

研究論文

# 「内包量」に関する研究

河口 希\* ・ 井上 正允\*\*

## A Study of Intensive Quantity

Nozomi KAWAGUCHI\* and Masachika INOUE\*

### 【要約】

小学校5年、6年で学習する「混み具合」や「速さ」を、学習指導要領では「異種の二つの量の割合」ととらえる。しかし、筆者らはこれを「内包量」ととらえる。これは、1958年の「割合論争」から続く現在の算数・数学教育が抱える論点である。この論議は、かけ算の意味にまで発展する。学習指導要領では、かけ算の意味を（基準量）×（割合）＝（全体量）で考える。それに対し、「内包量」ととらえる立場では、かけ算の意味を（1あたり量）×（いくつ分）＝（全体量）で考える。

小論では、黒木哲徳、遠山啓の論考を手がかりにして、本テーマに迫る。研究をもとに5年生の「内包量」の指導プランを作成し、実践を試みた。

### 【キーワード】

内包量、かけ算の意味、単位量あたりの大きさ（割合）、量のとらえ直し

## 1. はじめに

新幹線のはやて号は3時間に630km走り、のぞみ号は2時間に480km走ります。どちらが速いでしょうか。  
(新しい算数6上 東京書籍平成23年2月発行)

この問題は、一般に以下の2つの式を立て、比較した上で答えを導く。

$$(\text{はやて号}) \quad 630 \div 3 = 210$$

$$(\text{のぞみ号}) \quad 480 \div 2 = 240$$

これは、子どもが苦手と感じる「速さ」の問題である。計算で得られた210や240は何を意味するのか。また、この数をどのようにとらえるのか。これは意見が分かれる問いであり、重要な問いでもある。小学校学習指導要領では、これを「異種の二つの量の割合」としてとらえる。つまり、「割合」と考えるのである。それに対して、210や240を「異種の二つの外延量の商」として導き出される量（これを「内包量」または「単位あたり量」と呼ぶ。以下「内包量」と記す）をとらえる考え方もある。つまり、「量」ととらえるのである。

「割合」は80%、8割などと表すが、%、割は単位ではない。 $0.8, \frac{8}{10}$  という数である。それに対して、「量」には単位がつく。「量」としてとらえれば、「210km/時」や「240km/時」と記すことができる。しかし、教科書には「時速210km」や「時速240km」と記されている。このような表記に対し、違和

\*佐賀大学大学院教育学研究科

\*\*佐賀大学文化教育学部

感を覚えるのは筆者だけだろうか。

また、初めて乗法を学習する2年生の導入課題は  $(1\text{あたり量}) \times (\text{いくつ分}) = (\text{全体量})$  である。

「1あたり量」について、銀林浩は次のように説明している<sup>(1)</sup> (銀林 2008)。

加減のとき扱っていた数(整数)は、物の個数のように「大きさ」や「多さ」という量を反映した離散量だった。しかし世の中には、クルマ(乗用車)1台あたりについているタイヤ4本のように、1つの個数に決まった数だけ付随している量(離散量)がある。同様に昆虫の足6本のように、生物の器官や製品の部品などの個数も決まっている。また、スーパーマーケットなどでは、たいていの商品が決まった数だけパック(包装)して売られているから、こうした数量は日常生活でも事欠かない。

このように、1つの物に固有に付随している数量を「1あたり量(quantity per unit)」という。これは、将来連続量に進んだとき、単位体積あたりの質量である「密度」とか単位時間あたりの移動距離である速度のような「単位あたり量」あるいは「内包量」に発展していくものである。そのため1あたり量はむしろ、「詰まり具合」あるいは「強さ」を意味しているといってもよいのである。(下線は引用者)

銀林は、「1あたり量」を離散的な量のかけ算の中で登場する量、「内包量」を長さ、体積、重さ、時間などの連続的な量のかけ算の中で登場する量であると区別する。「内包量」の指導について論じる前に、乗法の導入課題である「量のかけ算」について分析する必要がある。「内包量」に関する論争は、 $(1\text{あたり量}) \times (\text{いくつ分}) = (\text{全体量})$  のとらえ方と深く関係するからである。これについては、次節で取り上げる。

筆者は、上記の210km/時や240km/時などを「異種の二つの量の割合」としてとらえず、距離を時間で割ることで新しくつくり出される量、つまり、「内包量」であるとの認識をもって

いる。  
小論では、筆者が2011年1月～2月にかけて附属小学校5年生を対象に行った「内包量」に関する授業についてとり上げる。今回は計10時間の授業実践のうちの2時間の授業(「混み具合」を数値化する)に焦点を当て、分析したい。なお、今回の授業では、式に組み立て単位(人/km<sup>2</sup>など)はもちろん、単位や助数詞を記入することを徹底した。これは、どのような量を計算しているのか、3つの量の関係を子どもたちに意識させるためである。

筆者自身、小学校でかけ算を初めて学習した際、組み立て単位をつけて式をかくよう指導された経験をもつ(写真1・2)。当時の日記も出てきたが、それには、「算数がわかるようになったよ。」と書かれていた。確かに、式に単位をつけてかくことで、なんだか分かった気になったことを覚えている。

しかし、写真1の「7まい/人」の「人」と「5人」の「人」が約分により消えることは、「決まり」として教えられ、「なぜ消えるのか」疑問に感じることもなかった。しかし、学年が上がり、中学生になった頃だったか、単位の約分について「あっ!そういうことだったのか…」と気づいた。組み立て単位をつけて立式することは、このときだけだったような気がする。当時は「1あたり量」と「速さ」が同じ構造をもつなど考えもしなかった。

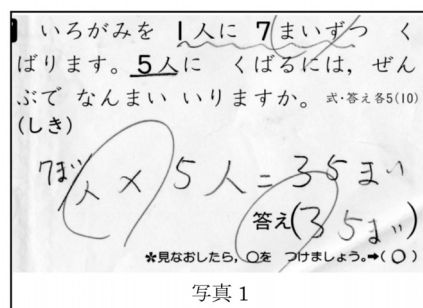


写真1

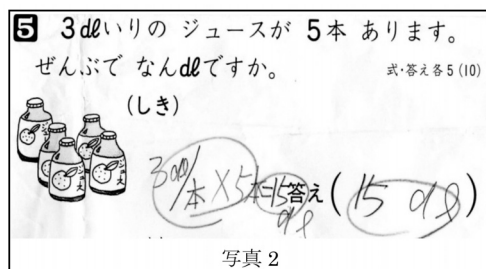


写真2

10時間の授業実践後、子どもたちに「式に単位をつけてかくこと」に対し、アンケートを実施した。36人のうち21人が単位をつけて立式することに好印象を抱いており、「分かりやすい」「単位をつけることで、自分で見てすぐ分かる」「式の意味が分かった」などの意見が挙がった。その一方で、「面倒くさい」「単位をつけなくても分かる」「単位を考えるのに時間がかかる」などの意見も挙がった。実際、正しい単位をつけて立式できている子は少なく、習得には相当な時間がかかることも分かった。

## 2. 学習指導要領・教科書の分析

写真3は、小学校2年生で学習する乗法の導入場面を表したものである<sup>(2)</sup>（東京書籍 2010）。

乗法は同じ数のまとまりに着目し、それがいくつあるかによって全部の数を求める計算として導入される。これが、(1あたり量) × (いくつ分) = (全体量) である。遠山啓は、これを1つの独立した乗法の意味であると主張した。しかし、そうではない考え方もある。「倍のかけ算 (もとの量 × 倍 = 全体量)」につなぐ入口として、(1あたり量) × (いくつ分) = (全体量) を導入するのであって、これを1つの独立した乗法の意味であるとは考えない。学習指導要領は、後者の考えを採用していると考えられる。“考えられる”と表現したのも、指導要領解説には「量のかけ算」と「倍のかけ算」は別物であるかのように説明された箇所（第5学年の内容）と、あくまで「量のかけ算」は「倍のかけ算」への入口として導入されると説明された箇所（第2学年の内容）があるからだ。それぞれの学習指導要領解説にかかれた説明をみていきたい。

以下は、現行の『小学校学習指導要領解説算数編』<sup>(3)</sup>（第2学年の内容）からの引用である。

### ア 乗法が用いられる場面とその意味

乗法は、一つ分の大きさが決まっているときに、その幾つ分かに当たる大きさを求める場合に用いられる。つまり、同じ数を何回も加える加法、すなわち累加の簡潔な表現として乗法による表現が用いられることになる。また、累加としての乗法の意味は、幾つ分といったのを何倍とみて、一つ分の大きさを何倍かに当たる大きさを求めることであるといえる。（下線は引用者）

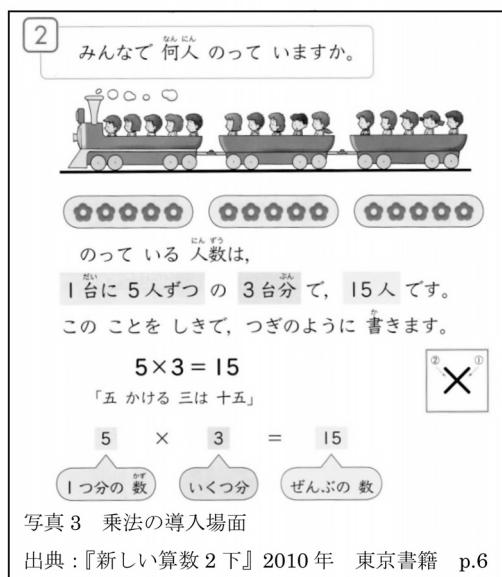
上記の説明を受け、教科書では「いくつ分」を「何倍」と言い換えて「倍のかけ算」を導入する。写真4は、「倍のかけ算」の導入ページからとったものである<sup>(4)</sup>（東京書籍 2010）。

ところが、同じ『小学校学習指導要領解説算数編』<sup>(5)</sup>第5学年の内容では、次のような記述がある。

### ア 小数の乗法、除法の意味

#### 小数の乗法の意味

整数の乗法については、「一つ分の大きさが決まっているときに、その幾つ分かを求める」、「何倍かに当たる大きさを求める」などの場合に用いる。



3 cm の 2 つ分の ことを、3 cm の 2 ばいといひます。

3 cm の 2 ばいの 長さをもとめるときも、  
 $3 \times 2$  の かけ算の しきに なります。

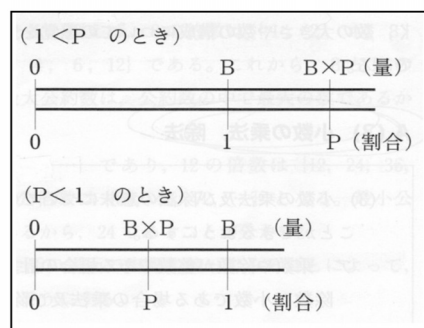
写真4 「倍」の定義

出典：『新しい算数 2 下』2010 年 東京書籍 p.10

第5学年では、乗法を乗数が小数の場合にも用いることができるようにしたり、除法との関係も考えて、より広い場面や意味に用いることができるようにしたりして一般化していく。その際、数量関係を表している文脈が同じときには、整数の場合に成り立つ式の形は、小数の場合にもそのまま使えるようにする。

例えば、1メートルの長さが80円の布を2メートル買ったときの代金は、 $80 \times 2$ という式で表せる。同じように、「1メートルの長さが80円の布を2.5メートル買ったときの代金が何円になるか」という場合、布の長さが2.5倍になっているので、代金も2.5倍になるということから、 $80 \times 2.5$ という式で表せる。

こうしたことから、整数や小数の乗法の意味は、Bを「基準にする大きさ」、Pを「割合」、Aを「割合に当たる大きさ」とするとき、 $B \times P = A$ と表せる。(下線は引用者)



第2学年の説明では、乗法を同数累加でとらえるのに対して、第5学年の説明では、整数の乗法の意味には「量のかけ算」と「倍のかけ算」があると2つを分けて明記している。

2年生で学習する倍を使ったかけ算は、「80円の2倍の値段はいくらか」などのように、一次元の世界である。それに対して、5年生で学習するかけ算は「1メートルの長さが80円の布を2.5メートル買ったときの代金はいくらか」などのように、長さや代金という2つの量が関係してくる。つまり、二次元の世界である。長さや代金の問題には2つの解法がある。1つは、布の長さが $2.5\text{m} \div 1\text{m} = 2.5$ より、2.5倍になっているから、代金も2.5倍になる、よって、 $80\text{円} \times 2.5 = 200\text{円}$ とする方法である（学習指導要領解説に明記）。もう1つは、布は1mあたり80円、つまり80円/mだから、2.5mならば、 $80\text{円/m} \times 2.5\text{m} = 200\text{円}$ であると考えする方法である。前者を「倍のかけ算」、後者を「量のかけ算」と呼ぶならば、「倍のかけ算」には単一の量の伸び縮み（倍）を求めようとするものと、上記の例のように、長さの倍を利用して代金を求めようとするものの2種類があることが分かる。5年生で学習するかけ算の2つの解法は関係し合うが、これをつなぐことは難しい。この学習は、小学6年生・中学1年生で学ぶ比例の学習に直結する。

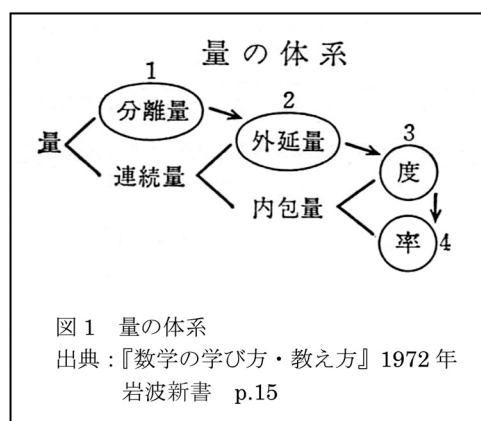
さて、解説の説明に戻るが、ここには乗法の意味のとらえ方に少し差があることが分かる。学習指導要領解説でさえも異なる解釈を引き出すのである。それほど、頭を悩ます問題がここには、はらんでいっていることだろう。では、なぜこのような乗法の意味において、認識の違いが生まれたのか。これには、両者の量に対する認識の違いが深く関係する。かけ算を同数累加つまり、倍でとらえようとする人たち（「割合主張派」と呼ぶことにする）と $(1\text{あたり量}) \times (\text{いくつ分}) = (\text{全体量})$ を1つの独立したかけ算の意味であると考える人たち（「量の体系に立つ人々」と呼ぶことにする）、両者の量に対する認識や乗法・除法の意味に対する認識の違いについて、考察していく。

「量の体系に立つ人々」で、最も代表的な人物が遠山啓である。遠山は、「量は物質や物体の一側面を表わす一つの指標であり、数は量の抽象的表現である」と認識し、指導の根本的な方針は「物体 → 量 → 数」であって、その逆ではないと主張する<sup>(6)</sup>（遠山 1961）。

また彼は、量の指導のなかで最も重要なものは「量概念の形成」であると主張した。「低学年から一步一步、正しい量概念を養っていくには、多種多様の量を適当に分類し、つかみやすい量からはじめて、それを足場にしながら、つかみにくい量へとつなげていく方法がとられねばならない」と唱え、量の体系を築いた<sup>(7)</sup>（遠山 1960）。図1は、遠山が築いた量の体系である<sup>(8)</sup>（遠山 1972）。量はまず、分離量と連続量に分けられる。分離量とは、ひとつひとつが分離していて、数えることで数値化される量である。連続量とは、ひとつつながりになっていて、単位に分けて測ることで数値化される量である。次に、



連続量は外延量と内包量に分けられる。外延量とは，“大きさ”や“広さ”を表す量であり，加法的（合併型）が成り立つ量である。例えば，長さ・重さ・面積・体積・時間などがこれにあたる。それに対し，内包量とは，“質”や“強さ”を表す量であり，加法的（合併型）が成り立たない量である。また，内包量は2つの外延量の商で数値化される量である。密度・濃度・速度などがこれにあたる。最後に，内包量は度と率に分けられる。度とは，異種の2つの外延量の商で数値化される量である。そのため，“人／km<sup>2</sup>”などのように組み立て単位を使って表示する。それに対して，率とは，同種の2つの外延量の商で数値化される量であり，単位はつかない。



これらから，遠山は，加法・減法は外延量を対象とした演算であり，乗法・除法は内包量を対象とした演算であると考えた。つまり，「乗法は累加」「除法は累減」ではなく，乗除は加減と切り離された別の演算（かけ算は“1あたり量”と“いくつつ”から“全体量”を求める演算，わり算は“全体量”と“いくつつ”から“1あたり量”を求める演算）であると考えた(9)（遠山 1972）。

黒木哲徳も，「累加の簡便法」として乗法を意味付けることに異を唱え，次のように乗法の意味を分類する(10)（黒木 2009）。

#### かけ算の意味

量のかけ算：（1あたり量）×（いくつつ）＝（全体量）

倍のかけ算：（もとの量）×（倍）＝（全体量）

積のかけ算（新しい概念を作り出す積）：（長さ）×（長さ）＝（面積）

次に，「割合主張派」の考えをまとめていきたい。

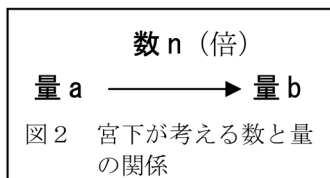
まず始めに，杉山吉茂の主張を紹介する。杉山は，除法を包含除でとらえるべきだと主張する(11)（杉山 2008）。

「割合」の項目があった昭和33年の学習指導要領のもとで起こった「割合論争」は，かけ算，わり算をどう考えるかの論争でもあった。量の体系に立つ人々は，かけ算を「内包量（一あたり量）×外延量」，わり算を「内包量を求める計算（等分除）」と主張した。その論争を経た後の学習指導要領には「割合」の項目はなくなり，割合は後退したようになった。（中略）割合の意味，これは「基準とする量を1と見て，その量で測った数」である。基準とする量を単位として測ること，つまり，量を測ること，測定することと同じ意味である。かけ算は割合の素地である。2×3は，2を単位として3つつ，2を1と見て3つつ，それが2の3倍の意味である。「2を単位として」という言い方は，内包量と同じように聞こえるかもしれないが，「2を単位として」と言っているときの2は外延量で，「3つつ」これは2を単位として測った測定値，つまり割合である。割合の意味に通ずる測定の意味を大切にしようとするならば，わり算は包含除を主とすべきであろう。6÷2の包含除の意味は「6の中に2がいくつあるか」と考えもので，これは測定の意味と同じである。3倍の意味は，「2を単位として6を測った数」と考えれば測定の意味になるが，「2を1としたとき6はどれだけに当たるか」と見れば割合である。表現は違うが，考えていることは同じである。（下線は，引用者箇所引用分の内容に合うよう，追加。）

杉山のこの論文に触発された宮下英明は、「数と量の関係は、＜数は量の比（数＝割合）＞であって＜数は量の抽象（数＝量）＞ではない」（下線は引用者）と主張する<sup>(12)</sup>（宮下 2011）。

＊「数は量の比」は、「数は量の関係概念＜比＞の対象概念化」を短くしたものである。

彼は、2量（量aと量b）の比（「倍」）を表現するものが数であると考えてる。宮下の数と量の関係を表したものが、図2である。しかし、彼は次のようにも論じている<sup>(13)</sup>（宮下 2008）。



「数＝量の比」と「数＝量」のうち正しいのは「数＝量の比」であるが、学校現場には「数＝量」がすっかり定着している。これを揺るがすことは、ほとんど絶望的に難しい。

これについて、小学校3年生で学習するわり算の導入場面をもとに考えてみたい。わり算には、「1あたり量」を求める等分除と「いくつ分」を求める包含除がある。例えば、何人かに分ける等分除を学習する際に、実際におはじきを操作することで「1あたり量（1人分の数）」を求めることから始める。このように、量を扱った具体的場面を通して、子どもたちはわり算を学習していく。このような点から、学校現場に「数＝量」が定着していることが分かるだろう。

また、宮下は「数が量をつくる」と主張する<sup>(14)</sup>（宮下 2008）。

3メートルの長さのものがこの世にあるかどうかに関係なく、「3メートル」を意識に対象化することはできる。思考は、「メートル」と数を素材にして、「長さ」という量を概念的に構築する。

これは遠山の〈物体 → 量 → 数〉とは、全く逆の思考である。

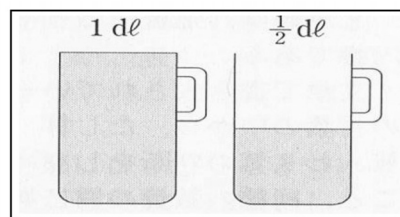
このように、量に対する認識には大きな違いがある。浪川幸彦は、数学の系統性と数学教育の系統性は異なると考え、数学と数学教育での概念の「定義」の違いについて、次のように説明する<sup>(15)</sup>（浪川 2007）。

学問的記述（数学）では厳密性が第一とされる。概念の「定義」は厳密に、しかもできるだけ無駄のない形で行われる。これに対し、教育の場（数学教育）においては、学習者の発達段階・到達度にふさわしい形で概念や命題が提示される。学習者の理解に応じて、論理的な厳密さよりも、直感的な理解にとどめる場合が少なくない。（下線は引用者が追加）

この説明から、遠山や宮下の量認識の違いが理解できる。数学者である遠山は、数学教育の立場に立って量と数の関係を説明し、数学教育研究者である宮下は、親学問である数学を重視する立場に立つ。

また、杉山の論文でも触れられた「割合論争」とは1958年（S33）に巻き起こった論争である。この論争の中心になった人物が、遠山と和田義信（1951年（S26）・1958年（S33）の学習指導要領作成に尽力）である。遠山は量の体系に立ち、分数を定義した。これが「量の分数」である。それに対して、和田は $\frac{2}{3}$ は2と3の割合といったように、2つの数の割合と見て、分数を定義した。これが、「割合分数」である。「量の分数」と「割合分数」について、具体例を交えて説明する。

例えば、あるコップのかさをdL単位で調べたら、下の図のようであったとする。この場合、右側のコップの水の量は、1dLの $\frac{1}{2}$ であり、これを $\frac{1}{2}$  dLと表すことにする。この $\frac{1}{2}$  dLは、単位に満たない端数表示のために使われる分数である<sup>(16)</sup>。この分数が「量の分数」である。『指導要領解説』では「AはBの $\frac{2}{3}$ というように、Bを1としたときのAの大きさの割合を表す。」<sup>(17)</sup>と



「割合分数」を説明する。「2mは3mのどれだけにあたるか」は、3mを1として、2mの大きさの割合を

求めることで、 $2\text{m} \div 3\text{m} = \frac{2}{3}$  となる。これは、杉山の包含除の説明とも重なる。しかし、割合とは2つの量の関係概念であり、子どもには理解しにくい概念である。それに対し、「量の分数」は実体概念であるから子どもにも難なく理解できる。このような点から、「量の分数」から始めることになった。

次に、内包量の指導について、学習指導要領や教科書を使って分析したい。

学習指導要領では、内包量を「異種の二量の割合」としてとらえられる数量であると考え、これを「単位量当たりの大きさ」と呼んでいる。学習指導要領解説では、「二つの量がかかっているの、その一方をそろえてほかの量で比較する方法が用いられる」と説明している(18)。したがって、「はじめに」で紹介した速さの問題（はやて号）は、正しくは次のような式になるだろう。

$$(式) 630\text{km} \div \frac{3\text{時間}}{1\text{時間}} = 210\text{km}$$

実は「 $\div 3$ 」とは、「3時間と1時間の割合」を表していたのだ。しかし、教科書では上記のような式ではなく、「 $630 \div 3 = 210$ 」としか記されない。これでは、「 $\div 3$ 」が何を意味しているのか分からないだろう。子どもたちの中には、「 $630\text{km} \div 3\text{時間} = 210\text{km}$ 」と認識している子が大半いると考えられる。「単位量当たりの大きさ」ととらえるのならば、教師は「 $\div 3$ 」の正しい意味を子どもたちに伝える必要があるのではないか。そうしない限り、「 $630\text{km} \div 3\text{時間} = 210\text{km}$ 」のような距離を時間で割って新しく導き出された速さ（内包量）とも、割合の考えに基づいた「単位量当たりの大きさ」ともとらえられないものになってしまう。

\* 「内包量」であるとの立場をとれば、単位は「 $\text{km}/\text{時}$ 」となる。これは、距離（ $\text{km}$ ） $\div$  時間（ $\text{時}$ ）から新しく導き出された量であることを意味する。

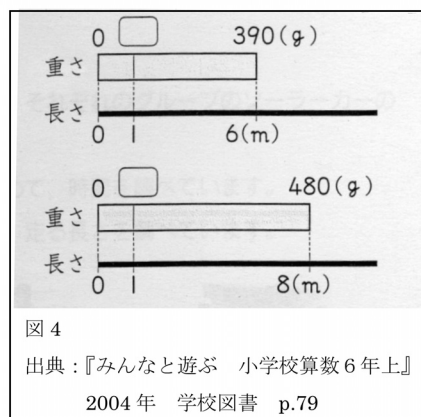
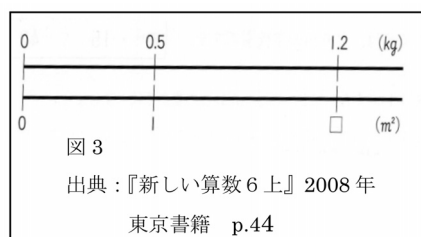
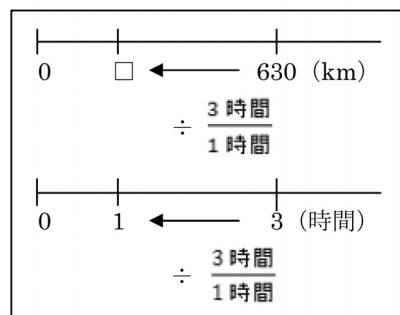
次に、教科書に登場する図に目を向けたい。教科書で扱われている図は、教科書会社によって様々である。

東京書籍(19)・教育出版・大日本図書・日本文教出版から発行された教科書は図3のように、2本の線分図（上：全体量 下：土台量）を使って表示している。

学校図書(20)から発行された教科書は図4のように、テープ図（全体量）と線分図（土台量）をそれぞれ1本ずつ並べて表示している。

これに対し、啓林館(21)から発行された教科書は図5のように、1本の線分図（上：土台量 下：全体量）を使って表示している。

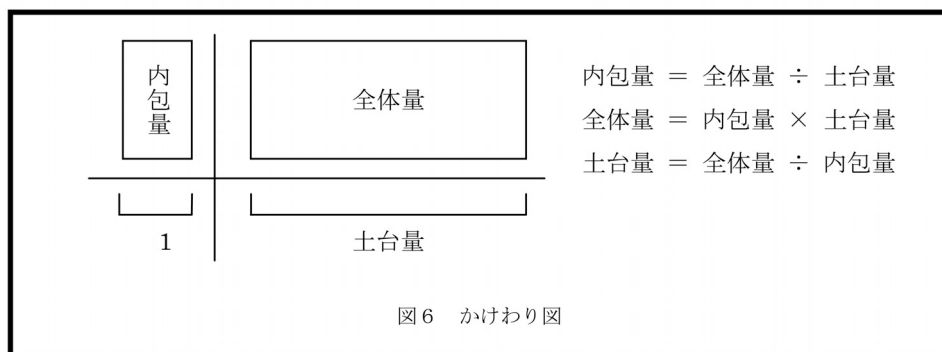
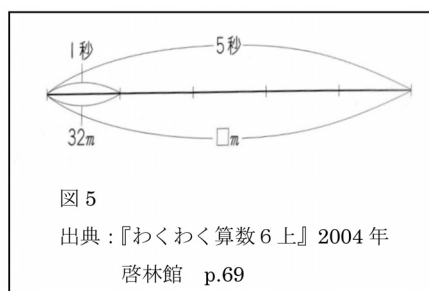
これらの表記では、内包量がどこを指しているのか分かりづらい。学校図書の図を例に挙げて説明する。学校図書のものは、全体量（重さ）をテープ図を使って表し、その下に土台量（長さ）を線分図を使って表している。これでは、内包量（1mあたりの重さ）がテープ図（重さ）と線分図（長さ）に含み込まれてしまう。そのため、内包量をとらえる際、長さ1mのとき



の重さのように長さや重さをセットにして考える必要がでてくる。「単位量あたりの大きさ」では、「長さ1mのときの重さ」で比較をするため、上記の図でよいのかもしれない。しかし筆者は、内包量・土台量・全体量の3つの量を別々に表現し、これら3つの関係が分かりやすい図にする必要があると考える。

鹿児島県の小学校教諭山本忠義もまた、教科書の問題点として、有効な図が用意されていないことを指摘する。山本は、「かけわり図」を提案している<sup>(22)</sup> (山本 2010)。

かけわり図とは、一般に図6を指す。かけわり図は3つの量の関係が分かりやすく、また、それぞれの量を求める演算が見つかりやすい。



次に、内包量を使った演算について分析したい。例えば、次のような3つの問題があったとする。

1. 15m<sup>2</sup>の畑からジャガイモが42kgとれました。1m<sup>2</sup>あたり何kgのジャガイモがとれたことになりますか。

$$(式) 42\text{kg} \div 15\text{m}^2 = 2.8\text{kg}/\text{m}^2$$

2. 1Lのガソリンで37.2km走るハイブリッドカーがあります。この車が15Lのガソリンを使うと何km走行できるでしょう。

$$(式) 37.2\text{km}/\text{L} \times 15\text{L} = 558\text{km}$$

3. 銅1cm<sup>3</sup>の重さは8.96gです。80.64gの銅のかたまりの体積を求めましょう。

$$(式) 80.64\text{g} \div 8.96\text{g}/\text{cm}^3 = 9\text{cm}^3$$

1は内包量を求める問題、2は全体量を求める問題、3は土台量を求める問題である。銀林浩は、これらを「内包量の3用法」と整理した<sup>(23)</sup> (銀林 1975)。

次に、2年生で学習したかけ算や等分除・包含除の問題を考える。

4. いちごが24個あります。3人で同じ数ずつ分けると、1人分は何個になりますか。

$$(式) 24\text{個} \div 3\text{人} = 8\text{個}/\text{人}$$

5. みかんを1人に3個ずつ配ります。7人に配るには、みかんは何個必要になりますか。

$$(式) 3\text{個}/\text{人} \times 7\text{人} = 21\text{人}$$

6. 20個のクッキーを1人5個ずつ分けると、何人に分けることができますか。

$$(式) 20\text{個} \div 5\text{個}/\text{人} = 4\text{人}$$



4は3年生で学習した等分除の問題、5は2年生で学習した1あたり量のかけ算の問題、6は3年生で学習した包含除の問題である。これらを「1あたり量の3用法」と呼ぶことにする。1～6までの問題の式から、1は4と、2は5と、3は6とそれぞれ同じ構造であることが分かるだろう。

(内包量の3用法) ←	→ (1あたり量の3用法)
1. 全体量 ÷ 土台量 = 内包量	4. 全体量 ÷ いくつ分 = 1あたり量 (等分除)
2. 内包量 × 土台量 = 全体量	5. 1あたり量 × いくつ分 = 全体量
3. 全体量 ÷ 内包量 = 土台量	6. 全体量 ÷ 1あたり量 = いくつ分 (包含除)

しかし、この事実は教科書に記されていない。筆者は、「内包量の3用法」が、これまで学習してきた「1あたり量の3用法」と同じ構造をもつことを指導するべきだと考える。これが、子どもたちの学習のとらえ直しとなるからである。

### 3. 5年生の「内包量」指導にあたって心がけたこと

内包量の指導において、柴田義松監修 銀林浩・岩村繁夫編著『算数の本質がわかる授業⑤いろいろな量』日本標準(2008年)や小林道正監修 沼里喜代三著『こまったときの算数の教え方5年生』大月書店(2010年)や山野下とよ子が著した論考「現実の量から予想を立て本質を見ぬくー算数教室の中だけで終わらない学習をつくる(小5・6)ー」<sup>(24)</sup>(山野下 2007)、鹿児島県小学校教諭山本忠義の実践<sup>(25)</sup>(山本 2010)を参考にした。

次に指導案をつくるにあたって心がけたことを述べる。

#### (1) ものや体を使った実験などを通して、内包量を作りだすといった活動の展開

内包量は感覚でとらえやすい量であるが、目に見えない量であるため理解しにくい。そのため、第1時～第6時までの指導においては、ものや体を使った実験などを通して、その量の存在を意識させた上で、内包量を作りだすといった学習を展開した。

第1・2時の「混み具合」では、車両に見たてた新聞紙を使って混み具合ゲームをさせ、一人ひとりに混み具合を体感させた。

第3・4時の「人口密度」では、佐賀県、福岡県、東京都、神奈川県、岩手県の「混みこみ」ランキングをつくることを目標に授業を展開した。前時の「混み具合」と違い、「人口密度」は自分の体で量の大きさを感じとることはできない。しかし、各都道府県の白地図に人口10万人を1点として、等間隔に点を打たせることで、目で見て、およその混み具合の違いに気づくことができるのではと考え、試みた。

第1時から第4時で学習する「混み具合」や「人口密度」は平均の考えを使って、均等に分布しているとみなしたものであり、現実の量とはかなりかけ離れた場合があることも授業の中でふれた。「人口密度」は、人が本来住んでいない水田や森林、湖等にも均等に人が住んでいると見なすことで数値化できる量である。このことは、子どもたちには新たな発見となったようだ。

第5・6時の「物質密度(つまり具合)」は教科書では扱われていない。しかし、「物質密度」という内包量を通して1つの意味を解明することで、「内包量や算数はわたし達の生活で役に立っているんだ!」と感じてほしく授業の中に取り入れた。子どもたちの中には、重い大根は沈み、軽いにんじんは浮くという固定概念を抱いている子が多い。しかし、実験結果は逆であった。子どもたちは、目を輝かせながら大根とにんじんの浮き沈みの謎を解明していった。

\* 「物質密度」は前時までの「混み具合」や「人口密度」と違い、ある1つの物体の2つの側面に着目する必要がある。ものや体を使った実験は時間がかかることも考慮に入れ、それぞれを2時間構成の授業を組み立てた。

「混み具合」(分離量) ÷ (分離量) ⇒ 「人口密度」(分離量) ÷ (連続量) ⇒ 「物質密度」(連続量) ÷ (連続

量)と段階をふみながら指導していった。小学校で学習する外延量には、「長さ、重さ、面積、体積、角度」などいろいろあるが、それらは、それぞれ1つの単位として、10時間前後の時間をかけて学習することになっている。それに対して、小学校で学習する内包量には主に、「混み具合、人口密度、収穫度、単価、燃費、配布度(5年時)・仕事の速さ、移動の速さ(6年時)」などがある。しかしそれらは、「単位量あたりの大きさ」という単位の中で学習する。附属小学校が使用する日本文教出版の教科書では、指導時間6時間となっている。これでは「人口密度」と「移動の速さ」が同じ構造をもつ内包量であるとの認識は得られない。授業のなかでゲームや実験を扱うことを考慮に入れ、全8時間で構成する授業展開を計画した。

## (2)「かけわり図」を使いながら、「内包量の3用法」を既習内容と関連させ整理する

教科書の分析から、かけわり図を用いた指導や「内包量の3用法」と「1あたり量の3用法」が同じ構造をもつことを指導すべきだと論じた。

今回の授業では、「内包量の3用法」を「かけわり図」を使って整理した上で問題演習に取り組ませた。「内包量の3用法」を整理する際は、「かけわり図」を使い3つの量の関係を確認することで、内包量の第1用法(全体量÷土台量＝内包量)は小学3年生で学習した等分除(全体量÷いくつ分＝1あたり量)と、内包量の第2用法(内包量×土台量＝全体量)は小学2年生で学習した量のかけ算(1あたり量×いくつ分＝全体量)と、内包量の第3用法(全体量÷内包量＝土台量)は小学校3年生で学習した包含除(全体量÷1あたり量＝いくつ分)と関連していることに気づかせた。

また、それぞれの演算の意味を大切にするために(どのような量の計算をしているのか意識させるために)、式には組み立て単位(人/km<sup>2</sup>など)はもちろん単位や助数詞を記入するようにした。

「内包量の3用法」を扱った問題はしっかりと時間をかけて、指導することが必要である。今回の授業では「内包量の3用法」に1時間しか当てることができず、ポストテストの結果から、子どもたちの理解は不十分であることが分かった。

\*正しく立式できていた子どもの割合は、第1用法の問題で36人中35人(97%)、第3用法の問題で36人中26人(72%)だったのに対し、第2用法の問題では36人中16人(44%)にとどまった。3つの量の関係をつかむ点が、不十分だったのではないかと考えられる。

## (3)内包量を通して世の中のできごとを見直す活動を展開

内包量は、河川の汚濁濃度、原発から漏れる放射線によって人体が受ける吸収線量など環境問題を考える上でも欠かすことのできない量である。さらに、労働者の時給、国民1人あたりの軍事費や労働失業率など、世の中の真実を見抜くために必要な量である。

第8時では、生活の中の内包量について取り上げた。地球温暖化をテーマにして、世界14ヶ国の二酸化炭素排出量(2006年)の表を子どもたちに与え、そこから1人あたりの二酸化炭素排出量を計算させた。1人あたりの二酸化炭素排出量を求めることで、これまで見えてこなかったそれぞれの国の新たな一面が見えてきた(第8時では、「単価」についても取り上げた)。

これらの活動を通して、算数は自分たちが生きていくことに大変役立つことや、役立っただけではなく、だまされない生き方へつながっていくことがわかるだろう。

## 4. 実践授業の主な流れ

筆者は、大学院教育実習(佐賀大学文化教育学部と佐賀県教育委員会の連携・協力事業の1つである)として、2010年10月から約半年間(毎週火曜日)、附属小学校5年生の子どもたちと共に過ごしてきた。下の表は、附属小学校5年生を対象に、筆者が実践した「単位あたり量(内包量)」における授業の主な流れを記したものである。

不均等なものを均等なものとして考える内包量		平均の考えが必要ない内包量
1・2時	3・4時	5・6時
<p>「混み具合」を数値化する。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・「混んでいる」「空いている」という言葉について考える。</li> <li>・混み具合ゲームをする。</li> <li>・「乗客数÷車両数」から混み具合という新しい量を作り出す。</li> <li>・混み具合を体感する。</li> <li>・かけわり図を知る。</li> </ul>	<p>5つの都道府県の「混みこみ」ランキングをつくる。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・佐賀県、福岡県、神奈川県、東京都、岩手県の混みこみランキングの予想を立てる。</li> <li>・都道府県の人口密度を1点を10万人として、点の混み具合で表す。</li> <li>・「人口÷面積」から人口密度という新しい量を作り出す。</li> <li>・人口密度は平均の考えを用いて数値化された量であることを知る。</li> </ul>	<p>大根とにんじんの浮き沈みの謎を解き明かす。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・大根とにんじんの水槽実験をする。</li> <li>・なぜ重い大根が浮いて、軽いにんじんが浮いたのか理由を考える。</li> <li>⇒ 詰まり具合（密度）に着目する。</li> <li>・「重さ÷体積」から密度という新しい量を作り出す。</li> <li>・水の密度やいろいろな金属の密度を知る。</li> <li>・大根とにんじんの浮き沈みの謎を密度に着目して解決する。</li> <li>・木製のブロックで水槽実験をする。</li> </ul>

内包量の3用法	生活の中の内包量
7時	8時
<p>内包量の3用法を整理する。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・前時までを振り返り、式を整理する。</li> </ul> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <math display="block">\begin{array}{rcl} \text{混み具合} &amp; = &amp; \text{乗客数} \div \text{車両数} \\ \text{人口密度} &amp; = &amp; \text{人口} \div \text{面積} \\ \text{密度} &amp; = &amp; \text{重さ} \div \text{体積} \\ \downarrow &amp; &amp; \downarrow \quad \downarrow \\ \text{単位あたり量} &amp; &amp; \text{全体量} \quad \text{分量} \end{array}</math> </div> <ul style="list-style-type: none"> <li>・内包量の3用法、内包量の3用法とかけわり図の関係について知る。</li> <li>・第1用法は、小学校3年で学習した等分除</li> <li>・第2用法は、小学校2年で学習した「量のかけ算」</li> <li>・第3用法は、小学校3年で学習した包含除と同じ構造をもつ。</li> <li>・3用法の問題をかけわり図を使いながら解く。</li> </ul>	<p>生活の中の内包量を見つける。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・3種類のたまごの中から、1番お得なたまごがどれか、単価を計算することから求める。</li> <li>⇒ 日常の場面で、内包量を使って物事を考えることでよりよい判断ができることを知り、内包量の有用性に気づく。</li> <li>・各国の二酸化炭素排出量のデータから新しい内包量を作り出し、各国の新たな一面や問題点を発見する。</li> <li>⇒ 算数（内包量）を使うことで新たな発見ができること、また、算数がわたしたちが生きる上でとても大切な役割を担っていることを感じる。</li> </ul>

## 5. 第1・2時 「混み具合」を数値化する

本時の目標は、子どもが「混み具合」とは、乗客数÷車両数から新しく導き出される量であることを認識することである。ここでは、「混み具合」の数値化に焦点を当て、本時の授業を紹介したい。

導入では、どのような場面で「混んでいる」「空いている」という言葉が使われているのかを考えた。これは、以前、子どもたちに「長い」「短い」という言葉は「長さ」という量と、「重い」「軽い」という言葉は「重さ」という量と、「広い」「狭い」という言葉は「広さ」という量と関係しており、わたしたちが日頃使っている形容詞は、量と関連していることを伝えていたからである。

次に、「混んでいる」という状況をつくりだすために、混み具合ゲームを実施した。混み具合ゲームとは、新聞紙1枚を電車1両に見立てて、2種類の電車のうち、どちらが混んでいるのかを考えるゲームである。

まず始めに、車両数が同じ場合で混み具合ゲームを実施した。子どもたちは、乗客数が多い方が混んでいることにすぐに気づいた。次に、乗客数が同じ場合で混み具合ゲームを実施した。子どもたちは、車両数が少ない方が混んでいることにすぐに気づいた。これらは、生活経験やA電車とB電車の見た感じからも分かることであった。

最後に、車両数も乗客数も違う場合で混み具合ゲームを実施した。A電車は4両で、乗客数は3人、B電車は2両で乗客数は2人である。見た感じではどちらが混んでいるのか分からない。どちらが混んでいるのか、どうにかして分からないかと考えることにした。

問題を整理すると次のようになる。

4両編成で3人が乗っているA電車と2両編成で2人が乗っているB電車でどちらが混んでいるでしょうか。

A電車とB電車の「混み具合」は次のようになる。

A電車・・・3（人）÷ 4（両）＝ $\frac{3}{4}$ （人／両）	1両あたりの乗客数
B電車・・・2（人）÷ 2（両）＝ 1（人／両）	

授業では、上記のような式を立てた。そして、 $\frac{3}{4}$ や1が「人／両」を単位にもつ新しい量であることを強調した。これらは「1両あたりの乗客数」を意味し、「 $\frac{3}{4}$ 人マイ両」や「 $\frac{3}{4}$ 人パー両」と読むと指導した。

子どもたちは、組み立て単位に戸惑いを感じていたが、「5年生で習った商分数（ $3 \div 4 = \frac{3}{4}$ ）と同じで、単位も「人÷両＝ $\frac{\text{人}}{\text{両}}$ ＝人／両」となる」という指導教員の説明で、理解できたようであった。

この後、各号車毎に分かれて混み具合ゲームを実施した。数名の子どもたちだけでなく、全員に「混み具合」を体感してほしいと考えたからだ。このとき、車両数が同じで、大柄な子どもが2人乗るA電車と、小柄な子どもが2人乗るB電車で、見た感じはA電車が混んでいるように感じても、「混み具合」は同じになることも確認した。

最後に、かけわり図について指導し、授業を終えた。

＊かけわり図について、10時間の授業実践後のアンケートでは「分かりやすい」「全ての単位あたり量の問題に使える」などの意見が挙がる一方、「面倒くさい」「時間がかかる」といった意見も挙がった。36人中21人の子どもたちが、今後もかけわり図を使っていきたいと考えていることが分かった。

## 6. まとめ

「はじめに」でとり上げた210や240を「量（内包量）」をとらえるのか、「割合（単位量当たりの大きさ）」をとらえるのか。これは、現在の算数教育が抱える1つの論点である。しかし、この論議は今に始まったことではない。1958年の「割合論争」から続いていたのである。それは、「量をどうとらえるのか」から始まり、「乗法や除法をどうとらえるのか」という論争にまで発展する。「割合論争」から50年以上が経過したが、今もなお、この論争は終わりを見せてはいない。

筆者は210や240を「量（内包量）」であるととらえる。「内包量」は「1あたり量」から積分にまで発展する、生活に根づいた量である。「内包量」として考えることで、2年生で学習したかけ算や3年生で学習したわり算（等分除・包含除）が「内包量の3用法」と同じ構造であることが理解できる。さらに、「内包量」は中学校で学習する比例や一次関数に直結する<sup>(26)</sup>。比例定数は、内包量を意味する。内包量が一定であるから、変化の割合（変化率）も一定になるし、一様変化となりグラフは直線となる。中学校の比例や一次関数の学習で、これらが意識されているとは言い難い。また、連立方程式の文章題や



積分は、(1あたり量) × (いくつ分) = (全体量) というかけ算の意味で理解できる<sup>(27)</sup>。積分とは、「細かく分けて、かけて、たす」ことである。全体の面積は、微小区間（細かく分けて）の面積（かけて）をたしていくことで求められる。微小区間の面積を求める際、(1あたり量) × (いくつ分) = (全体量) の考え方が使われる。このように、小学2年生で学習する(1あたり量) × (いくつ分) = (全体量) は、小学校の算数から中学・高校で学ぶ数学までを一貫してつないでくれる。

現在、算数や数学が役に立たないと感じる子どもは少なくない。附属小学校5年生もまた、算数は役に立つと感じるが、それは低学年で学習する内容に留まっていたり、計算技能だけであつたりとバラつきが多かった。そのような子どもたちと共に、算数や数学は役に立つんだと実感できるような課題に取り組むことが大切だ。また、子どもがあつと驚くような課題（場面）を設定することも大切である。その1つの例として今回「内包量」の授業実践を紹介した。

春からわたしの教員生活が始まる。式に単位をつけてかくよう指導するなどの工夫をしながら、量と演算の関係について意識できるような子どもを育てていきたい。その際、重要な概念が「1あたり量」や「内包量」である。

最後に、「算数は楽しい」「算数ってすごいね」と感じられる子どもを育てていきたい。

## 参考・引用文献一覧

- (1) 柴田義松監修 銀林浩・篠田幹男編著  
『算数の本質がわかる授業② かけ算とわり算』日本標準（2008年）p. 9
- (2) 『新しい算数2下』東京書籍（2011年）p. 6
- (3) 『小学校学習指導要領解説算数編・平成20年8月』東洋館出版（2008年）p. 75
- (4) 『新しい算数2下』東京書籍（2011年）p. 10
- (5) 『小学校学習指導要領解説算数編・平成20年8月』東洋館出版（2008年）pp. 143 - 144
- (6) 『遠山啓著作集 数学教育論シリーズ5 量とはなにか I 内包量・外延量』  
太郎次郎社（1978年）pp. 160-161——初出『教育科学』1961年6月号・明治図書
- (7) 『遠山啓著作集 数学教育論シリーズ5 量とはなにか I 内包量・外延量』  
太郎次郎社（1978年）p. 105——初出『算数教育』1960年11月号
- (8) 遠山啓著『数学の学び方・教え方』岩波書店（1972年）p. 15
- (9) 『遠山啓著作集 数学教育論シリーズ5 量とはなにか I 内包量・外延量』  
太郎次郎社（1978年）pp. 118-120——初出『科学朝日』1972年5月号・朝日新聞社
- (10) 黒木哲徳著『入門算数学 第2版』日本評論社（2009年）p. 41
- (11) 杉山吉茂「わり算は包含除一割合の理解の素地として」  
——『日本数学教育学会誌 第90巻 第2号（2008年）』pp. 2 - 6
- (12) 宮下英明「数と量の関係は、＜数は量の比＞であって＜数は量の抽象＞ではない」  
——『日本数学教育学会誌 第93巻 第8号（2011年）』pp. 2-11
- (13) (14) 宮下英明「「わり算」「割合」の概念整理」  
——『日本数学教育学会誌 第90巻 第4号（2008年）』pp. 67 - 70
- (15) 浪川幸彦「数学という学問から問う数学教育のあり方—子どもの発達を見据えた新しい系統性に基づくカリキュラムの提言—」  
——小寺隆幸・清水美憲編著  
『未来への学力と日本の教育7 世界をひらく数学的リテラシー』明石書店（2007年）p. 197

