実 践 報 告

論理的思考力を高める授業づくりについて
－第１学年 図形領域「三角定規で15度の角をつくろう」の授業分析を通して－

峰松　弘文*

On the Class Design to Improve Logical Thinking
― through a Lesson Analysis of the First Year Geometry " Let's Make a 15 Degree Angle with Set Squares " ―

Hirofumi MINEMATSU*

【要約】
今回は，生徒に馴染みのある１組の三角定規を用いた課題を設定してみた。三角定規を重ね合わせて15度の角をつくる活動では，生徒から様々なアイデアが出てきて，その活動を通して，三角定規の特徴をみんなで捉え直すことができたと思われる。後半の，本当に15度と言えるのかを説明する活動では，多くの生徒が既習の知識を活用して説明をしようとするが，なかなか上手くいかなかった。しかし，難しかったにもかかわらず，生徒たちは諦めようとはせず，むしろ，私から見て熱心に議論し考えていたのである。それはなぜだったのだろうか。この授業を振り返ることにより，今後の自分の授業づくりの一助になればと思っている。

【キーワード】
論理的思考力，授業づくり，中学校数学，図形領域，授業分析

1　はじめに

文部科学省国立教育政策研究所教育課程研究センターによる平成23年９月付の全国学力・学習状況調査解説資料を見ると，記述式の問題が明確に位置づけられており，「見いだした事柄や事実」「事柄を調べる方法や手順」「事柄が成り立つ理由」を説明するといった問題が重要視されていることがわかる。また，同センターの「評価規準の作成，評価方法等の工夫改善のための参考資料」によると，第１学年の評価の観点の趣旨（数学的な見方や考え方）で，「数量や図形などについての基礎的・基本的な知識及び技能を活用しながら，事象を見通しをもって論理的に考察し表現したり，その過程を振り返って考えを深めたりするなど，数学的な見方や考え方を身に付けている。」と書かれている。このことからも，学び方や結果が出るまでの過程も重要視されてきていることは明らかである。

本校では，数学的活用能力を，PISAが定義する「数学的リテラシー」を参考にして研究を継続している。その定義とは，「数学が世界で果たす役割を見つけ理解し，現在及び将来の個人の生活，職業生活，友人や家族・親族との社会生活，建設的で関心を持った思慮深い市民としての生活において，確実な数学的根拠にもとづき判断を行い，数学に携わる能力」である。

*佐賀大学文化教育学部附属中学校

この数学的活用能力を高めるためには,「学問としての数学を学ぶことの楽しさ」や「実生活と数学の結びつき」を,体験を通して実感させるとともに,数学的思考力を育てることが重要であると考えている。数学的思考力として捉えている主な力とは,本校の「学力デザイン」に示すように,「物事を多面的にみて考え解決することができる力」,「見通しをもち,ものごとを筋道立てて論理的に考えることができる力」「帰納的・演繹的に推論する力」である。このような力は,教師が解き方やテクニックを説明し,教え込んで練習させて身につくようなものではない。生徒が学習課題や教材そのものに興味を示し,自ら熱心に考えたり,時には自分一人ではどうしても解決できない場面に遭遇したりして,教師や生徒がお互いの考えやアイデアを出しあいながら議論しあったりして,試行錯誤していく中で,次第に身についていくものであると考えている。今回は,そのような授業づくりのための教材や課題提示の在り方,生徒の思考を揺さぶるような問いかけや問い返しについて見つめ直しながら,授業を振り返ってみることにした。

2 授業の実際と考察

2-1 用いた教材について

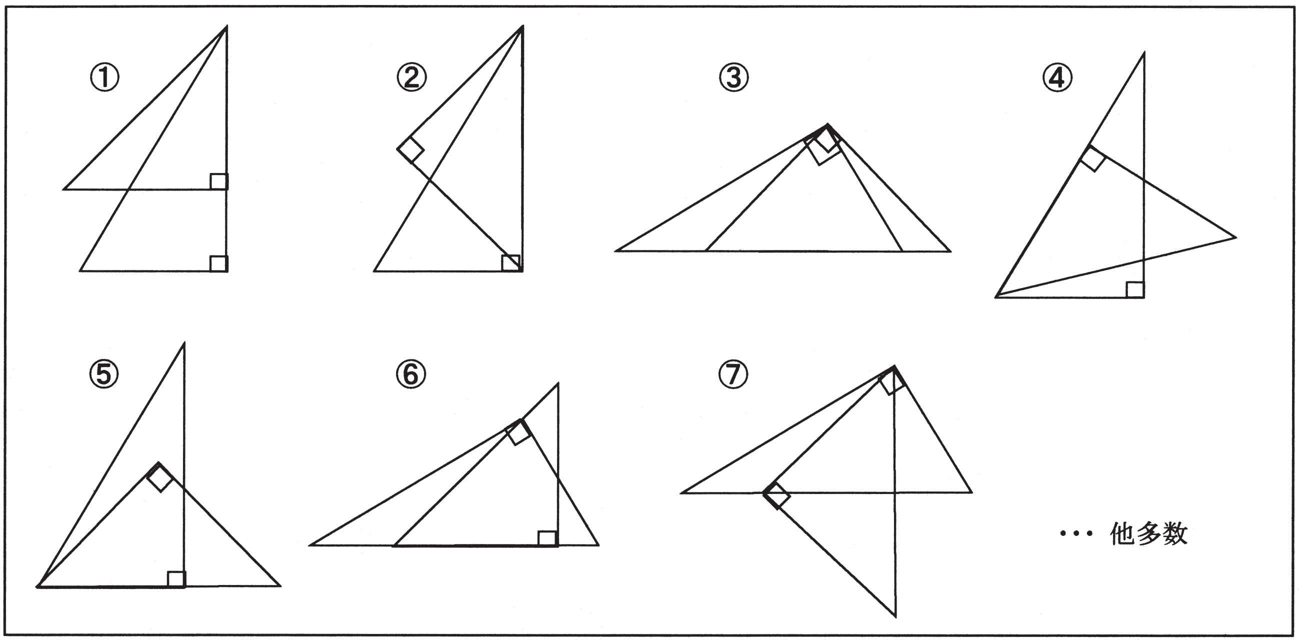
筆者は現在,附属中学校１年生の数学を担当している。ここでは,平面図形の単元の中の授業を振り返ってみる。生徒たちが中学生になって,本格的に図形の学習を始めるのがこの単元である。単元の目標に関しては,学習指導要領によると,「観察,操作や実験などの活動を通して,見通しを持って作図したり図形の関係について調べたりして平面図形についての理解を深めるとともに,論理的に考察し表現する能力を養う。」と明記されている。筆者は,図形の学習において,上記のような力を育てることと,正確に図をかく（作図をする）ことができることは関係が深いと思っている。それは,正確に図をかくことができることが図形の学習の基本だと考えるからである。しかし,ややもすると,作図の方法や技能の定着が優先されて,「条件にあう方法としてどのような作図法があるのか」とか「コンパスをそのように使うのはどうしてか」「なぜそのようなかき方でよいのか」等の理由を考えさせ理解を深めさせることがおろそかになることが危惧される。算数・数学の学習では,図(図形)や線をかく道具としてコンパス・分度器・三角定規がある。分度器はもちろん角度を測る(つくる)道具であるが,コンパスや三角定規はどうであろうか。「コンパスは何をする道具？」という投げかけに,間をおかずに生徒たちの多くは「円をかく道具。」と答える。しかし,私が「他の使い方は？」と尋ねると,シーンとなる。しばらくして何人かが「同じ長さをとる道具。」と答える。他にも(定規がセットになれば)様々な角をつくる道具でもあるという話をすると,やや驚いた様子の生徒も出てくる。また,生徒たちにとって三角定規は目新しい道具ではないが,各々の角度が何度かは覚えていても,平行線をかくときに便利な道具であることや,その他の三角定規の特徴を知っているというわけではない。確かに,私自身のことを振り返ってみても,長年使っている道具であるはずなのに,三角定規に関してどれだけのことを語れるのか・・・・。そこで,教科書では詳しく取り扱われているわけではないが,三角定規を用いた授業を単元計画の際に盛り込んでみることにした。

2-2 課題提示と生徒の活動や気づきについて

ここで行った授業は,２つの三角定規を重ね合わせて15度の角をつくるというものである。この課題を通して,生徒たちに,三角定規の特徴に気づかせたり,論理的に考える力をつけさせたり,どうしても分からなかったことが分かったときの喜びや感動を味わわせたりすることをねらいの中

心においた。生徒たちは，各自が手にしている三角定規を重ねながら，10種類をこえる重ね方を発見していった（**図１**）。数学に苦手意識がある生徒でも，三角定規を手にしながら数種類つくることができた。重ね方を工夫すれば，一度に３つや４つの15度の角ができる場合があることに気づいた生徒のつぶやきに，周りの生徒たちは刺激を受けながら難しい重ね方も考えはじめた。この段階では，15度になっているかどうかが簡単には分からない箇所については，分度器を当てて15度かどうかを確かめてよいことにした。この活動を通して生徒たちは，２つの三角定規をあわせたときに等しい長さになっている辺が１カ所あること（**図１②**）や，２つの三角定規（直角三角形）の斜辺を共通底辺として重ねると高さが等しくなること（**図１③**），同じ形の三角定規を２枚つなげると正方形や正三角形になること，斜辺の中点を中心とした３つの頂点を通る円がかけること等に気づいていったのである。そして，後半の課題において，課題解決した生徒は，この③を説明に利用したのである。

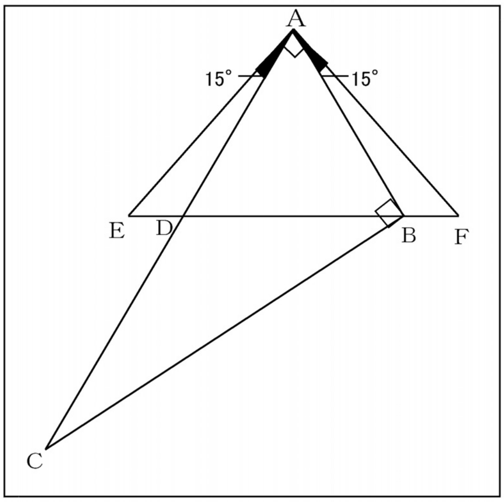
図１　生徒たちが考えた三角定規の重ね方



2-3 論じ合う機会の設定について

さて，こうして作られた重ね方のうち，どうして15度と言えるのか理由がはっきり分からない重ね方がいくつかあった。筆者は，「今の段階では難しいかな？」と感じつつも，その中の１つに焦点を絞って，学級のみんなで議論し合う授業を展開したいと思っていた。根拠に基づいて議論する機会があれば生徒の発達段階に応じて理由を考えさせたり，意図的にそのような場を設定して論じ合う機会を設けながら，体験的に証明の流れを理解させていくことも重要であると考えていた。そして，生徒の反応をうかがい，生徒の思考を揺さぶりながら，「どうして15度と言えるのか？」という問い（問いかけ）を，生徒自身の問い（疑問）になるようにしたいと考えたのである。筆者が生徒たちに，一

図２　教師が提示した課題



緒に考えて欲しいと提示した三角定規の重ね方は，**図２**に示すものである。このことに関して，武田氏（宮城大学名誉教授）は著書において，「『問い』はその解決を求めて，学び手に，考え，調べ，確かめ，わかり，納得する学習活動を促す。そこに初めて『おぼえる』だけの学び方と異なる，物事の確かさに基づく，自分の『理解』を形成していくことを可能にする。一般にそう言われているとか，そう教えられたとかではない，自分の内部で確かめられた根拠に基づいて，自分なりの理解や考えを作ることができてこそ，そこに他人とは異なる自分が存在し，自分は自分であるという存在感と同時に，その人らしい『知性』，さらには『個性』も育つと言えるであろう。」[1)]と述べている。私たち教師が考えた根拠に基づいて，教師がねらいをもって生徒に理由を説明するのも大切である。しかし，生徒たち自らが，様々な根拠を基に自分たちで説明し合い論じ合うことこそが，自分なりの理解や考えをつくることにつながると思ったのである。故に，生徒の発想をできるだけ大切にして，その発想からどのように考えていくと解決の方向に向かうことができるかという視点で，私たち教師も一緒に考えることにした。

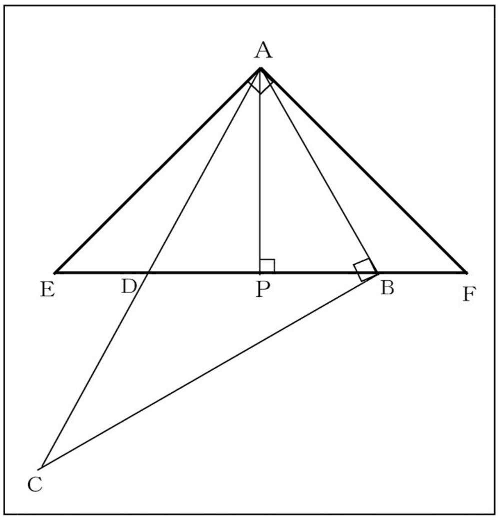
2-4 生徒の４つの思考とその考察

さて，授業はどうなったのか。最初は，15度になるという説明はすぐにできると思っていた生徒が多かったのだが，実際に説明の段階になると，なかなか上手くいかなかった。筆者の「どう考えればいいかな？」の問いかけに対し，ある生徒Ａが挙手し，**図３**のように補助線を入れて次のように説明をした。

生徒Ａ：「ここ（点Ａ）から垂線をひくと，60度の角が30度に分けられます。三角形は３つの角の合計が180度だから，ここ（∠ＡＤＰ）が60度になります。すると，その横の角が120度になり，15度だと分かります。」

この生徒Ａの説明に，誰も意見しなかった。生徒たちは理解したのかどうなのか，よく分からないような雰囲気だった。そこで，まず筆者が質問をした。

図３　生徒Ａの考え



教　師：「ちょっといいかな。垂線をひくと60度の角が30度に分けられると言ったけど，それはどうして？」

生徒Ａ：「それは垂線をひいたらそうなるから。」

教　師：「垂線をひくと角が二等分されるのは，三角形が二等辺三角形か正三角形のときじゃない？その三角形は？」

生徒Ａ：「正三角形だと思います。」

教　師：「それはどうしてかな？」

生徒Ａ：「　・・・・・　。」

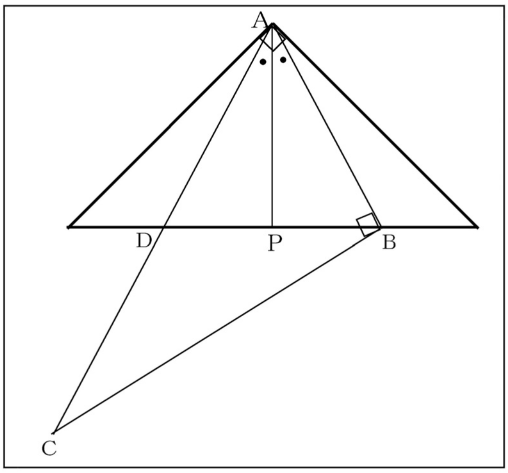
教　師：「そこがはっきり言えれば，説明としてはＯＫだね。」

この生徒は既にこの段階で，特別な線（補助線としての垂線）を入れるという発想が身についており，補助線を引かないと解決できそうにないという見通しを持っていることも感じ取れる。また，△ＡＤＢが正三角形だという見通しも持てていることが分かる。次に，生徒Ｂが挙手し，次頁の**図４**のように補助線を入れて説明を始めた。

生徒Ｂ：「ここ（点Ａ）から角の二等分線をひきます。すると60度の角が30度に分けられます。さらに底辺と垂直に交わるのでここが90度だから　・・・。だから15度だと分かります。」

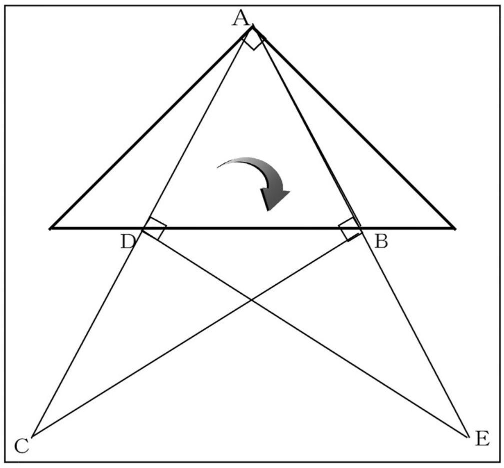
角の二等分線をひくと垂直に交わることについて，他の生徒たちに「どうか？」と尋ねると，それは△ＡＤＢが二等辺三角形か正三角形だと分かっていないと言えないという。この生徒も△ＡＤＢが正三角形であることを説明できなかったが，「二等辺三角形の頂角の二等分線が底辺を垂直に二等分する」という性質は知っているようである。また，生徒Ａの発想を聞いて，それを参考にして，補助線を利用する，垂線ではなく角の二等分線を使う，を考えたのではないか。さらに生徒Ｃが**図５**のような補助線を引き，

図４　生徒Ｂの考え



生徒Ｃ：「この細長い三角定規を裏返して重ねます。すると，ここ（ＡＢ）とここ（ＡＤ）は同じ辺だから同じ長さになります。だから，この三角形（△ＡＤＢ）は二等辺三角形だと分かります。しかも，ここ（∠ＤＡＢ）が60度なので，この三角形は正三角形です。」

図５　生徒Ｃの考え



今度は，多くの生徒たちがうなずき始めた。納得した様子の生徒たちに，私たちが問う。

教　師：「何か疑問がある人はいませんか？」

ＴＴ講師：「裏返して重ねたときに，本当にピッタリ重なると言えますか？」

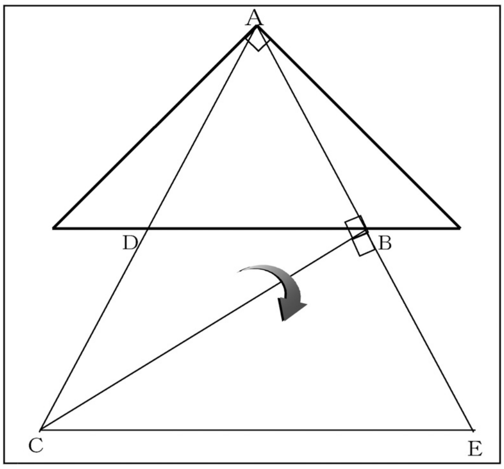
教　師：「つまり，60度の角どうしだから辺がきれいに重なるのは分かるけど，頂点がここ（点Ｄ）の角に本当に来るといえるの？こんな場所に来ることはないの？」

数名の生徒たち：「ああ〜。」

教　師：「実は，先生もそこが何とかして言えないかなあと思っていたんだけど・・・。」

この生徒は，新しい発想で考え，△ＡＤＢが正三角形であることを説明しようとした。これも，説明が上手くいかなかったが，この生徒は，∠ＤＡＢが60度と分かっているので，△ＡＤＢが二等辺三角形であると言えれば，それでも解決につながることに気づいていたと思われる。今度は，生徒Ｄが，**図６**のように補助線を引いて，説明すると言いだした。

図６　生徒Ｄの考え



生徒Ｄ：「この三角定規を下の方にひっくり返して合わせます。すると，この大きな三角形（△ＡＣＥ）が正三角形になります。すると，ここの辺（ＡＢとＢＥ）が等しく１：１なので，△ＡＤＢと△ＡＣＥは相似な三角形になります。」

教　師：「相似だということはＤＢとＣＥが平行だということかな？」

生徒Ｄ：「はい。」

ＴＴ講師：「それはどうしてですか？」

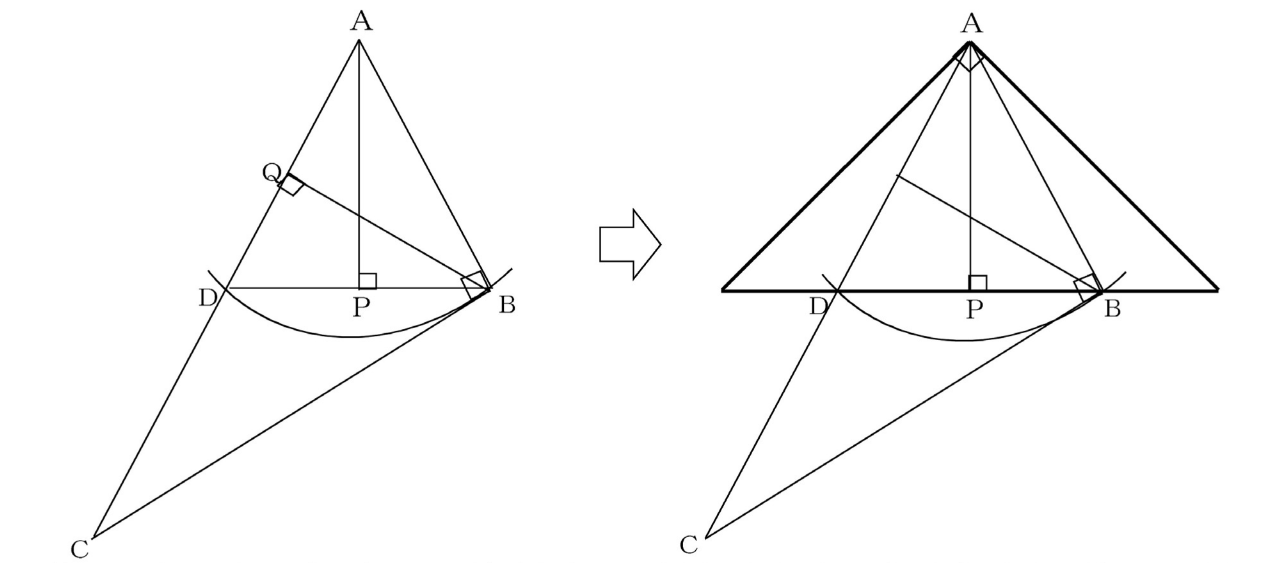
生徒Ｄは補助線ＤＥを加えながら説明を続けたが，なかなか平行というところにはたどり着けなかった。この生徒は生徒Ｃのアイデアを参考にし，三角定規を裏返して重ねる方法を変えたのではないかと思われる。

ここまで，４人の生徒の考えや説明を示してきたが，筆者はここで次のようなことを考えた。それは，一見，全く新しい発想をした生徒Ｃは，生徒Ａ，Ｂの発想を参考にしていないようにも思える。しかし，時系列で考えたときに，最初からすぐその発想が浮かんでいたのかどうかである。筆者はむしろ，生徒Ｃは，生徒ＡやＢの考えで上手くいかないことを聞きながら，発想の転換を図って考え直したと考えられなくはない。もし，そうであれば，一人一人の考えは深まってきているはずである。

2-5 思考の深化へ

生徒たちは，△ＡＤＢは正三角形以外にはあり得ないということが直感的に分かっていても，それを論理的に説明して解決することができない状況だった。この辺りから生徒たちのやる気（本気）に火がつき始めるのを感じた。辺りがざわつきはじめ，議論する塊（グループ）が自然に数カ所できた。また，前後左右以外の離れた席の生徒とも，情報交換をしている光景がみられた。必至に考える生徒や，説明を理解しようと興味深く聴く生徒，どこか理屈が通っていないところがないかを鋭くチェックする生徒など様々である。この時にはもう，「でも，そこは重なるといえないんじゃないか？」等の発言（質問）が自然に飛び交う雰囲気になっていた。この状況であるから，本時だけで解決できるはずがなかった。結局，議論の途中で授業が終わってしまった。しかし，授業が終わっても10名近くの生徒が黒板に集まり，私たちを説得しようとしたり，黒板にかいて続きを友だ

図７　生徒Ｅが父親と一緒に考えた方法

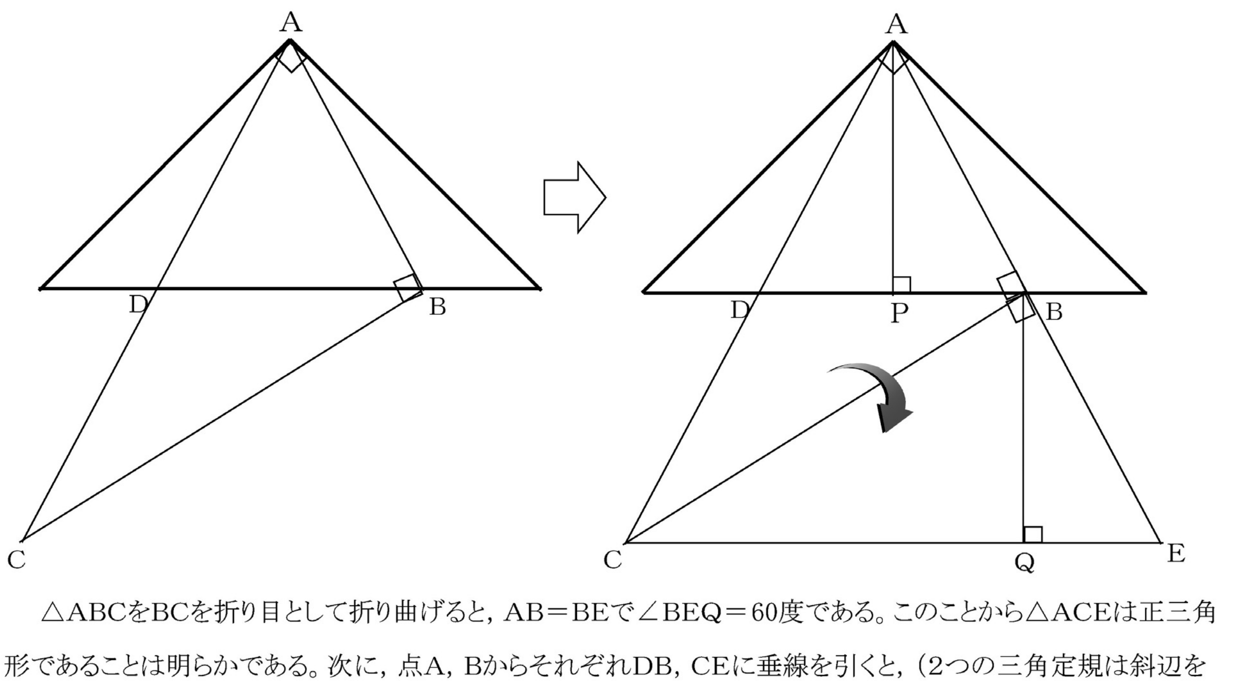


最初に90°・60°・30°の角をもつ三角定規(△ABC)をかきます。次に，点Aを中心とする半径ABの円をかき，辺ACとの交点をDとすると，△ABDは正三角形。なので，点A，Bからそれぞれ辺DB，ADに垂線AP，BQをひくと，その長さは等しい。2つの三角定規は，斜辺を共通底辺としたときの高さが等しくなっているので，直角二等辺三角形の三角定規が，ピッタリはまることが分かる。

ちどうしで議論したりしていた。掃除の時間が始まってもなかなか議論をやめようとしない生徒もいた。ある生徒の単元の振り返りアンケートによると，「まわりの人の意見を聞くのが面白かった。”あと少しで完全に筋の通った説明ができるのに”という意見が多くて，その授業の時は，そうじの時間も考えてしまうくらいでした。」と書かれていた。宿題とは言わなかったが，次の数学の時間に「先生，分かりました！」という生徒Ｅが出てきた。その内容は，前時までみんなで議論していた方法とは違っていた。生徒Ｅは，△ＡＤＢが正三角形になることをどうしても証明できないために， 前頁**図７**のように最初に正三角形をつくってから三角定規を重ねるという逆の発想で考えていた。生徒Ｅの説明を聞いて，確かによく考えてきたものだと筆者も他の生徒たちも感心した。その生徒によると，夜に自宅で父親と一緒になって考えたということだった。最終的に，一番納得できたという意見が多かったのが，この生徒Ｅの方法であった。生徒Ｅは，授業後も生徒Ａ～Ｄの発想をもとにして，何とか私たち教師を納得させようと考えながら説明を繰り返したが，やはり△ＡＤＢが正三角形と言えなければ解決できず，その事実を証明するのは容易ではないという結論に達したのであろう。それ故に，逆から考えるという発想の転換が生まれたのは，この生徒にとっては必然的であったのかもしれない。また，前時の授業で”２つの三角定規は斜辺を共通底辺としたときの高さが等しい”という事実を確認していたとはいえ，このタイミングでそのことを活用できたのは，図を多面的にみる力や既習の知識を利用する力などが，この生徒は十分身についてきていると判断できるのではないか。

また，あるクラスでは誰も解決できず，授業中に生徒ＦとＴＴ講師のアイデアの組み合わせで解決できた。それは**図６**の考えに補助線を加えた**図８**の方法で，その解法も紹介する。

図８　生徒ＦとＴＴ講師のアイデア



△ABCをBCを折り目として折り曲げると，AB＝BEで∠BEQ＝60度である。このことから△ACEは正三角形であることは明らかである。次に，点A，BからそれぞれDB，CEに垂線を引くと，（2つの三角定規は斜辺を共通底辺にしたときの高さは等しいので）AP＝BQである。よって，△APBと△BQEは，直角三角形の斜辺と他の一辺が等しいので合同であることが分かる。だから，∠ABP＝60度であり，△ADBは正三角形となる ・・・。
（直角三角形の合同については，TT講師が生徒たちとのやりとりの中で気づいたことである。この合同条件は2年次に学習するようになっているため，深く触れることはしなかったが，数名の生徒は納得していた。）

3　終わりに

今回の授業では，特に話し合いの機会や時間を設定したり，グループ学習の形態を取り入れたりしなくても，なかなか一人では解決できない，でもどうしても解決したい，もう少しヒントや分かることがあれば解決できそうなのに，といった状況が生まれ，自然に周囲と議論し合うようになった。今回の理由を説明する課題は，決して簡単なものではなかったが，生徒たちの感覚では”解決できる”という手応えがあり，教材そのものも取り組みやすく様々な視点から考えることが可能であったことが，良かったのかもしれない。今回の授業を通して，改めて，どのような教材を用いるかは非常に重要であることを痛感した。また，私たち教師側も，生徒の発想を生かしながら，そこからどう考えていけばいいのかを一緒に考えるという姿勢で臨んだため，生徒たちは先生を驚かしてやる（先生より先に解決してみせる）という気持ちになったのかもしれない。

【引用文献】

1）武田　忠　「自ら考える授業への変革［四つの問い]が学ぶ力をつける」　学陽書房 2001.8.p26

【参考文献】

秋田喜代美，藤江康彦　「はじめての質的研究法―教育・学習編」　東京図書 2007.
武田　忠　「自ら考える授業への変革［四つの問い]が学ぶ力をつける」　学陽書房 2001.8.
市川　伸一　「教えて考えさせる授業を創る」　図書文化 2008.7.