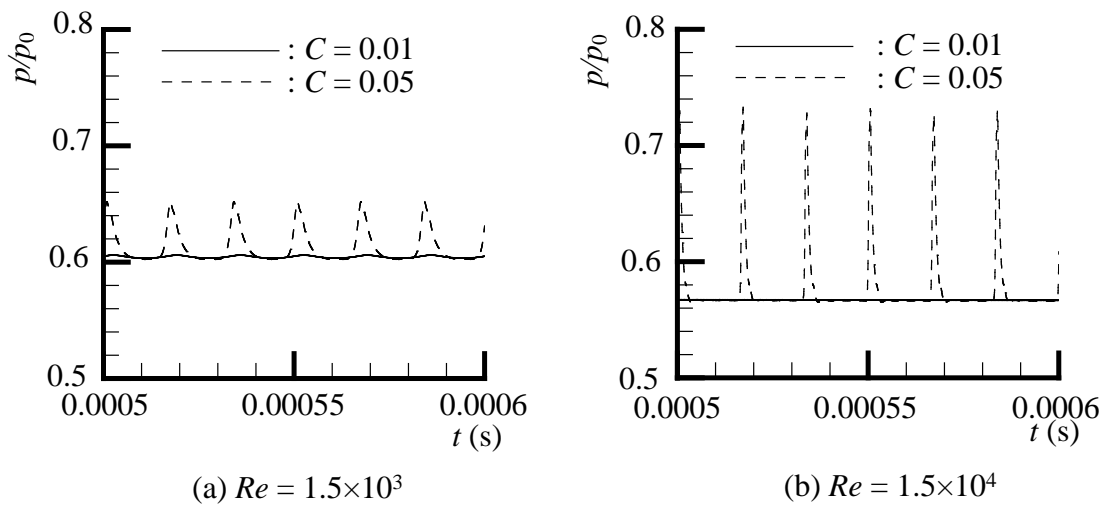


Fig. 5.3 Pressure-time histories at point K ($f=60$ kHz)

Fig. 5.4(a)と(b)は、それぞれ周波数 f が 30 kHz と 120 kHz の場合で、レイノルズ数と振幅係数の組み合わせがスロートでの無次元質量流量の変動の有無に及ぼす影響を示す。図中の横軸はスロートにおけるレイノルズ数 Re 、縦軸は振幅係数 C を示す。また、図中の○印は無次元質量流量の変動が確認できる場合、×は無次元質量流量の変動が確認できない場合を示す。Fig. 5.4 (a)と(b)より、振幅係数 C が一定の場合、レイノルズ数の減少に伴い、ノズル下流からの圧力変動の波がスロート上流へ伝播しやすくなることがわかる。また、レイノルズ数が一定の場合は、振幅係数の増加に伴い、圧力変動の波がスロートより上流側

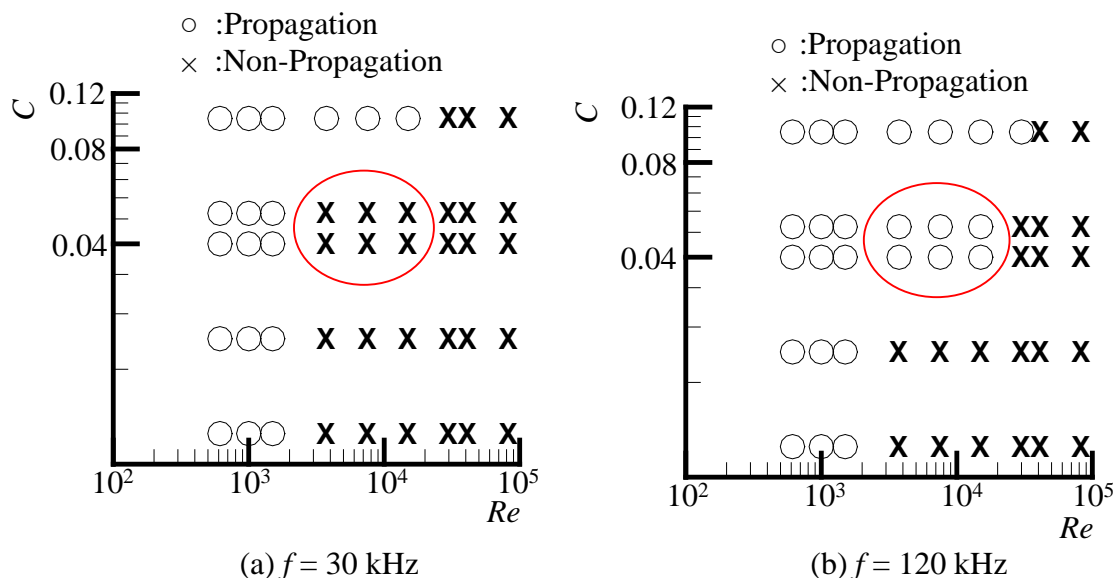


Fig. 5.4 Effects of Reynolds number and amplitude on fluctuation of non-dimensional mass flow rate

へ伝播しやすくなることがわかる。さらに、Fig. 5.4(a)と(b)を比較すると、振幅係数とレイノルズ数が同じ場合でも、周波数が大きくなるとスロート下流からの圧力変動の波がスロートより上流へ伝播しやすくなる条件がある(赤丸の範囲)ことがわかる。この原因については、後に議論する。

Fig. 5.5 (a)と(b)は、周波数 f が30 kHzで、それぞれレイノルズ数が $Re=1.5 \times 10^3$ と $Re=1.5 \times 10^4$ の場合のノズルスロートでの無次元質量流量 σ の時間変化を示す。図の横軸は時間 t を、縦軸はスロートでの無次元質量流量 σ を示す。Fig. 5.5(a)と(b)より、レイノルズ数が低い場合(Fig. 5.5(a)), 振幅係数 C が0.01及び0.05のいずれの場合においてもスロートでの無次元質量流量 σ に変動が見られる。一方、レイノルズ数が高い場合(Fig. 5.5(b)), 振幅係数 C が0.01と0.05のいずれの場合においてもスロートでの無次元質量流量 σ に変動は観察されない。

Fig. 5.6(a)と(b)は、周波数 f が60 kHzで、それぞれ $Re=1.5 \times 10^3$ と 1.5×10^4 の場合のノズルスロートでの無次元質量流量 σ の時間変化を示す。図の横軸と縦軸は、Fig. 5.5と同様で

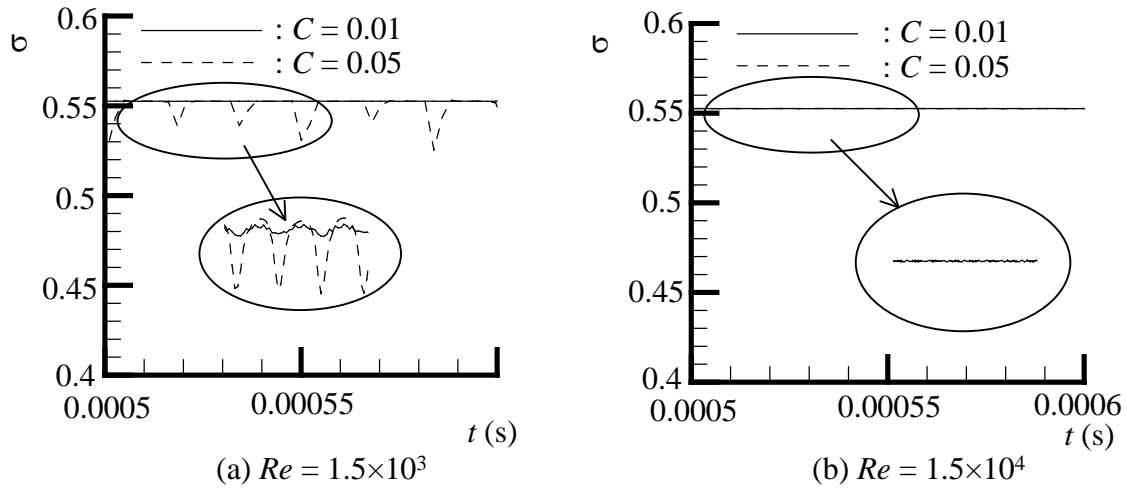


Fig. 5.5 Time histories of non-dimensional mass flow rate ($f=30$ kHz)

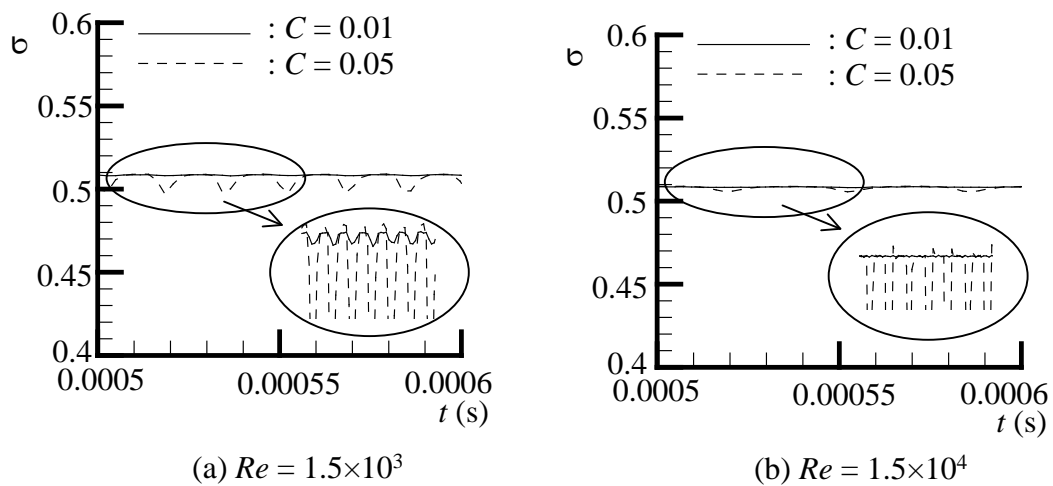


Fig. 5.6 Time histories of non-dimensional mass flow rate ($f=60$ kHz)

ある。Fig. 5.6(a)と(b)より、レイノルズ数が低い場合(Fig. 5.6(a))、振幅係数 A が 0.01 及び 0.05 のいずれの場合においてもスロートでの無次元質量流量に変動が見られる。また、レイノルズ数が高い場合(Fig. 5.6 (b))においては、振幅係数 C が 0.05 ではスロートでの無次元質量流量に変動が見られるが、 C が 0.01 の場合には変動は見られなかった。

Fig. 5.7(a)と(b)、Fig. 5.8(a)と(b)は、それぞれ振幅係数が $C=0.01$ と $C=0.05$ の場合の音速線の時間変化を示している。周波数は $f=30$ kHz である。Fig. 5.7(a)と Fig. 5.8(a)が $Re=1.5 \times 10^3$ の場合、Fig. 5.7(b)と Fig. 5.8(b)は $Re=1.5 \times 10^4$ の場合である。図を見てみると、 $Re=1.5 \times$

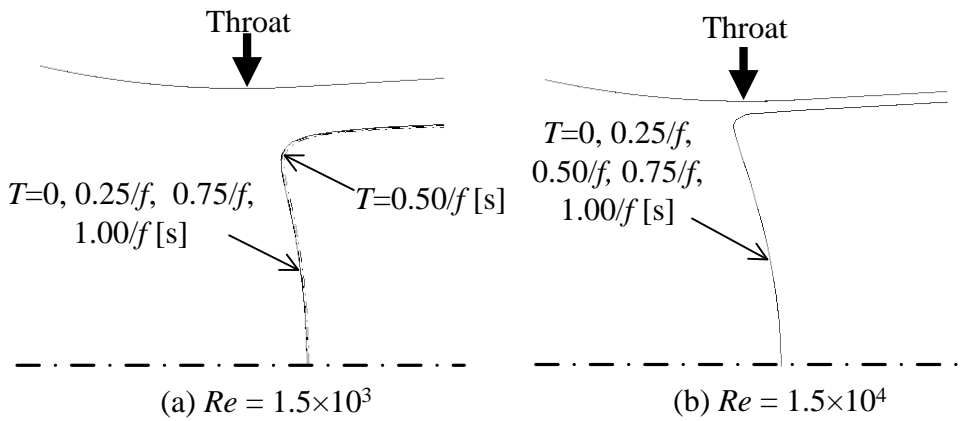


Fig. 5.7 Time-dependent on sonic line ($C=0.01, f=30$ kHz)

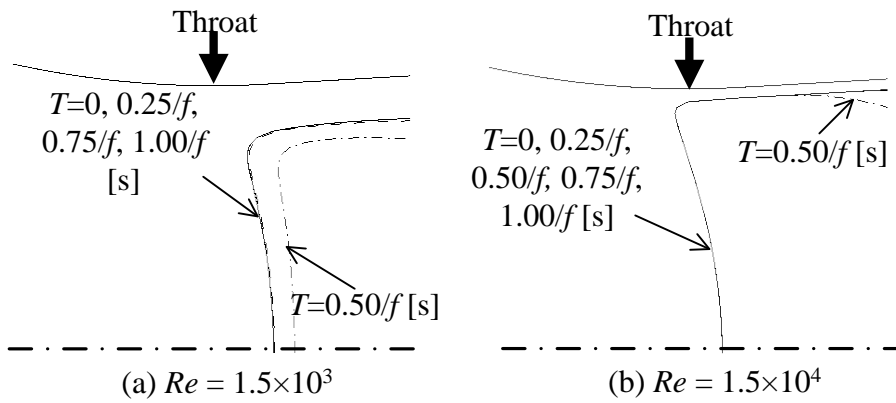


Fig. 5.8 Time-dependent on sonic line ($C=0.05, f=30$ kHz)

10^3 の場合、振幅係数が $C=0.01$ (Fig. 5.7(a))では、音速線にわずかな変動が見られるのに対し、 $C=0.05$ (Fig. 5.8(a))では音速線の位置が大きく変動していることがわかる。一方、 $Re=1.5 \times 10^4$ の場合、 $C=0.01$ (Fig. 5.7(b))と $C=0.05$ (Fig. 5.8(b))のどちらの場合においても $Re=1.5 \times 10^3$ と同様な音速線の変動は見られなかった。

Fig. 5.9(a)と(b), Fig. 5.10(a)と(b)は、それぞれ振幅係数が $C=0.01$ と振幅係数が $C=0.05$ の場合の音速線の時間変化を示している。周波数は $f=60$ kHz である。Fig. 5.9(a)と Fig. 5.10(a)が $Re=1.5 \times 10^3$ の場合、Fig. 5.9(b)と Fig. 5.10(b)が $Re=1.5 \times 10^4$ の場合である。図を見てみると、 $Re=1.5 \times 10^3$ の場合、Fig. 5.7(a)および Fig. 5.8(a)の場合と同様に、振幅係数が $C=0.01$ (Fig. 5.9(a))では音速線の変動がわずかであるのに対し、 $C=0.05$ (Fig. 5.10(a))では、音速線の位置

が大きく変動していることがわかる。一方、 $Re=1.5 \times 10^4$ の場合、 $C=0.01$ (Fig. 5.9(b))で音速線の変動は見られなくなったが、 $C=0.05$ (Fig. 5.10(b))においては $f=30$ kHz の場合(Fig. 5.8(b))とは異なり、音速線が変動していることがわかる。この結果から、背圧変動の周波数がなんらかの影響を及ぼしていると考えられる。

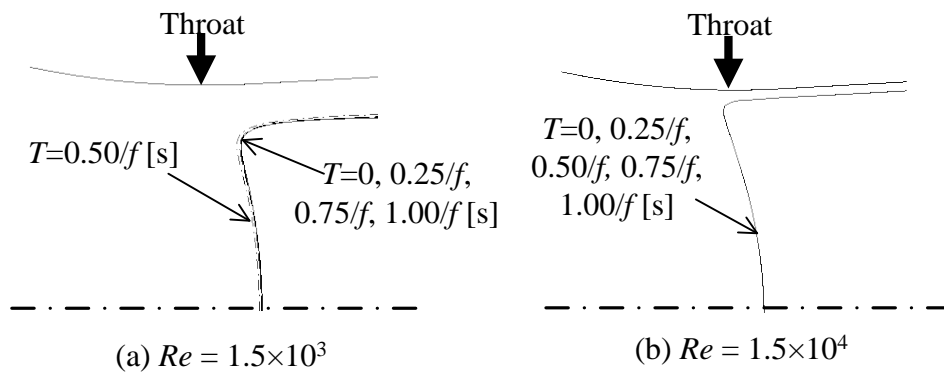


Fig. 5.9 Time-dependent on sonic line ($C=0.01, f=60$ kHz)

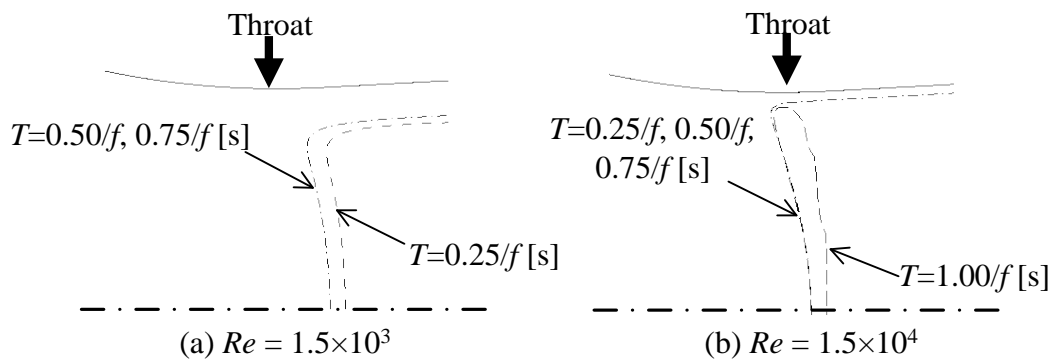


Fig. 5.10 Time-dependent on sonic line ($C=0.05, f=60$ kHz)

5.3 ノズル内の質量流量に及ぼす背圧変動の周波数の影響

Fig. 5.11 は、振幅係数 C が 0.05 の場合のレイノルズ数と振幅係数の組み合わせがスロートでの無次元質量流量に及ぼす影響を示す。図中の横軸はスロートにおけるレイノルズ数 Re 、縦軸は下流からの圧力変動の周波数 f を示す。また、図中の○印はスロートにおいて質量流量の変動が確認できる場合、×は質量流量の変動が確認できない場合を示す。Fig. 5.11 より、周波数 f が一定の場合、レイノルズ数の増加に伴い、ノズル下流方の圧力変動がスロート上流側へ伝播しやすくなることがわかる。また、レイノルズ数が一定の場合、約 120 KHz 付近において下流側の圧力変動の影響が上流側は伝播しやすくなることがわかる。これはノズル内の衝撃波が約 120 kHz で振動しており、この衝撃波の振動と下流からの圧力変動の波による変動が共振したことで振幅が大きくなったためであると考えられる。

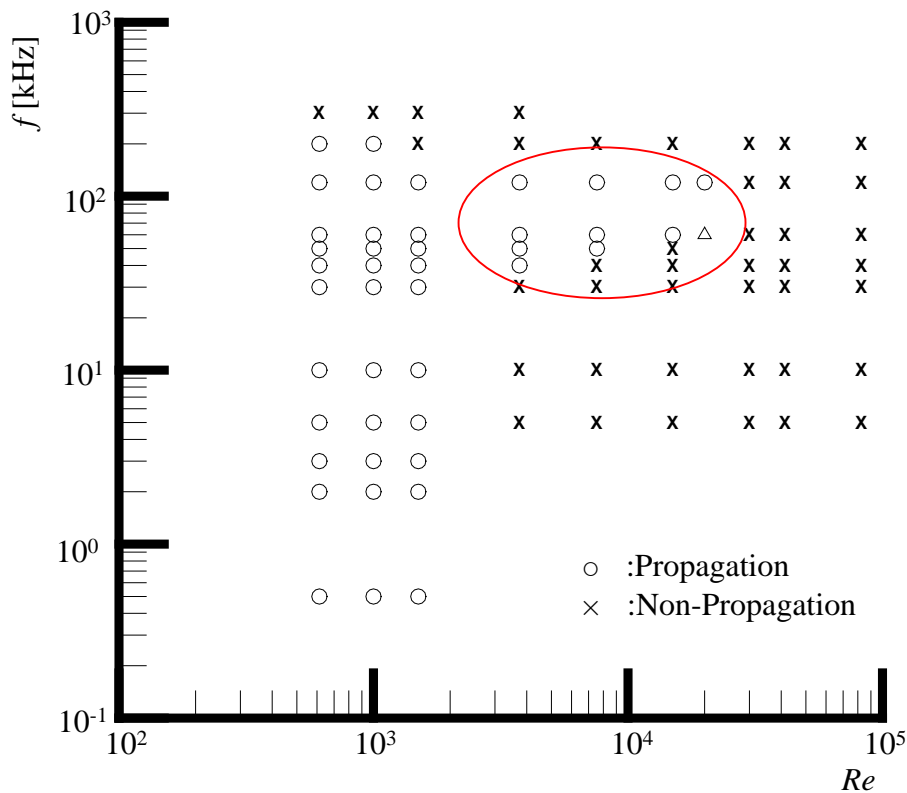


Fig. 5.11 Effect of frequency on fluctuation of non-dimensional mass flow rate ($C=0.05$)

5.4 まとめ

以上のことから，以下の結論を得ることができる．

1. 作動気体が水素を用いた場合，レイノルズ数が低い条件で臨界ノズルを使用すると，背圧変動の影響によって質量流量が変動することがわかった．
2. 背圧変動の振幅が大きくなるほど，ノズル内の質量流量は変動しやすくなることがわかった．
3. レイノルズ数が高い場合であっても，背圧変動の周波数の値によっては，レイノルズ数が低い場合と同様に質量流量に変動が生じることがわかった．

第6章 高レイノルズ数流れの流出係数に及ぼす実在気体効果の影響

6.1 計算手法及び条件

本計算では、2次元軸対称圧縮性ナビエ・ストークス方程式を用い、基礎方程式は有限差分法により離散化された。なお、対流項には Roe 近似 Riemann 解法を応用した空間3次精度の MUSCL 型有限差分 TVD スキーム[98]を適用し、粘性項は2次精度の中心差分法により評価した。時間積分は、2次精度の時間分割法を用いた。乱流モデルには標準型 $k-\epsilon$ モデル[99]を使用した。さらに、実在気体効果を考慮する場合には、Redlich-Kwong[71], Lee-Kesler[88, 89], Peng-Robinson[90][91][93][93][94]の状態方程式を用いた。

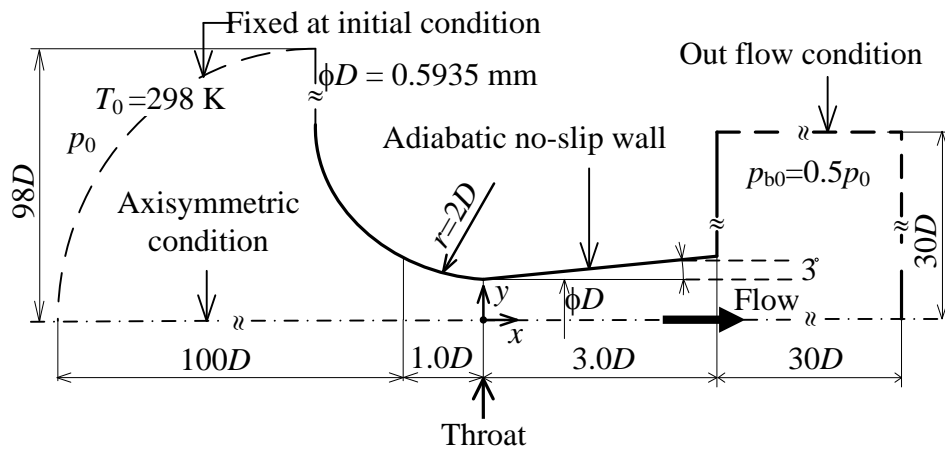


Fig. 6.1 Computational geometry

Table 6.1 Computational conditions

	Re_{th}	p_0 [MPa]	T_0 [K]
H ₂	$2.4 \times 10^3 - 2.9 \times 10^6$	0.058 - 70	298
N ₂	$5.4 \times 10^3 - 7.7 \times 10^5$	0.070 - 10	
He	$1.2 \times 10^3 - 1.1 \times 10^6$	0.043 - 40	

Fig. 6.1 は本計算において使用した ISO 型トロイダルスロート・ベンチュリーノズル[56]を示す。ノズルの開き角は 3° であり，スロートから出口までの距離がスロート直径 $D(=0.5935 \text{ mm})$ の 3 倍となっている。また，スロートでの曲率半径は $2D$ である。本計算で使用した格子数は 260×121 である。作動気体には水素，窒素，ヘリウムを用い，下流の背圧 p_{b0} は入口全圧 p_0 の 0.5 倍となるように設定し，入口温度 T_0 は 298 K の一定とした。

なお，Table 6.1 は本計算で使用したレイノルズ数 Re の範囲を示しており，よどみ点状態の圧力を変化させることで設定した[6]。

6.2 水素の流出係数に及ぼす状態方程式の影響

Fig. 6.2 は、理想気体の状態方程式と Redlich-Kwong, Lee-Kesler, Peng-Robinson の実在気体の状態方程式を使用した場合のノズル上流側のよどみ点状態のレイノルズ数および圧力と密度の関係を示している。Fig. 6.2 より、レイノルズ数が大きくなるにつれて、実在気体の上流側のよどみ点状態の密度は理想気体の場合との差が大きくなっており、値は理想気体の場合と比較して小さくなっている。また、実在気体の状態方程式が異なると、高レイノルズ数状態での密度の値も異なっていることがわかる。よって、この密度の違いがノズルの流出係数に影響を及ぼすと考えられる。

Fig. 6.3 は、理想気体の状態方程式と Redlich-Kwong, Lee-Kesler, Peng-Robinson の実在気体の状態方程式を使用した場合のノズルの流出係数 C_d とレイノルズ数の Re の関係を示す。なお、図中には、実験結果[34]と Kim らの結果[49]も示している。Fig. 6.3 より、実在気体効果を考慮した場合、 $Re=5.0 \times 10^4$ 近傍から理想気体の流出係数の結果からずれ始め、

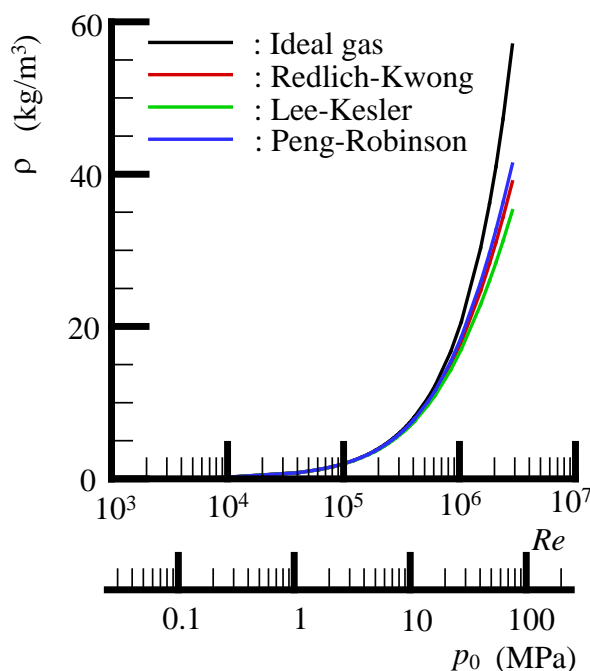


Fig. 6.2 Effect of equation of state on density upstream of the nozzle (Hydrogen)

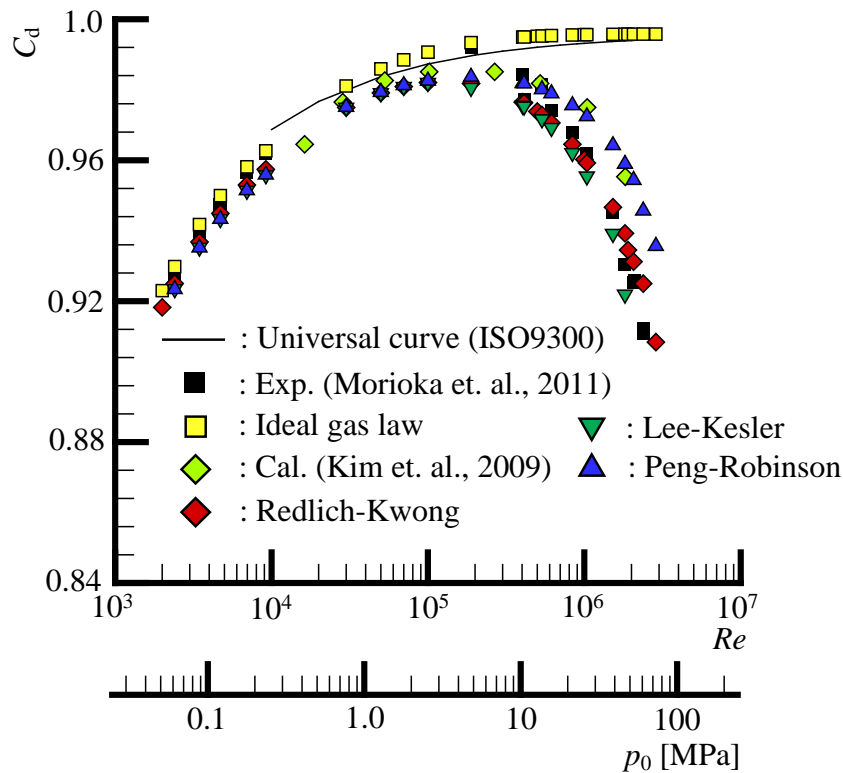


Fig. 6.3 Effect of equation of state on coefficient of discharge (Hydrogen)

レイノルズ数の増加とともに減少していくことがわかる。また、Redlich-Kwong と Lee-Kesler の状態方程式を用いた場合の流出係数は、Peng-Robinson の状態方程式による結果と比較して高レイノルズ数の範囲($Re > 5.0 \times 10^5$)で実験結果の傾向とよく一致していることがわかる。なお、実在気体効果を考慮した状態方程式として本研究と同じ Redlich-Kwong の状態方程式を用いた Kim らの計算結果[49]と比較しても本手法による結果は実験結果とよく一致している。さらに、 $Re = 2.0 \times 10^5$ における流出係数は実験結果よりも小さいが、理想気体の状態方程式を用いた場合の流出係数は $Re = 2.0 \times 10^5$ において実験結果とよく一致している。

これらの結果より、以下の考察では実在気体の状態方程式として Redlich-Kwong の状態方程式を使用した場合の結果について示す。

Fig. 6.4 は Redlich-Kwong の状態方程式を用いた場合の実験と計算の流出係数を比較したものである。まず、レイノルズ数が低い場合、計算により算出された流出係数は実験との

差が 0.5 % 以内となっており、今回開発した CFD コードを使って高精度に予測できていることがわかる。また、レイノルズ数が高い場合は実験との差が最大で約 1.5% となっており、実在気体効果が無視できない領域でも、CFD を使って高い精度で流出係数を予測できることを示している。

以上の結果から、ノズルの設計の際に CFD を使うことで流出係数をある程度予測でき、ノズルの試作等にかかるコスト削減に繋がることがわかる。

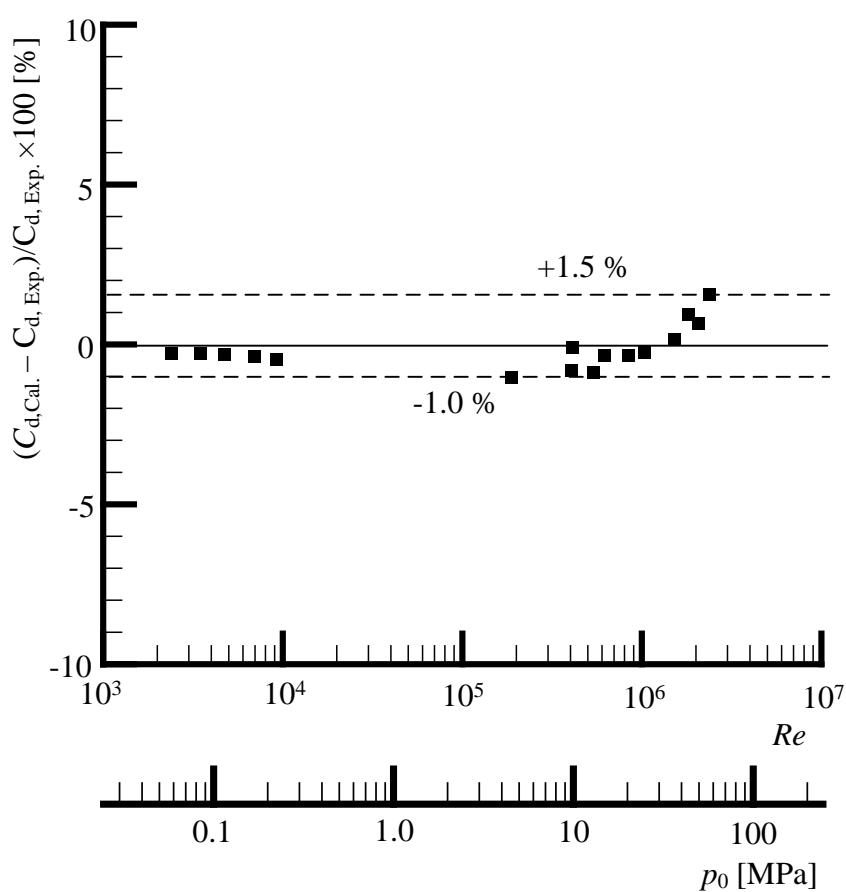


Fig. 6.4 Difference of coefficient of discharge between experiment and calculation (Hydrogen)

6.3 流出係数に及ぼすガス種の影響

Fig. 6.5 は、作動気体が H_2 、 N_2 および He で Redlich-Kwong の状態方程式を用いた場合のノズルスロートでの圧縮係数 z とレイノルズ数 Re の関係を示す。Fig. 6.5 より、 H_2 と He の場合、 $Re > 5.0 \times 10^4$ において圧縮係数 z がレイノルズ数の増加に伴い増加することがわかる。これは、実在気体効果がレイノルズ数の増加とともに強くなることを意味する。一方、 N_2 の場合、 $5.0 \times 10^4 < Re < 1.0 \times 10^6$ における圧縮係数 z はレイノルズ数の増加に伴い減少し ($z < 1.0$)、 $Re > 1.0 \times 10^6$ においてレイノルズ数の増加に伴い増加していることがわかる。これは、実在気体効果がレイノルズ数の増加とともに強くなった後 ($5.0 \times 10^4 < Re < 1.0 \times 10^6$)、 $Re > 1.0 \times 10^6$ でレイノルズ数の増加とともに弱くなることを意味する。

Fig. 6.6 は、作動気体が H_2 、 N_2 および He の場合のレイノルズ数 Re と流出係数 C_d の関係を示す。Fig. 6.6 より、レイノルズ数が低い場合はガス種が異なっても流出係数の値に違いは見られないが、レイノルズ数が高い領域では流出係数の値がガス種によって異なる

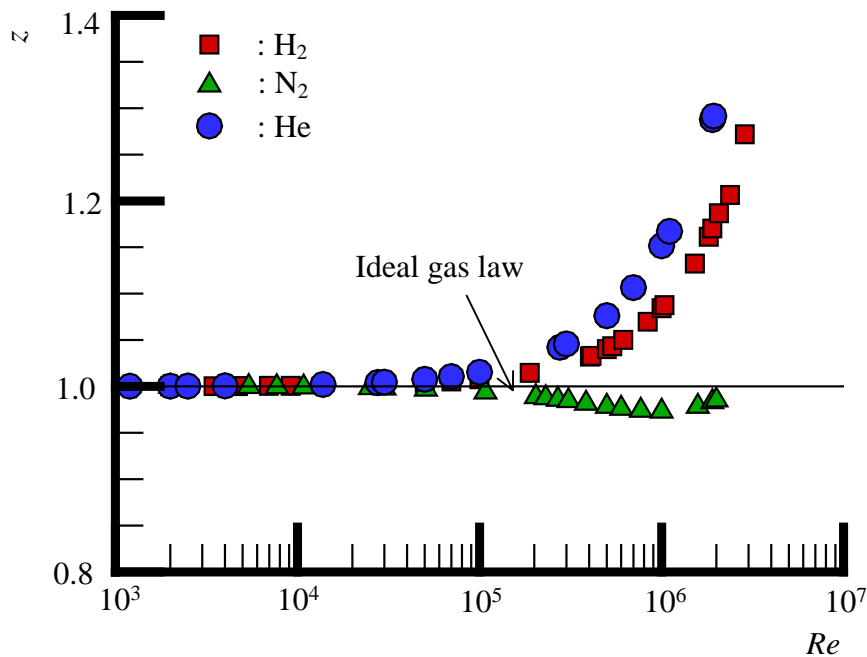


Fig. 6.5 Effect of kind of gases on compressibility factor on nozzle throat

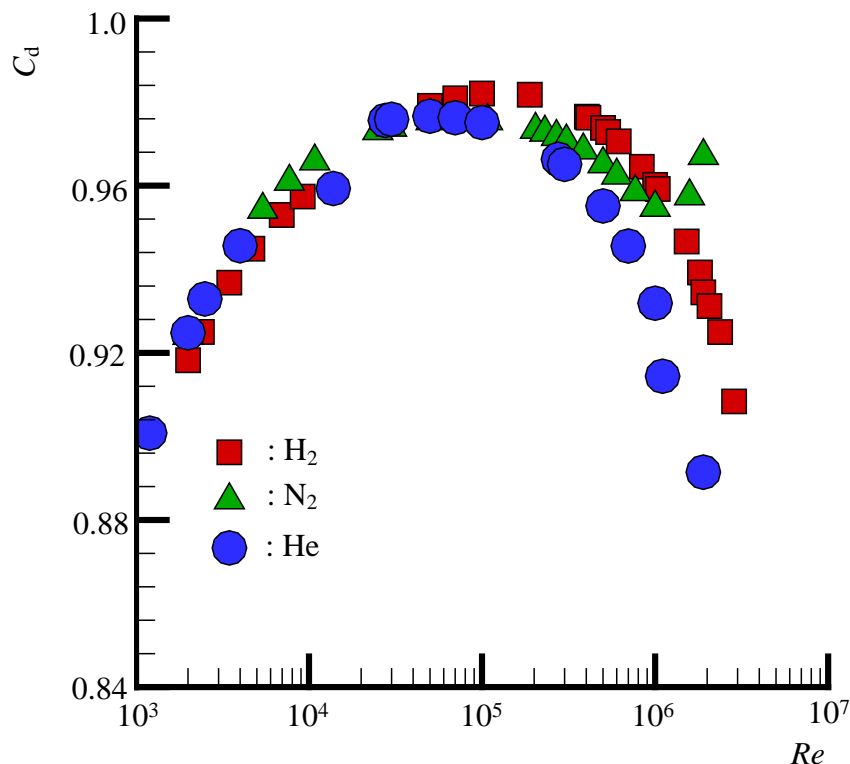


Fig. 6.6 Effect of kind of gases on coefficient of discharge

ことがわかる。これは、Fig. 6.5 に示す圧縮係数の値の違いによるものと考えられる。また、He の流出係数は $Re > 5.0 \times 10^4$ において H₂ と同様にレイノルズ数の増加とともに減少していることがわかる。一方、N₂ の場合、 $5.0 \times 10^4 < Re < 1.0 \times 10^6$ における流出係数はレイノルズ数の増加に伴い減少し、 $Re > 1.0 \times 10^6$ ではレイノルズ数の増加に伴い増加していることがわかる。この結果と Fig. 6.5 の圧縮係数の挙動を比較してみると、作動気体が H₂ と He の場合、圧縮係数が 1.0 から離れるにつれ流出係数が減少している。一方、N₂ の場合、圧縮係数が 1.0 から離れる領域で流出係数が減少傾向を示し、圧縮係数が 1.0 に近づくにつれて流出係数が増加している。これらの結果から、流出係数の値には実在気体効果の大きさが影響していると考えられる。

Fig. 6.7 は、作動気体が H₂、N₂ および He で Redlich-Kwong の状態方程式を用いた場合のレイノルズ数と理想気体と実在気体の流出係数の差の関係を表す。横軸がノズルスロート

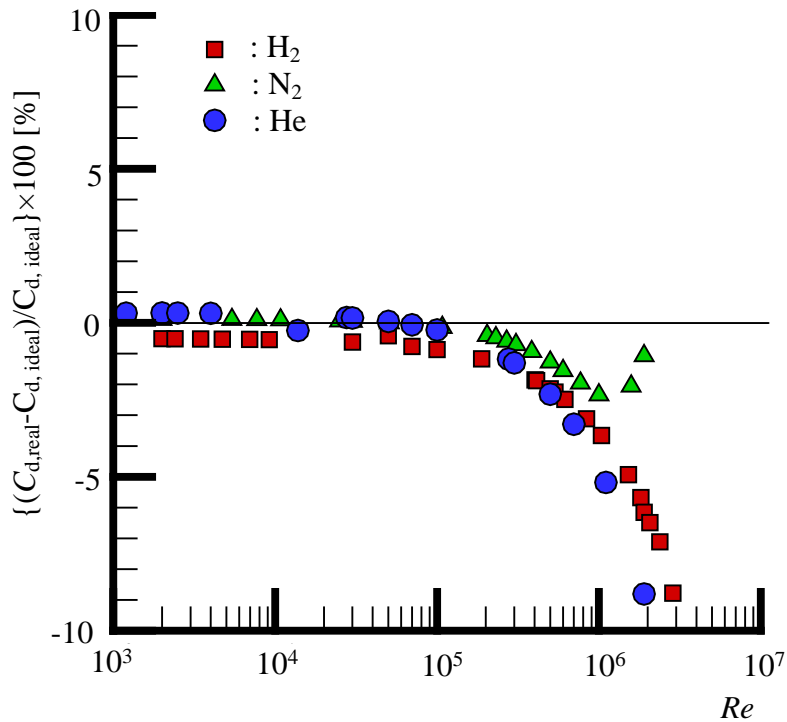
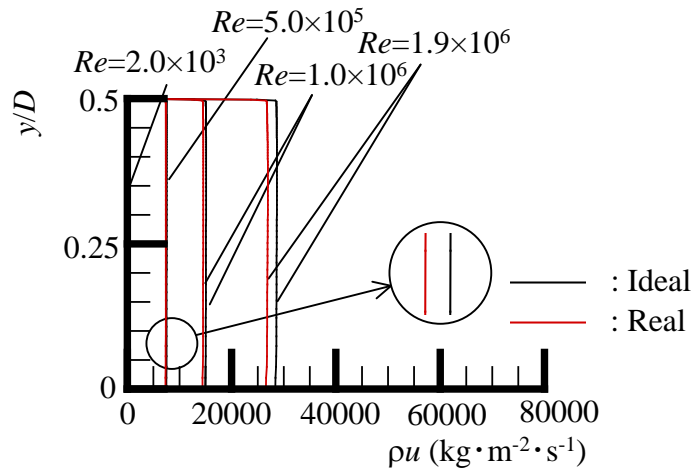


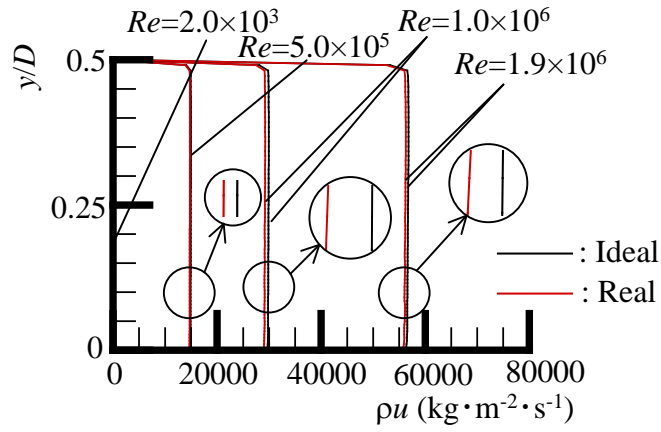
Fig. 6.7 Effect of kind of gases on difference of coefficient of discharge

でのレイノルズ数 Re ，縦軸が実在気体と理想気体の流出係数の差を理想気体の流出係数で割ったものである．Fig. 6.7 より，作動気体に H_2 と He の実在気体の流出係数を用いた場合の流出係数は，レイノルズ数の増加とともに理想気体との差が大きくなっていることがわかる．一方，作動気体に N_2 を用いた場合， $5.0 \times 10^4 < Re < 1.0 \times 10^6$ ではレイノルズ数の増加に伴い理想気体との差が大きくなり， $Re > 1.0 \times 10^6$ では理想気体との差が小さくなっていることがわかる．これは，Fig. 6.5 の圧縮係数の傾向が影響していると考えられる．

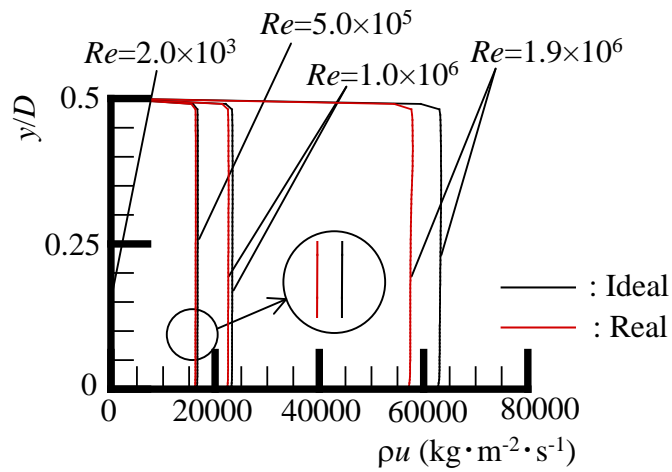
Fig. 6.8 (a), (b)および(c)は，作動気体がそれぞれ H_2 ， N_2 および He の場合でレイノルズ数 Re が $2.0 \times 10^3 \sim 1.9 \times 10^6$ の範囲における理想気体と実在気体のスロート断面における質量流束 ρu $kg/(m^2 \cdot s)$ を示す．Fig. 6.8 (a), (b)および(c)より，レイノルズ数が低い場合($Re=2.0 \times 10^3$)，質量流束は理想気体と実在気体で一致しているのに対し，レイノルズ数が高い場合($Re=5.0 \times 10^5 \sim 1.9 \times 10^6$)は実在気体の質量流束が理想気体の場合と比較して小さくなることがわかる．また，レイノルズ数が高い場合の H_2 と He の理想気体と実在気体の質量流束



(a) Hydrogen

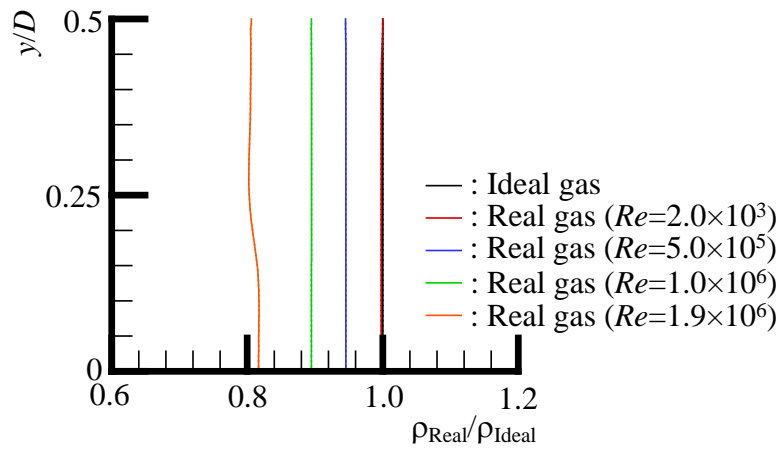


(b) Nitrogen

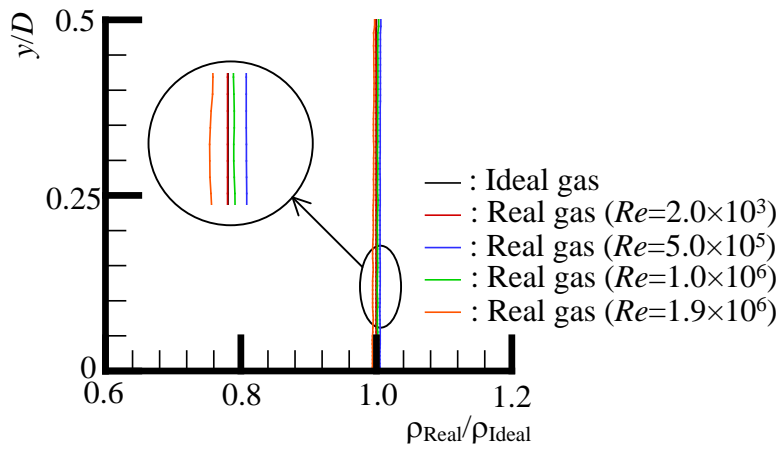


(c) Helium

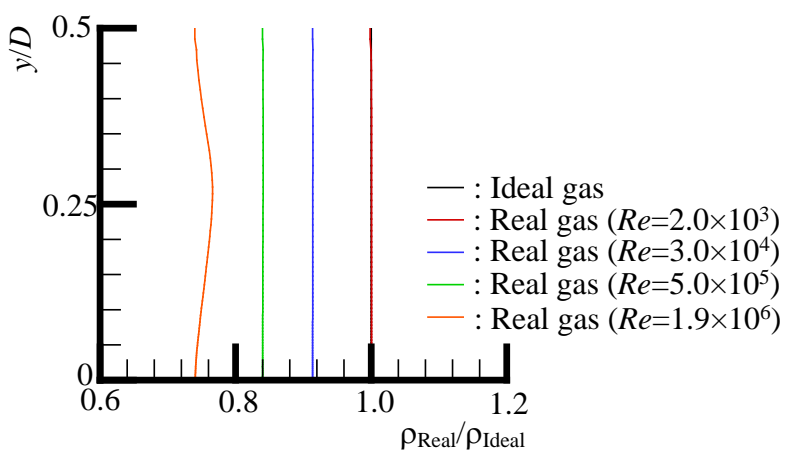
Fig. 6.8 Differences of mass fluxes ρu at the nozzle throat between ideal gas and real gas



(a) Hydrogen



(b) Nitrogen



(c) Helium

Fig. 6.9 Differences of density ρ between ideal gas and real gas at the nozzle throat

の差は、レイノルズ数の増加とともに大きくなることがわかる。一方、 N_2 の場合、 $5.0 \times 10^4 < Re < 1.0 \times 10^6$ における理想気体と実在気体の質量流束の差はレイノルズ数の増加とともに増加し、 $Re > 1.0 \times 10^6$ においてレイノルズ数の増加とともに減少していることがわかる。よって、Fig. 6.6 で示したレイノルズ数の増加に対する各気体の流出係数の傾向は、上述の質量流束の変化の傾向の違いが原因であると考えられる。

Fig. 6.9(a), (b)および(c)は、作動気体がそれぞれ H_2 , N_2 , He の場合のスロート断面における実在気体の密度を理想気体の密度で除した結果 ρ_{real}/ρ_{ideal} を示す。レイノルズ数の範囲は $2.0 \times 10^3 \sim 1.9 \times 10^6$ である。Fig. 6.9(a), (b)および(c)より、作動気体が H_2 と He の場合、レイノルズ数が低い場合 ($Re = 2.0 \times 10^3$) は $\rho_{real}/\rho_{ideal} = 1.0$ となるが、レイノルズ数が高い場合 ($Re > 5.0 \times 10^5$) は、 $\rho_{real}/\rho_{ideal} < 1.0$ となり、その値はレイノルズ数の増加とともに小さくなることがわかる。一方、 N_2 の場合、レイノルズ数が低い場合 ($Re = 2.0 \times 10^3$) は H_2 と He と同様に、 $\rho_{real}/\rho_{ideal} = 1.0$ となるが、レイノルズ数が高い場合 ($Re > 5.0 \times 10^5$) は、 $Re = 5.0 \times 10^5$, 1.0×10^6 において $\rho_{real}/\rho_{ideal} > 1.0$, $Re = 1.9 \times 10^6$ において $\rho_{real}/\rho_{ideal} < 1.0$ となっている。

Fig. 6.10~Fig. 6.12 は、それぞれ作動気体に H_2 , N_2 および He を用いた場合のスロート断面における x 方向の速度分布を示す。レイノルズ数 Re の範囲は、 $2.0 \times 10^3 \sim 1.9 \times 10^6$ である。図より、 H_2 と He の場合、レイノルズ数が高い場合の実在気体の x 方向の速度は理想気体と比較して大きくなり、理想気体と実在気体の x 方向の速度の差はレイノルズ数の増加に伴い大きくなることがわかる。一方、 N_2 の場合、レイノルズ数が高い場合の実在気体の x 方向の速度は理想気体と比較して小さくなり、理想気体と実在気体の x 方向の速度の差は $5.0 \times 10^4 < Re < 1.0 \times 10^6$ でレイノルズ数の増加に伴い大きくなり、 $Re > 1.0 \times 10^6$ では小さくなることがわかる。

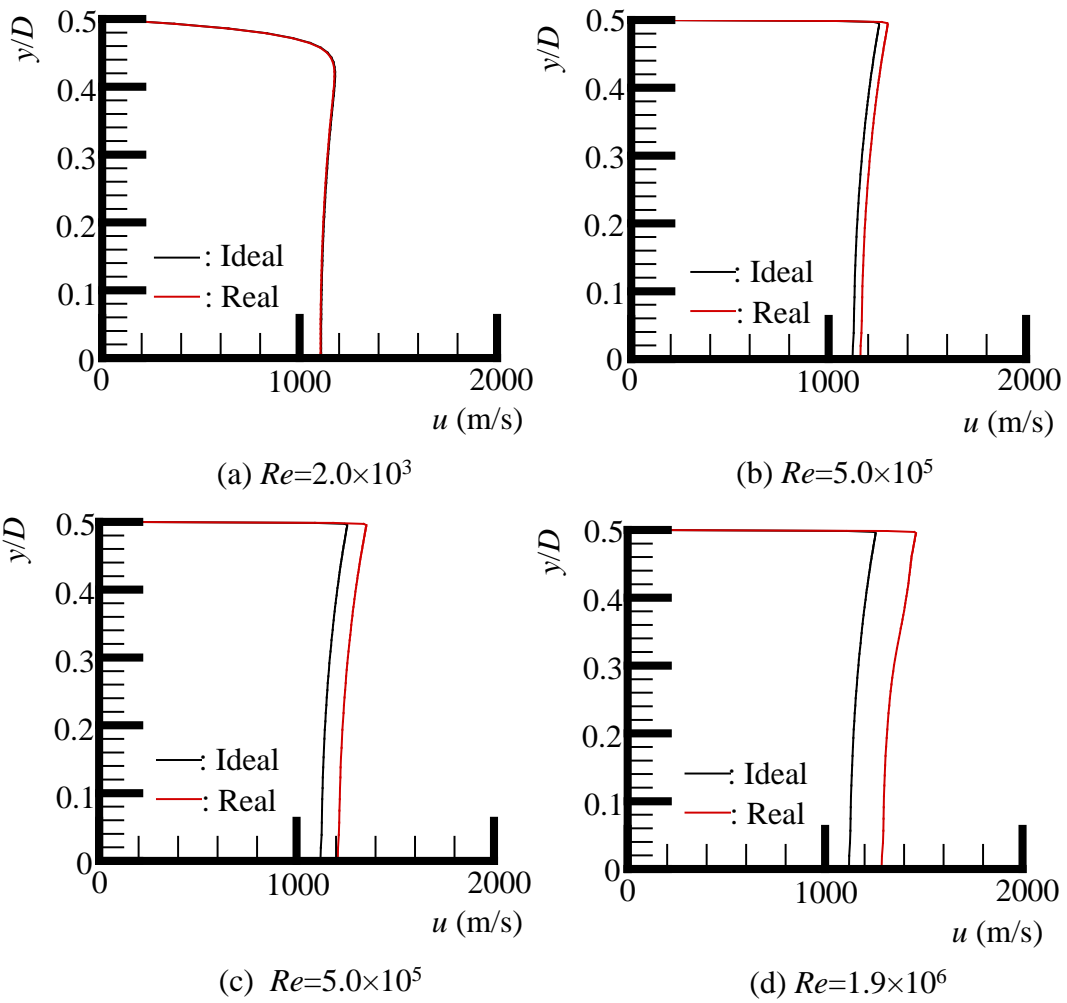
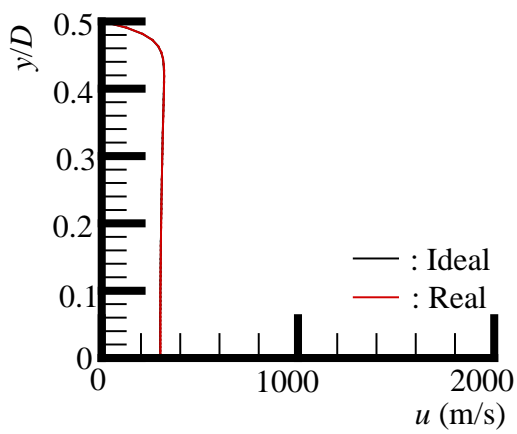
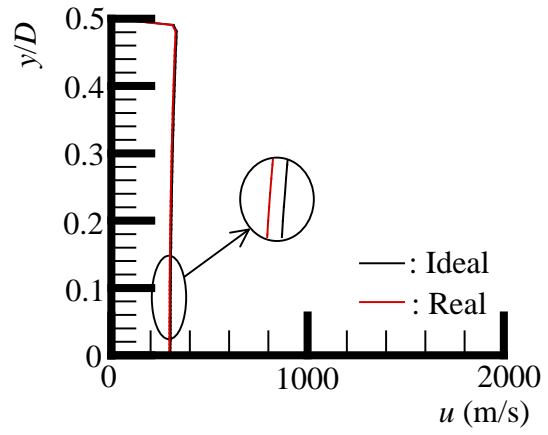


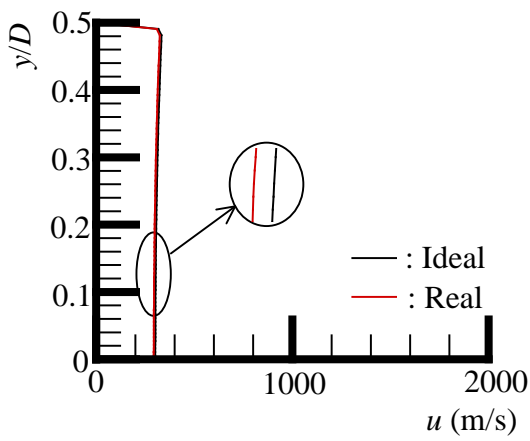
Fig. 6.10 Distributions of x -velocity at nozzle throat (Hydrogen)



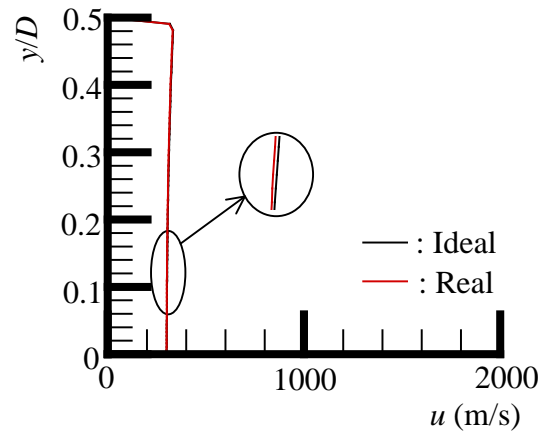
(a) $Re=2.0 \times 10^3$



(b) $Re=5.0 \times 10^5$



(c) $Re=1.0 \times 10^6$



(d) $Re=1.9 \times 10^6$

Fig. 6.11 Distributions of x -velocity at nozzle throat (Nitrogen)

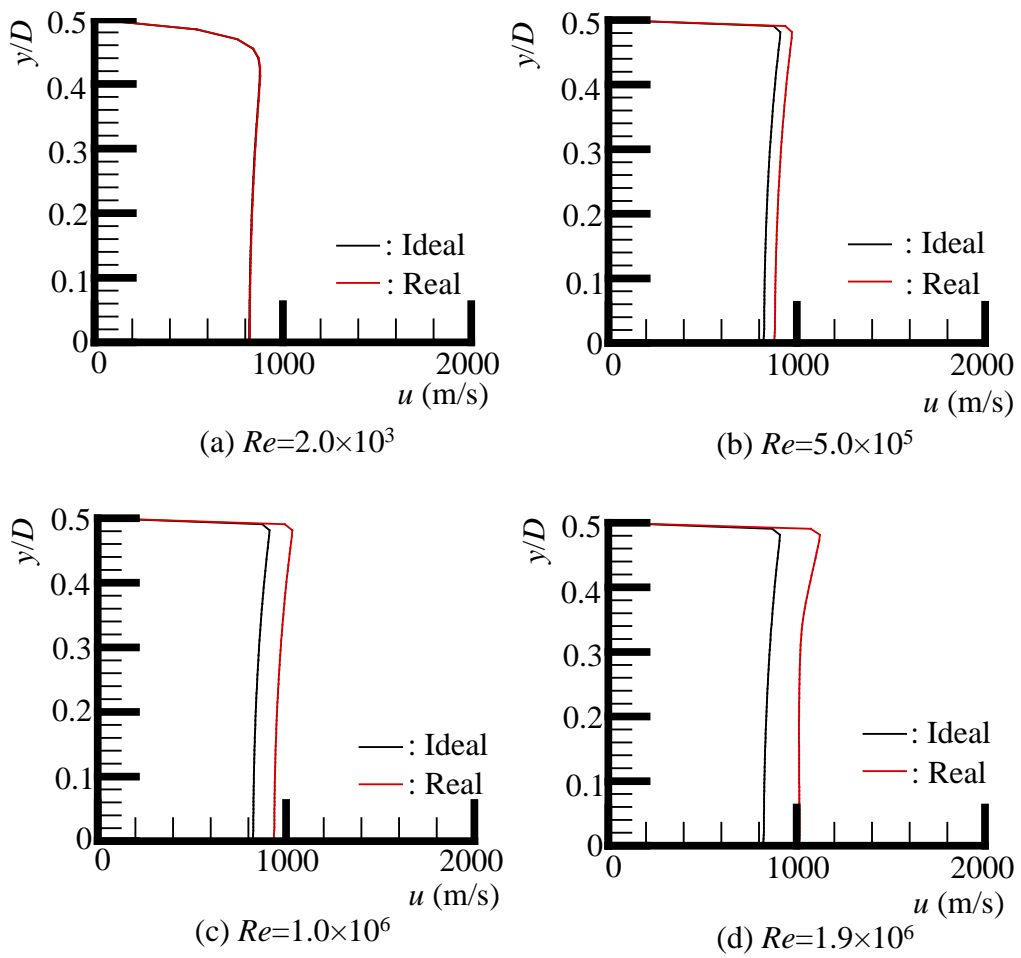


Fig. 6.12 Distributions of x -velocity at nozzle throat (Helium)

6.4 まとめ

本研究では、作動気体として3種類の気体(水素, ヘリウム, 窒素)を用いた場合の臨界ノズルの流出係数に及ぼす状態方程式の影響を数値的に調べた。その結果, 以下の結論を得ることができた。

1. 作動気体が水素の場合に Redlich-Kwong と Lee-Kesler の状態方程式より得られた流出係数の値は Peng-Robinson の状態方程式の場合と比較して, レイノルズ数が 2.8×10^6 まで実験結果とほぼ一致することがわかった。
2. 作動気体に水素, 窒素, ヘリウムを用いた場合の圧縮係数を比較すると, 水素とヘリウムの場合, レイノルズ数の増加に伴い圧縮係数が増加しているのに対し, 窒素は $5.0 \times 10^4 < Re < 1.0 \times 10^6$ の範囲で圧縮係数は減少傾向を示した後, $Re > 1.0 \times 10^6$ で再び理想気体の値 $z=1.0$ に近づく。この結果から, 流出係数は実在気体効果が大きくなるにつれて減少すると考えられる。また, 高レイノルズ数領域では同じレイノルズ数であってもガス種によって流出係数が異なることがわかった。
3. 水素とヘリウムの実在気体の流出係数は $Re > 5.0 \times 10^4$ で減少傾向を示すことがわかった。一方, 窒素の場合, $5.0 \times 10^4 < Re < 1.0 \times 10^6$ の範囲で流出係数が減少傾向を示したのに対し, $Re > 1.0 \times 10^6$ の範囲では増加傾向を示した。
4. レイノルズ数が高い場合, 水素, 窒素, ヘリウムのスロートでの質量流束は理想気体の場合と比較して小さくなった。これは流出係数の減少を意味している。
5. レイノルズ数が高い場合, スロートにおける水素とヘリウムの実在気体の密度は理想気体の密度より小さくなるのに対し, 窒素の実在気体の密度は, 実在気体効果が強くなる範囲で理想気体よりも大きくなった。一方, スロートにおける水素とヘリウムの実在気体の速度は理想気体の速度と比較して大きくなった。しかしながら, 窒素の場合の実在気体の速度は理想気体の場合よりも小さく, 実在気体効果が強く

なる範囲ではレイノルズ数の増加とともに減少し，実在気体効果が弱くなる範囲ではレイノルズ数の増加とともに増加した。

6. 実在気体効果が強くなるに伴い流出係数が減少する原因は，水素とヘリウムの実在気体の密度と理想気体の密度の差，および窒素では実在気体の速度と理想気体の速度の差が大きくなるためであると考えられる．よって，高レイノルズ数領域での流出係数の減少の原因は，実在気体効果によるスロートでの熱物性値の変化によるものであると考えられる．

第7章 結論

気体の質量流量の測定手法の 1 つとして提案されている臨界ノズル内の流れ場を CFD により解析し、レイノルズ数が臨界背圧比、無次元質量流量の値、無次元質量流量の時間変化に及ぼす影響を CFD により調べた。また、高レイノルズ数領域での実在気体効果が、流出係数の値に及ぼす影響を調べ、考察を行った。得られた結論を要約すると、次の通りである。

1. 作動気体に水素を用いた場合、流れが臨界状態に達すると、レイノルズ数が増加するにつれて無次元質量流量の値は大きくなる。しかしながら、レイノルズ数が高い領域ではレイノルズ数が増加しても無次元質量流量はほとんど変化しなくなる。これは、断面に占める境界層の割合が小さくなるためである。
2. 作動気体に水素を用いた場合の臨界背圧比はレイノルズ数の増加とともに大きくなることを CFD によって示すことができた。これは、高レイノルズ数の流れ場では、低レイノルズ数の流れ場と比較して、ノズル上流側の圧力の下限値を小さくできることを意味している。よって、燃料電池車の高圧タンクへの充填時に、超高压条件下ではタンク上流の圧力上昇に使われるエネルギーを小さくすることができ、コスト削減に貢献できると考えられる。また、ノズルスロートから出口までの長さに依存して臨界背圧比が変化することがわかった。
3. 作動気体に水素を用いた場合、レイノルズ数が低い場合、流れが臨界状態に達している場合でも背圧変動の影響により、スロートでの無次元質量流量が変動することがある。これは、境界層の亜音速部を背圧変動の影響が伝播するためではないかと考えられる。また、背圧変動の振幅が大きくなるほど、無次元質量流量の変動は

大きくなる．さらに，ある特定の周波数領域では高レイノルズ数領域まで無次元質量流量の変動が確認された．これは，ノズル内の流れ場の変動の波と背圧変動の波が共振することによるものであると考えられる．

4. 作動気体が水素の場合，レイノルズ数が高い領域($Re > 1.0 \times 10^5$)では，実在気体効果により流出係数はレイノルズ数の増加とともに減少する．本研究で開発された CFD コードは，状態方程式に Redlich-Kwong と Lee-Kesler の状態方程式を用いることで，レイノルズ数が $Re=2.8 \times 10^6$ までの流出係数が実験結果とよく一致することを示した．
5. 作動気体に水素，窒素，ヘリウムを用いた場合の圧縮係数を比較すると，水素とヘリウムの場合，レイノルズ数の増加に伴い圧縮係数が増加しているのに対し，窒素は $5.0 \times 10^4 < Re < 1.0 \times 10^6$ の範囲で圧縮係数は減少傾向を示した後， $Re > 1.0 \times 10^6$ で再び理想気体の値 $z=1.0$ に近づく．この結果から，流出係数は実在気体効果が大きくなるにつれて減少すると考えられる．また，高レイノルズ数領域では同じレイノルズ数であってもガス種によって流出係数が異なることがわかった．
6. 作動気体に水素，窒素，ヘリウムを用いた場合， $Re < 5.0 \times 10^4$ では流出係数に及ぼすガス種の影響は見られない．しかしながら，作動気体に水素とヘリウムを用いた場合， $Re > 5.0 \times 10^4$ でレイノルズ数の増加に伴い流出係数は減少するのに対し，作動気体に窒素を用いると $5.0 \times 10^4 < Re < 1.0 \times 10^6$ では，流出係数はレイノルズ数の増加に伴い減少， $Re > 1.0 \times 10^6$ では増加傾向となった．また，流出係数の値もガス種によって異なった．よって，水素の代替流体として他のガス種を用いる場合は，高レイノルズ数領域においてはガス種の影響を考慮しなければならない．

7. レイノルズ数が高い場合、水素、窒素、ヘリウムのスロートでの質量流束は理想気体の場合と比較して小さくなった。これは流出係数の減少を意味している。

8. 作動気体に水素とヘリウムを用いた場合、実在気体の密度は理想気体と比較して小さくなるのに対し、窒素の場合は理想気体の密度よりも大きくなった。一方、スロートでの実在気体の水素とヘリウムの速度は理想気体の速度よりも大きくなるのに対し、窒素の実在気体の速度は理想気体の場合と比較して小さくなった。よって、流出係数がレイノルズ数の増加に伴ない減少する原因は、水素とヘリウムの場合、実在気体効果による密度の減少が速度の増加より大きくなったこと、窒素の場合、実在気体効果による密度の増加よりも、速度の減少が大きくなったことが原因であると考えられる。このように、高レイノルズ数領域では実在気体効果による気体の熱物性値の変化が流出係数の値に大きく影響することがわかった。

第8章 謝辞

本研究を遂行するにあたり，終始懇切なご指導を頂きました松尾繁教授には心から感謝し厚く御礼申し上げます。

また，本論文をまとめるにあたり，貴重なご意見，ご教示を頂きました瀬戸口俊明教授及び熱エネルギーシステム学分野の先生方には心より感謝の意を表します。

さらに，研究生生活のあらゆる場面においてご指導頂いた木上洋一教授，塩見憲正准教授，橋本時忠准教授をはじめ，手間のかかるデータ整理等を手伝って頂いた佐賀大学工学部機械システム工学科環境流動システム講座の学生の皆様には御礼申し上げます。

2014年3月

参考文献

1. Schropp, R. E. I., Stannowski, B., Br23ockhoff, A. M., van Veenendaal P.A.T.T., Rath, J. K., “Hot Wire CVD of Heterogeneous and Polycrystalline Silicon Semiconducting Thin Films for Application in Thin Film Transistors and Solar Cells”, Mater. Phys. Mech., Vol. 1, (2000), pp. 73-82.
2. HORIBA, <http://www.horiba.com/jp/horiba-stec/products/mass-flow-controller/environmental/>, (参照日 2013年11月8日).
3. 中尾 晨一, 平山 徹, 高木 正樹, “音速ノズルの流出係数とガス種の関係”, 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 65, No. 66 (2000), pp. 124-130.
4. チョン・カー・ウィー, “微小液体流量計測の現状と将来展望”, 産総研計量標準報告, Vol. 8, No. 1 (2010), pp. 15-43.
5. 榎原 研正, “微小粒子の質量・粒径の計測と標準物質”, AIST Today, (2001), pp. 11.
6. 松尾 一泰, “圧縮性流体力学-内部流れの理論と解析-“, (1999), 理工学者.
7. 経済産業省, “燃料電池自動車の国内市場導入と水素インフラ整備に関わる共同声明”, <http://www.meti.go.jp/> (参照日 2012年12月4日).
8. 燃料電池実用化推進協議会, <http://fccj.jp/> (参照日 2013年10月27日).
9. 石油エネルギー技術センター, “水素インフラ関連事業活動報告”, 平成 23 年度技術開発研究成果発表会要旨集, (2011), pp. 305-308.
10. 横山 佳資, 斉藤 彰, 辻井 貢, 名武 秀一郎, 鳥居 秀則, “70MPa 級水素ステーションシステム技術開発活動報告”, 平成 23 年度技術開発研究成果発表会要旨集, (2011), pp. 309-312.

11. 與話 智之, 岩波 智之, 大塚 長典, ”ガソリンスタンドを拠点とする高純度水素技術開発(高性能脱硫剤の開発), 石油エネルギー技術センター, 第 24 回技術開発研究成果発表会要旨集, (2010), pp. 219-228.
12. 吉仲 正浩, 河島 義実, 龍門 尚徳, 湯浅 仁奈子, 荒川 毅志, ” ガソリンスタンドを拠点とする高純度水素技術開発(貴金属使用量低減灯油改質触媒の開発)”, 第 24 回技術開発研究成果発表会要旨集, (2010), pp. 229-238.
13. 根岸 英二, 前田 崇志, 小川 稔, 姫野 正明, 谷地 弘志, ” ガソリンスタンドを拠点とする高純度水素技術開発(膜分離型反応器による高性能な高純度水素製造技術の開発)” 第 24 回技術開発研究成果発表会要旨集, (2010), pp. 239-248.
14. 小堀 良浩, 紺野 博文, ” ガソリンスタンドを拠点とする高純度水素技術開発(貴金属使用量低減水素分離膜の探索・評価)”, 第 24 回技術開発研究成果発表会要旨集, (2010), pp. 249-258.
15. 斉藤 彰, 辻井 貢, 吉村 仁, 鳥居 秀則, 名武 秀一郎, ” 水素製造・輸送・貯蔵システム等技術開発活動報告”, 第 24 回技術開発研究成果発表会要旨集, (2010), pp. 269-278.
16. 池田 雅一, 前川 俊輔, 常岡 秀雄, 小川 稔, 田村 咲季, ”高効率水素製造等技術開発”, 平成 25 年度技術開発研究成果発表会要旨集, (2013).
17. 阿部 正, 山村 俊行, 黒田 長秋, 増井 貞人, 手塚 俊雄, ”平成 21 年度 JHFC(燃料電池システム等実証研究)活動報告”, 第 23 回技術開発研究成果発表会要旨集, (2010), pp. 279-288.
18. 山村 俊行, 阿部 正, 吉村 仁, 大石 康之, 佐藤 克哉, 小竹 一彦, 坪井 貞人, ”平成 22 年度 JHFC(燃料電池システム等実証研究),平成 23 年度 技術開発研究成果発表会要旨集, (2011), pp. 325-334.

19. 三石 洋之, 水素貯蔵システムの最新技術動向, <http://www.jsae.or.jp/> (参照日 2013 年 11 月 4 日).
20. 福本 紀, "水素技術に係る国際基準・標準化動向について – 高圧水素技術関連 –", JARI Research Journal, (2012), pp. 1-7.
21. 藤井 博信, "水素エネルギー社会の実現を目指して-水素貯蔵機能の開発-", 広島大学, <http://www.hiroshima-u.ac.jp/gakujutsu/kenkyu/hydrogen/> (参照日 2013 年 12 月 20 日).
22. 斉藤 彰, 辻井 貢, 鳥居 秀則, 横山 佳資, 名武 秀一郎, "70MPa 級水素ステーション要素技術開発活動報告", 平成 23 年度技術開発研究成果発表会要旨集, (2011), pp. 313-316.
23. 斉藤 彰, 山村 俊行, 名武 秀一郎, 横山 佳資, 相川 芳明, 川又 和憲, "70MPa 級水素ステーションに関する技術開発", 平成 25 年度技術開発研究成果発表会要旨集, (2013).
24. 久和野 敏明, "充填圧力 70MPa 対応の移動式水素ステーション", 太陽日酸技報, No. 26 (2007), pp. 34-35.
25. 工藤 尚文, 小森 雅浩, 北原 太美男, 星野 緑, "70MPa 充てん対応水素スタンドの技術基準について", 石油エネルギー技術センター, 第 23 回技術開発研究成果発表会要旨集, (2010), pp. 259-268.
26. 工藤 尚文, 手塚 俊雄, 石本 裕保, 金井 作信, "平成 22 年度 水素インフラの技術基準に関する検討活動報告", 平成 23 年度技術開発研究成果発表会要旨集, (2011), pp. 317-320.
27. 斉藤 彰, 手塚 俊雄, 相川 芳明, 川又 和憲, "水素インフラの技術基準(鋼種拡大)に関する研究開発", 平成 25 年度技術開発研究成果発表会要旨集, (2013).
28. 吉田 剛, 石本 裕保, 高木 清美, 佐藤 克哉, "水素インフラ技術基準に関する研究開発(複合容器)", 平成 25 年度技術開発研究成果発表会要旨集, (2013), .

29. 経済産業省, 70 MPa 圧縮水素自動車燃料用容器の技術基準に関する検討状況について, http://www.meti.go.jp/committee/sankoushin/hoan/koatsu_gas/pdf/002_07_00.pdf, (参照日 : 2013年12月20日).
30. 遠藤 明, 小森 雅浩, 星野 緑, ”2015年の燃料電池自動車・水素ステーションの普及に向けて、実施すべき規制再点検項目”, 平成23年度技術開発研究成果発表会要旨集, (2011), pp. 321-324.
31. 岡林 一木, 竹野 計二, 平嶋 英俊, 坂田 展康, 橋口 和明, ”70MPa 充てん対応水素スタンドの安全検証のための拡散爆発実験計画”, 石油エネルギー技術センター, 第23回技術開発研究成果発表会要旨集, (2009).
32. 石垣 良次, 高澤 孝一, 和田 洋流, 岩本 隆志, ”70MPa 充てん対応蓄圧器材料の評価”, 石油エネルギー技術センター, 第23回技術開発研究成果発表会要旨集, (2009).
33. 金森 明文, 山田 晴久, 岡庭 弘幸, 高橋 和史, 鈴木 尚彦, 木村 潔, 土井 真敏, 大沢 紀和, 長峰 哲, 藍 勇太, ”70MPa 充てん対応水素ディスプレイの安全性検証”, 石油エネルギー技術センター, 第23回技術開発研究成果発表会要旨集, (2009).
34. 森岡 敏博, 中尾 晨一, 石橋 雅裕, ”高圧水素ガス計測用臨界ノズル式流量計の特性評価”, 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 77, No. 776 (2011), pp. 1088-1097.
35. 生井 武文, 松尾 一泰, 圧縮性流体の力学, (2005), 理工学者.
36. 松尾 一泰, 圧縮性流体力学の基礎, (2011), 理工学社.
37. 古川 明德, 瀬戸口 俊明, 林 秀千人, 流れの力学, (1999), 朝倉書店.
38. 山田製作所, <http://www.yamada-s.co.jp/products/measurement.html> (参照日 2013年12月20日).
39. 株式会社 友栄, <http://www.yuei.co.jp/biz/car/sn.pdf> (参照日 2013年12月20日).
40. HIRAI, <http://www.kk-hirai.co.jp/newtec/kousei/snc.html> (参照日 2013年10月6日).

41. 馬杉 尚次, "ノズルを使用せる煙道炭酸ガス含有率測定(第一報) : 臨界ノズル使用吸収方式", 日本機械学会論文集, Vol. 17, No. 62 (1951), pp. 35-40.
42. Hall, I. M., "Transonic Flow in Two-dimensional and Axially-symmetric Nozzles", Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 15, No.4 (1971), pp. 487-508.
43. Geropp, D., "Laminare Grenzschichten in ebenen und rotationssymmetrischen Lavalduesen", Deutsche Luft-und Raumfahrt Forschungsbericht, (1971), pp. 71-90.
44. Ishibashi, M., Takamoto, M., "Theoretical Discharge Coefficient of a Critical Circular-arc Nozzle with Laminar Boundary Layer and its Verification by Measurements using Super-accurate Nozzles", Flow Measurement and Instrumentation, Vol. 11, (2000), pp. 305-313.
45. Lighthill, M. J., "The Hodograph Transformation in Trans-Sonic Flow. I. Symmetrical Channels", Proc. Roy. Soc., A, 191, (1947), pp. 323-341.
46. Oswatitsch, K., "Gas Dynamics, Academic Press", New York, (1956), pp. 52.
47. Kim, J. H., Kim, H. D., Park, K. A., Matsuo, S., "A Fundamental Study of a Variable Critical Nozzle Flow", Experiments in Fluids, Vol. 40, (2006), pp. 127-134.
48. Kim, H.D., Kim, J. H., Park, K. A., Setoguchi, T., Matsuo, S., "Computational Study of The Gas Flow Through a Critical Nozzle", Proc:InstnMech:Engrs, Part:C : J:MechanicalEngineeringScience, Vol. 217, C10 (2003), pp. 1179-1189.
49. Kim, J. H., Kim, H. D., Setoguchi, T., Matsuo, S., "A Computational Study of Real Gas Flows through a Critical Nozzle", Proc. Instn. Mech. Engrs. PartC, J.Mechanical Engineering Science, Vol. 223, C10 (2009), pp. 617-626.
50. Kim, H. D., Lee, J. H., Park, K. A., Setoguchi, T., "A Study of the Critical Nozzle for Flow Rate Measurement of High-Pressure Hydrogen Gas", Journal of Thermal Science, Vol. 16, No. 1 (2007), pp. 28-32.

51. 中尾 晨一, 関谷 克美, "微小気体流量計測用ディフューザー付オリフィスの特性", 日本機械学会論文集B編, Vol. 71, No. 706 (2005), pp. 1527-1533.
52. 浅野 裕, 中尾 晨一, 八鍬 武史, "低レイノルズ数における臨界ノズル形状に関する研究", 日本機械学会論文集B 編, Vol. 77, No. 779 (2011), pp. 1550-1556.
53. 中尾 雄一, "音速ノズルの臨界特性と流出係数に関する実験的研究", 関東学院大学大学院博士論文, (1997).
54. 中尾 雄一, 横溝 利男, " $Re=2.5 \times 10^3 \sim 2.7 \times 10^5$ における2次元音速ノズルの臨界圧力比と流出係数" 日本機械学会論文集B編, Vol. 63, No. 615 (1997), pp. 98-104.
55. 中尾 晨一, "高圧水素計測用音速ノズル流量計の開発", 日本機械学会流体工学部門講演会講演概要集, (2005), pp. 288.
56. ISO 9300: 2005 (E)., "Measurement of Gas Flow by Means of Critical Flow Venturi Nozzles", Brussels., (2005).
57. JIS B 7556:2008, 気体用流量計の校正方法及び試験方法, (2008), pp. 49-50, 日本規格協会.
58. 中尾 晨一, 高本 正樹, "気体用微小質量流量校正装置の開発と標準移転用流量計としての音速ノズルの特性", 日本機械学会論文集B 編, Vol. 65, No. 630 (1999), pp.267-273.
59. Matsuo, K., Miyazato, Y., Kim, H. D., Matsuo, S., "Shock Train and Pseudo-Shock Phenomena in Internal Gas Flows", J:Prog:AerospaceSci, Vol. 35, (1999), pp.33-100.
60. Kim, H. D., Matsuo, K., Kawagoe, S., Kinoshita, T., "Flow Unsteadiness by Weak Normal Shock Wave/Turbulent Boundary Layer Interaction in Internal Flow", J:JapanSoc:Mech:Engrs, Ser:II, Vol. 4, No. 34 (1991), pp. 457-465.
61. Von Lavante, E., Zachcial, A., Nath, B., Dietrich, H., "Numerical and Experimental Investigation of Unsteady Effects in Critical Venturi Nozzles", Flow Measurement and Instrumentation, Vol. 11, (2000), pp. 257-264.

62. Von Lavante, E., Zachcizl, A., Nath, B., Dietrich, H., “Unsteady Effects in Critical Nozzles Used for Flow Metering”, *J:Measmt*, Vol. 29, (2001), pp. 1-10.
63. Kim, H.D., Kim, J.H., Park, K.A., Setoguchi, T., Matsuo, S, “Study of the Effects of Unsteady Downstream Conditions on the Gas Flow Through a Critical Nozzle”, *Proc. Instn. Mech. Engrs. PartC : Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 218, C10 (2004), pp. 1163-1173.
64. 独立行政法人 新エネルギー・産業技術総合開発機構, 独立行政法人 産業技術総合研究所, ”水素安全利用等基盤技術開発, 水素インフラに関する研究開発, 充てん機用流量計の開発”, 平成 17 年度成果報告書, (2006).
65. Johnson, R. C., “Calculations of Real-Gas Effects in Flow Through Critical-Flow Nozzles”, *ASME J.*, Vol. 86, (1964), pp. 519-525.
66. Johnson, R. C., “Real-Gas Effects in Critical-Flow-Through Nozzles and Tabulated Thermodynamic Properties”, *NASA-TN*, D-2565 (1965).
67. Johnson, R. C., “Real-Gas Effects in Flow Metering”, *NASA-TM*, X-52965 (1971).
68. Johnson, R. C., “Real-Gas Effects in the Flow of Methane and Natural Gas Through Critical-Flow Nozzles”, *NASA-TM*, X-52994 (1971).
69. Johnson, R. C., “Real-Gas Effects in Critical Flow Through Nozzles and Thermodynamic Properties of Nitrogen and Helium at Pressures to 300×10^5 Newtons per Square Meter (Approx. 300 ATM), *NASA-TM*, SP-3046 (1968).
70. Mohamed, K., Paraschivoiu, M., “Real Gas Simulation of Hydrogen Release from a High-Pressure Chamber”, *International Journal of Hydrogen Energy*, Vol. 30, No. 8 (2005), pp. 903-912.
71. Redlich, O., Kwong, J.N.S, “On the Thermodynamics of Solutions. V (An Equation of State. Fugacities of Gaseous Solutions)”, *Chemicalreviews*, Vol. 44, (1949), pp. 233-244.

72. Corpron, G. P., "Correlation of H₂, Ar, He and Air Flow in Critical Flow Nozzle", Proc. Fluid Flow Meas. 3rd Int. Symp., San Antonio, (1995).
73. 横川 彰寛, 西岡 通男, "常温音速ノズルにおける非平衡流", 航空宇宙技術研究所特別資料, Vol. 43, (1999), pp. 91-94.
74. Johnson, A. N., Wright, J. D., Nakao, S., Merkle, C. L., "The Effect of Vibrational Relaxation on the Discharge Coefficient of Critical Flow Venturis", Flow Measurement and Instrumentation, Vol. 11, (2000), pp. 315-327.
75. Johnson, A. N., Merkle, M. R., Moldover, M. R., Wright, J. D., "Relaxation Effects in Small Critical Nozzles", Transactions of the ASME, Vol. 128, (2006), pp. 170-176.
76. Nakao, S., Takamoto, M., "A Study on the Conversion Factor of Sonic Venturi Nozzles", AIST Bulletin of Metrology, Vol. 1, No. 2 (2002), pp. 387-405.
77. Augnier, R. H., "A Fast, Accurate Real Gas Equation of State for Fluid Dynamic Analysis Applications", Journal of Fluids Engineering, Vol. 117, (1995), pp. 277-281.
78. Chorng, H. T., John E. C, John R. C., "A New Generalized Alpha Function for a Cubic Equation of State Part 2. Redlich-Kwong Equation", Fluid Phase Equilibria, Vol. 105, (1995), pp. 61-69.
79. Hedder, H., Peter, S., Wenzel, H., "Calculation of Thermodynamic Properties from a Modified Redlich-Kwong Equation of State", The Chemical Engineering Journal, Vol. 11, (1976), pp. 183-190.
80. Kouremenos, D. A., Antonopoulos, K. A., "Compressibility Charts for Gases with Different Acentic Factors and Evaluation of the Redlich-Kwong-Soave Equation of State", Forschung im Ingenieurwesen Bd., Vol. 57, No. 5 (1991), pp. 159-161.
81. Soave, G., "Equilibrium Constants from a Modified Redlich-Kwong Equation of State", Chemical Engineering Science, Vol. 27, (1972), pp. 1197-1203.

82. Kouremenos, D. A., Antonopoulos, K. A., "Sound Velocity and Isentropic Exponents for Gases with Different Acentric Factors by Using the Redlich-Kwong-Soave Equation of State", *Acta Mechanica*, Vol. 66, (1987), pp. 177-189.
83. 水素・燃料電池ハンドブック編集委員会, "水素・燃料電池ハンドブック", (2006), オーム社.
84. 清山 哲郎, "化学センサ実用便覧", (1986), フジ・テクノシステム, pp. 25.
85. 新編 熱物性ハンドブック, (2008), 養賢堂.
86. 流体力学, 機械工学便覧 基礎編α4 流体力学, 日本機械学会, 丸善株式会社.
87. 斎藤 賢一, 藤村 満, "音速ノズルによるマスフローメータの校正", 第44 回大気環境学会年会環境技術セミナー, Vol. 44, (2003).
88. Lee, B.L., Kesler, M.F., "A Generalized Thermodynamic Correlation Based on Three-parameter Corresponding States", *Am. Inst. Chem. Eng. J.*, Vol.21, 1975, pp.510-527.
89. Munoz, F. Reich, R., "New Parameters for the Lee-Kesler Correlation Improve Liquid Density Predictions", *Fluid Phase Equilibria*, Vol.13, 1983, pp.171-178.
90. 田中 昌也, 長坂 徹, "特殊ガスの熱物性推算", 太陽日酸技報, No. 23 (2004).
91. Peng, D. Y., Robinson, D. B., "A New Two-Constant Equation of State", *Ind. Eng. Chem. Fundamen.*, Vol.15, No.1 (1976), pp.59-64.
92. Nasri, Z., Binous, H., "Applications of the Peng-Robinson Equation of State Using Matlab", *Chemical Engineering Education*, Vol. 43, No. 2 (2009), pp. 1-10.
93. Nishiumi, H., Gotoh, H., "Generalization of Binary Interaction Parameters of Peng-Robinson Equation of State for Systems Containing Hydrogen", *Fluid Phase Equilibria*, Vol. 56, (1990), pp. 81-88.
94. 新井 努, 西海 英雄, "Peng-Robinson状態方程式の異種分子間相互作用パラメータの相関", 法政大学工学部研究集報, Vol. 23, (1987).

95. 赤坂 亮, ”水素ステーション充填解析プログラムの開発”, 石油エネルギー技術センター技術開発・調査事業成果発表会要旨集, (2012), pp. 351-354.
96. 石原 繁, 浅野 重初, 理工系入門 微分積分, (2005), 裳華房.
97. Moran, M.J., Shapiro, H. N., “Fundamentals of Engineering Thermodynamics”, 4th ed, Wiley, (1999), pp. 852.
98. Yee, H. C., “A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock Capturing Method”, NASA TM-89464, (1989).
99. Launder, B. E., Spalding, D. B., “The Numerical Computation of Turbulent Flows”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.3, (1974), pp. 269-289.
100. Harten, A., “On a Class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite-Difference Schemes”, SIAM Journal, Vol. 21, No. 1 (1984), pp. 1-23.
101. 藤井 孝蔵, ”流体力学の数値計算法”, 第6刷, (2007), 東京大学出版会.
102. van Leer, B., “Toward the Ultimate Conservative Difference Scheme. IV, A New Approach to Numerical Convection”, Journal of Computational Physics, Vol. 23, (1977), pp. 276-299.
103. van Leer, B., “Toward the Ultimate Conservative Difference Scheme. V, A Second-Order Sequel to Godunov’s Method”, Journal of Computational Physics, Vol. 32, (1979), pp. 101-136.
104. Strange, G, “Linear Algebra and Its Applications”, Academic Press, (1976).