

残余利益オプションモデルによる株式価値評価

—残余利益評価に対する非線形確率手法の実装—

佐 藤 清 和*

- I はじめに
- II 残余利益の性質と機能
- III 残余損益オプションモデル
- IV モンテカルロ・シミュレーション
- V 問題と課題

I. はじめに

残余利益モデル (Residual Income Model, RIM) では、純利益のうち株主資本コストを超過する部分であるエクイティ・スプレッドとしての残余利益をもって株式価値の源泉とみなす。この残余利益が株主から要求される期待超過リターン (利益配当や株式売買益を含んだ投資利得の将来流列に関する割引現在価値) の代理変数であるならば、これを株式価値の源泉とする RIM には、株式投資における意思決定上の有用性があると期待される。

しかしながら、企業会計実務における期間損益計算に基づいて、株主に帰属する利益として計算される純利益ではなく、純利益から会計測定の対象ではない株主資本コストが差し引かれたエクイティ・スプレッドとしての残余利益が、株式投資のための意思決定有用性を持つというのは、時々エビデンスによって検証されるべき仮説に過ぎず、あくまで企業会計情報と資本資産価格との関係性について観測を続け、実証的な視点からの検討を要する課題であり、必ずしも会計測定における自明の命題ではない。

これに対して、会計測定の対象としての株式価値について検討する際には、

* 金沢大学

高頻度のトレーディングを目的とする短期的流動性としての株式と企業支配や投下資本の安定運用を目的とする長期的保有対象としての株式の測定属性が異なることについて、株式の運用形態に応じた外延的属性に加えて、株式自体に内包される意義や機能に基づいた、いわゆる「株式の意味」という視点からの理論的考察が必要である。

本稿では、このような問題意識のもと、残余利益と株式価値との関連性について定性的および定量的な視点から考察する。ここで定性的視点とは、残余利益に期待される、企業の倒産リスクに対するヘッジ機能に着目することを意味しており、また定量的視点とは、このようなリスクヘッジ機能をリアルオプションの視点から定量化することを意味している。

本稿の構成は、以下のとおりである。第2節では、残余利益が有するリスクヘッジ機能とそのリアルオプション価値について検討する。第3節では、このような残余利益が有するリアルオプション価値に基づく、株式価値評価モデルとしての残余利益オプションモデル (Residual Income Option Model, RIOM) を提示する。その上で第4節では、RIOMの諸性質について検討するためにモンテカルロ・シミュレーションならびに感度分析を実行する。最後の第5節は、本稿の結論と今後の課題である。

II. 残余利益の性質と機能

2.1 残余利益の定義とRIMの導出

残余利益について検討する前に、ここでは残余利益の定義、およびRIMの導出過程について確認しておく。株式等の資産価値の源泉は、その資産から得られると期待される将来キャッシュフローの現在価値に求められる。株式の保有者である株主にとっての将来キャッシュフローとは、将来にわたって支払われる配当金の流列からなる。このような利益配当面から株式価値を評価するのが、配当割引モデル (Discounted Dividends model, DDM) である。ここで株主資本コスト率 r_e および配当 d_t とすると、DDMによる t 期の株式価値 V_t は、次式によって与えられる。

$$V_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} (1+r_e)^{-\tau} E_t[d_{t+\tau}] \quad (1)$$

現時点（当期末）は $\tau=0$ であり，継続企業を前提に $\tau \rightarrow \infty$ としている。なお $E_t[\cdot]$ は時点 t における期待演算子を示している。DDM の問題点は，将来事象である配当支払額を正確に予測することが困難であるところにある。なぜなら，利益配当の決定とは，経営者による配当政策の影響を受けるため，必ずしも企業業績に連動しない場合があるからである。そもそも無配政策をとる企業の場合，DDM による株式価値の予測自体が不可能となる。

これに対して RIM では，配当額ではなく残余利益を株式価値の源泉と考え， t 期における残余利益 π_t^r とは，純利益 π_t から株主資本コストを控除した後の異常利益（abnormal income）と定義される。したがって，株主による投資額に見合った期待投資収益率を意味する株主資本コスト率 r_e によって t 期末における株主資本コストは $r_e B_{t-1}$ で与えられ，残余利益は次式によって定義される。

$$\pi_t^r = \pi_t - r_e B_{t-1} \quad (2)$$

ただし，RIM の導出にあたっては，次式のクリーンサープラス関係（Clean Surplus Relationship, CSR）が成立していることが前提となる。

$$B_t = B_{t-1} + \pi_t - d_t \quad (3)$$

CSR のもとでは，式(3)のようにすべての取引記録が期間損益計算の過程を経由し，その結果生じた純利益と配当額との差額によって期末の株主資本が形成されることになる。そこで，株主資本の長期的成長率が株主の期待収益率 r_e よりも小さく，そのため株主資本は永久には成長しないこと，すなわち， $\tau \rightarrow \infty$ のときに $(1+r_e)^{-\tau} E_t[B_{t+\tau}] \rightarrow 0$ と仮定する。これは株式のターミナルバリューが，期間 $\tau \rightarrow \infty$ においてゼロになること，言い換えれば企業倒産時の残余財産価値は，予測時点 t の株式価値には影響しないと仮定することを意味する。その上で，式(3)における配当 d_t を式(1)の DDM に代入すると，RIM による株式価値の予測値 V_t は次式のように与えられる。

$$V_t = B_t + \sum_{\tau=0}^{\infty} (1+r_e)^{-\tau} E_t[x_{t+\tau}^a] \quad (4)$$

式(4)のとおり RIM による株式価値とは、現時点 t における株主資本簿価と残余利益の割引現在価値との和で与えられる。すなわち、株主の期待投資収益を示す株主資本コストを超過する残余利益に基づく RIM とは、株主から要請される期待投資収益をハードルレートとして、株式価値の増減変動を説明する評価モデルということができる。

2.2 残余財産請求権のリスクヘッジ機能

前述のとおり、RIM では無期限の将来時点にわたる残余利益をもって株式価値の源泉と見なす。ただし、ここで企業の存続期間が有限であり、その終末時点における株式価値について考えると、この場合の残余利益とは、企業清算時における残余財産の値（当初の株主資本を除く）に収束する。このことに注目すれば、残余利益には残余財産の減少に起因する企業の倒産リスクに対するヘッジ手段としての機能があるということになる。そこで、以下では残余利益のリスクヘッジ機能とその測定方法について検討する。

株式には、株主に帰属する自益権として、利益配当請求権ならびに残余財産請求権という2つの条件付請求権が化体されている。したがって、株式の本源的价值とは、これら2つの請求権の対象となる利益配当と残余財産の総額で与えられる。

利益配当請求権は、純利益（および利益剰余金）を原資とする配当金に対する分配請求権であり、資本剰余金の一部を別とすれば、純損失が生じた場合、株主はこの請求権を行使できない。したがって、このような条件付請求権である利益配当請求権の価値とは、原資産を純利益とした場合、決算日を満期日、また権利行使価格を株主資本コストとする、ヨーロピアン・コールオプションのプレミアムとして評価することが可能である¹ [19, 20, 21]。

ただし、1.1で述べたように、経営者による配当政策の影響を受ける利益配当額を予測することは困難であることに加え、配当落ち後の株価下落というような株式市場の反応もあるため、本稿では利益配当請求権そのものをコールオプションとして測定可能な株式価値の構成要素とは考えない。

これに対して RIM では、受取配当金や株式売却益からなる株主の期待投資収益としての株主資本コストが差し引かれた後の残余利益 $x_{t+\tau}^a$ をもって株式価値の源泉と考える。ただし、通常は式(4)のような企業の永続性が仮定されることはなく、企業の倒産（清算）時点 T までの任意の予測期間が設定され、予測時点である τ 期末以降の株式価値については、これをターミナルバリュー V_T として一括で設定される。これより RIM による株式価値は次式で与えられる。

$$V_t = B_t + \sum_{\tau=0}^{T-1} \left[\frac{x_{t+\tau}^a}{(1+r_e)^{t+\tau}} \right] + \frac{V_T}{(1+r_e)^T} \quad (5)$$

さらに株式に化体されたもう一つの条件付請求権である残余財産請求権とは、企業の倒産（清算）時点 T における残余財産に対する株主の分配請求権を意味している。ここでターミナル時点 T を企業の倒産時点とすると、同時点における企業の清算価値としての残余財産 V_T は、次式で与えられる。

$$V_T = A_T - L_T \quad (6)$$

ここで、 A_T および L_T は、それぞれ時点 T における資産総額および負債総額の予測値を示す確率変数である。残余財産請求権とは、時点 T において A_T が L_T を超過した場合に生じる残余財産 V_T に対する分配請求権のことである。ただし、倒産時点において資産総額が負債総額を下回り債務超過 ($A_T < L_T$) の場合、残余財産はゼロとなるため株主は残余財産請求権を行使できない。したがって、残余財産請求権とは、企業倒産（清算）時点を満期日、また資産総額を原資産、さらに負債総額を権利行使価格とするヨーロピアン・コールオプションと同じペイオフ構造を有していることになる。本稿では、このオプションを「残余財産オプション： C_L 」と呼び、次式のように定式化する [19]。

$$C_L = e^{-r_F(T-t)} \{E_0^Q [\text{Max} [A_T - L_T, 0]]\} \quad (7)$$

ここで、 $E_0^Q[\cdot]$ は $t=0$ におけるリスク中立確率測度 Q に基づく期待値を与える演算子であり、また r_F は無リスク金利である。

前述の残余利益ならびに式(7)の資産総額および負債総額の予測が正しけれ

ば、株式価値を与える式(5)と式(6)は一致する。そこで、式(7)右辺の残余財産を示す $A_T - L_T$ の部分に式(5)の右辺を代入することにより、残余財産が有するコールオプション価値は、次式で与えられる。

$$C_t = e^{-r_F(T-t)} E_0^Q \left[\text{Max} \left\{ B_t + \sum_{\tau=0}^{T-1} \frac{x_{t+\tau}^a}{(1+r_e)^{t+\tau}} + \frac{V_T}{(1+r_e)^T}, 0 \right\} \right] \quad (8)$$

式(8)において、倒産時点を示す $t+\tau=T$ 期以降のターミナルバリューはゼロとなるから、時点 T で企業が清算される場合、残余財産オプション C_t は、株主資本簿価 B_t と残余利益 x_t^a の現在価値 I_t 、およびターミナルバリュー V_T の和によって構成される。

ここで、残余財産がゼロ未満となり債務超過に陥ることを企業倒産と定義すると、残余財産の保有が維持されていることをもって倒産が回避された状態と見なすことが可能である。すなわち、前述のとおり残余利益には、決算日ごとに権利行使される利益配当請求権ではなく、每期、残余財産オプション価値 C_t の増分として認識され、企業の倒産リスクを回避するヘッジ機能を有するところにオプションとしての価値があると考えられる。

2.3 残余利益のリアルオプション価値

式(7)のとおり、残余財産オプション価値 C_t を評価するためには、資産総額を原資産、負債総額を権利行使価格とするヨーロピアン・コールオプションの評価モデルを用いればよい。しかしながら、原資産となる資産は、流動・固定あるいは有形・無形といった多様な項目から構成され、これらの増減変動を逐一予測することは困難である。また資産総額の変動は、経常的な企業業績には関わらない投資政策や資本調達によっても大きく変動する。これらのことから資産総額を原資産とするオプション評価には大きな困難がともなう。

これに対して、本稿では式(8)のように残余財産の原資となる残余利益のペイオフ構造から、残余財産オプション価値 C_t を評価する。図1の左側は、横軸が売上高 S_t また縦軸は純利益 x_t を示しており、グラフ内の上から2番目の破線は、次式で表される純利益線を示している。

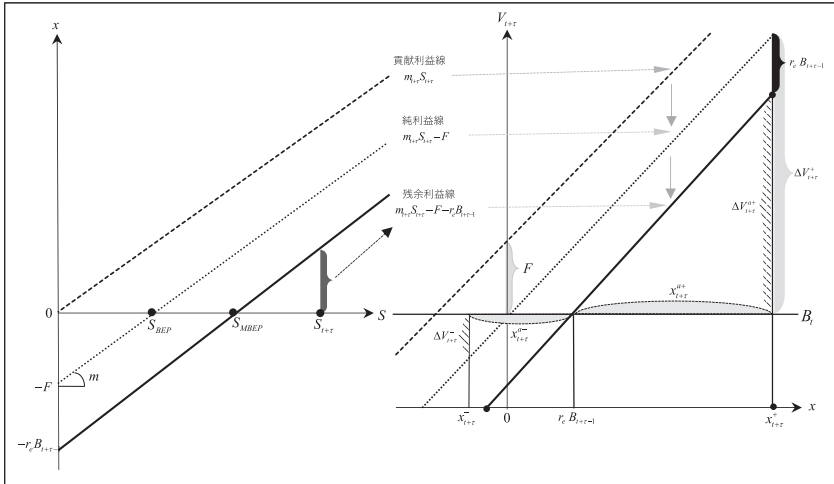


図1 純利益および残余損益のペイオフと株式価値

$$x_t = m_t S_t - F \quad (9)$$

純利益線は、 $S_t = 0$ の場合に発生する固定費 $F < 0$ を縦軸の切片として、傾きが貢献利益率 m_t の利益線であり、貢献利益率は $m_t = 1 - (VC_t/S_t)$ で定義される (VC_t は変動費)。図のとおり、貢献利益率 m_t を比例定数として売上高 S_t が増加すれば、固定費 F が貢献利益 $m_t S_t$ によって回収される。

貢献利益 $m_t S_t$ によって固定費 F が全額回収されると純利益 $x_t = 0$ になるから、この結果を式(9)に代入すると $S_t = F/m_t$ が得られるから、この売上高を損益分岐点 S_{BEP} と定義する。ここで $S_t < S_{BEP}$ の場合は、未回収の固定費部分が純損失となり、逆に $S_{BEP} < S_t$ の場合は純利益が得られる。なお本稿では、すべての費用が変動費と固定費に分解可能、つまり総費用 = 変動費 VC + 固定費 F とする。

さらに図1右側のグラフにおけるボトムラインの横軸は、時点 t から τ 期後の純利益 $x_{t+\tau}$ 、また縦軸には株式価値 $V_{t+\tau}$ がとられている。また同図において t 期首の株主資本 B_t が、この横軸に水平な直線 $V_t = B_t$ で示されている。これより横軸の株主資本線 B_t と縦軸 $V_{t+\tau}$ との交点を通る45度の破線（上から2番目の破線）が、左のグラフで得られた純利益線に対応することになる。

この純利益線が³、株主資本コスト $r_e B_{t+\tau-1}$ の分だけ右側にシフトした結果、次式のような残余利益線となる（太い実線）。

$$x_{t+\tau}^a = m_{t+\tau} S_{t+\tau} - F - r_e B_{t+\tau-1} = x_{t+\tau} - r_e B_{t+\tau-1} \quad (10)$$

ここで、純利益 $x_{t+\tau}$ が株主資本コスト $r_e B_{t+\tau-1}$ を超過し、式(10)の最左辺が $0 < x_{t+\tau} - r_e B_{t+\tau-1}$ の場合、その差額が残余利益 $x_{t+\tau}^a$ (> 0) となり、これが株式価値を $\Delta V_{t+\tau}^a$ （右端の斜線部分）だけ増加させる。この残余利益によって、株式価値（株主資本簿価）は $V_{t+\tau} = B_t + \Delta V_{t+\tau}^a$ になる。

一方、 $x_{t+\tau} - r_e B_{t+\tau-1} < 0$ のように残余損失 $x_{t+\tau}^a$ (< 0) となる場合は、株式価値は $V_t = B_t - \Delta V_{t+\tau}^a$ に減少する。すなわち、次式のとおりである。

$$\begin{cases} x_{t+\tau}^a > 0 \rightarrow V_{t+\tau} = B_{t+\tau-1} + \Delta V_{t+\tau}^+ \\ x_{t+\tau}^a < 0 \rightarrow V_{t+\tau} = B_{t+\tau-1} + \Delta V_{t+\tau}^- \end{cases} \quad (11)$$

式(11)は、残余利益 $x_{t+\tau}^a$ ないし残余損失 $x_{t+\tau}^a$ によって、決算日 $t+\tau$ を満期日として株式価値が増加ないし減少することを示している。このことは、企業清算時における残余財産請求権としての残余財産オプション価値 C_t が、残余利益 $x_{t+\tau}^a$ ないし残余損失 $x_{t+\tau}^a$ の額だけ毎期値洗い（再評価）されることを意味している。既述のとおり、このことは残余利益 $x_{t+\tau}^a$ が売上高を原資産、株主資本コストを権利行使価格、さらに決算日を満期日とするヨーロピアン・コールオプションのペイオフで複製されることに基づいている。

ただし、このようなコールオプションとしての条件付請求権に基づいて、残余利益 $x_{t+\tau}^a$ に対して利益配当請求権が行使されるわけではない。もとより残余利益とは、株主の期待リターンとしての株主資本コストに対する純利益の超過部分と定義されており、利益配当やキャピタルゲインからなる株主の期待リターンは、すでに株主資本コストに組み込まれているため、残余利益は利益配当の請求対象とはならないからである。したがって、残余利益は残余財産として累積されていくこととなり、最終的には企業倒産（清算）時における残余財産請求権の行使対象となる。

このように、残余利益に含まれるコールオプション価値とは、1会計期間に発生した残余財産の増分として累積され、将来（清算）時点における残余

財産に対する分配請求の対象となる。ただし、現在の株主には、将来の残余財産請求権が化体された株式の保有を継続するか、あるいは保有を止めて売却するか、いずれかの選択権が与えられている。そこで株式保有が継続される場合、それまでに累積された残余財産に対する分配請求権としてのコールオプション価値は、さらに次期以降に向けて企業内部に累積される。これとは逆に株式を売却する場合には、売却時点までに累積されたコールオプション価値に対応する残余財産請求権は放棄されることとなり、その時点で回収された売却代金が株主の投資リターンになる。

一方、式(11)の第2式における残余損失 $x_{t+\tau}^a$ の場合、将来の倒産（清算）時における分配対象となる残余財産を減少させるという点で、いわば負の請求権が発生していることになる。これは、売上高を原資産、株主資本コストを権利行使価格とするプットオプションとして複製された条件付債務と同一のペイオフ状態が生じていることを意味している。すなわち、純損失とは異なり株主資本コストの推定に基づいて測定される残余損失は、その測定時点において残余財産を即時減少させるものではなく、あくまで企業清算時において残余財産を減少させ得るリスク要因と位置付けられる測定属性を有しており、会計上の負債性引当金や偶発債務と同様の将来損失として認識されるべき測定対象だと考えられる。したがって、ここでのプットオプションとは、将来時点における残余財産の減少可能性を含意するショートポジション（売建て）を示すことになる。

以上のとおり、残余利益 $x_{t+\tau}^a$ および残余損失 $x_{t+\tau}^a$ は、それぞれ将来時点における残余財産オプション価値 C_t の増加分ないし減少分として、残余財産に対するコールオプション価値およびプットオプション価値を有していることから、これを「残余損益オプション価値 I_t^a 」と呼べば、リスク中立確率 Q のもとにおける I_t^a の現在価値は、次式で与えられる。

$$I_{t+\tau}^a = \sum_{\tau=1}^n (1+r_e)^{-\tau} \{E_t^Q[\text{Max}(m_{t+\tau}S_{t+\tau} - (F + r_e B_{t+\tau-1}), 0) + \text{Min}(m_{t+\tau}S_{t+\tau} - (F + r_e B_{t+\tau-1}), 0)]\} \quad (12)$$

式(12)において、右辺の第1項は残余利益が有するコールオプション価値、また第2項は残余損失が有するプットオプション価値を示している。

以上、残余損益オプション価値 I_t^o とは、残余財産オプション価値 C_t に対する毎期の値洗いによる評価額と見なされ、これが残余財産をヘッジ対象とするヘッジ手段として機能することが示された。

2.4 株主資本コストの検討

ここでは、残余利益の計算要素であり、また RIM における残余利益の割引率である株主資本コスト率について検討する。具体的には、株主資本コスト率 r_e の推定、および CSR における純資産の時価評価に関する問題を取り上げる。

株主資本コスト率 r_e は、株主にとっては投資に対する期待収益率である一方、経営者にとっては業績評価上のハードルレートと位置付けられる。ここでは両者に共通する資本コスト率として、CAPM による資本市場ベースの株主資本コスト率が推定可能であることを前提とする。このような資本市場ベースの株主資本コスト率とともに必要となるのが、株主資本コストの計算要素である、いわば資本市場ベースの純資産額としての株式時価総額である。

式(4)の RIM は、式(3)の CSR を前提に導かれるため、損益計算書を経由しない資本直入項目などからなる「その他の包括利益」が除外された純資産簿価が用いられる。しかしながら、RIM が成立する必要条件とされる CSR を時価ベースに変更することによって、CAPM による市場ベースの株主資本コスト率と整合性を有する株式時価総額（純資産時価）を用いた RIM が導出できる。

そこで時点 t における純資産簿価と株式時価総額との差額 b_t を求め、これを式(3)の CSR に代入することにより次式を得る。

$$B_t = B_{t-1} + b_t + x_t - d_t \quad (13)$$

ここで、株価純資産倍率 PBR （株価／1株当たり純資産）を用いれば、 $b_t = (1 - PBR)B_t$ である。これより CSR を条件とする RIM と同じ手順によって時価総額が反映された RIM が求められる。新たな RIM において時価評価の影響を受けるのは、次式の残余損益オプション I_t である²。

$$I_t = \sum_{\tau=1}^n (1+r_e)^{-\tau} E_t^Q [\text{Max}[m_{t+\tau} S_{t+\tau} - F - (r_e B_{t+\tau-1} - b_{t+\tau}), 0]] \\ + \sum_{\tau=1}^n (1+r_e)^{-\tau} E_t^Q [\text{Min}[m_{t+\tau} S_{t+\tau} - F - (r_e B_{t+\tau-1} - b_{t+\tau}), 0]] \quad (14)$$

この式(14)を式(12)と比較すると、株主資本コスト r_e が変化することにより、残余利益オプション I_t^a の権利行使価格が $r_e B_{t+\tau-1} - b_{t+\tau}$ となるところに違いがある。ここで、 $1 < PBR \rightarrow 0 < b_t$ であるから、これに対応する残余利益オプションの権利行使価格は下落する。他方で $PBR < 1 \rightarrow b_t < 0$ となるから、これに対応する残余損失オプションの権利行使価格は上昇することになる。

以上の RIM に関するペイオフ構造を示したものが図 2 である。このように純資産を時価に変換することによって、CAPM から得られる株主資本コスト率と整合性のある時価総額に基づく RIM が得られる。この時価に基づく RIM では、純資産の簿価と時価の差額に応じて、残余利益オプションと残余損失オプションの権利行使価格が異なるため、両者のペイオフもそれぞれの権利行使価格が反映された非対称性を示すことになる。

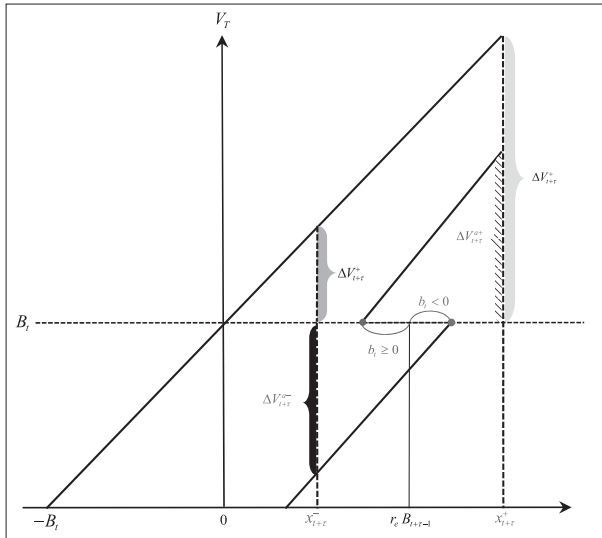


図 2 時価総額による RIM のペイオフ

Ⅲ. 残余利益オプションモデル³

3.1 売上高の確率過程と残余利益方程式

ここでは残余損益のリアルオプション価値を評価するための確率モデルを導出し、その解析解を提示する。そこで、まず残余損益オプションの原資産となる売上高の確率過程が、次式のような幾何ブラウン運動にしたがうと仮定する。

$$dS = \mu_s S dt + \sigma_s S dW \quad (15)$$

ここで、売上高の期待成長率 μ_s ならびに標準偏差 σ_s は定数とする。また時系列 W は標準ウィーナー過程に従う不確実要素として、 $dW = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\sqrt{\Delta t}} = \sqrt{dt}$ と定義されている。ここで、残余利益 x^a が売上高と時間の関数 $x^a = x^a(S, t)$ で与えられるとすれば、「伊藤の補題」により dx^a は次式に従うことになる。

$$dx^a = \left(\frac{\partial x^a}{\partial S} \mu_s S + \frac{\partial x^a}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x^a}{\partial S^2} \sigma_s^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial x^a}{\partial S} \sigma_s S dW \quad (16)$$

ただし、関数 $x^a(S, t)$ は2回微分が可能であると仮定する。その上で、以下では Black and Scholes (1972) によるオプション・プライシングにおける無リスクポートフォリオによる計算過程と類似する方法により、残余損益に関する偏微分方程式を導く。

まず式(10)により、残余損益 x^a に関する売上高 S による偏導関数は $\frac{\partial x^a}{\partial S} = m$ であることから、次式が与えられる。

$$\frac{\partial x^a}{\partial S} S - x^a = F + r_e B \quad (17)$$

したがって、微小時間 $\Delta t = t/n$ ($0 < n < \infty$) における式(17)の変化量は、次式のとおり表わされる。

$$\frac{\partial x^a}{\partial S} \Delta S - \Delta x^a = (F + r_e B) \Delta t \quad (18)$$

ただし、式(18)の右辺では、固定費と株主資本コストの合計額 $F + r_e B$ が、時間 Δt の経過に従って発生するコストと見なされている。固定費とは、事

業活動量（本稿では売上高）に連動して発生する費用ではなく、減価償却費がその典型であるような経時的性質を有している。

その一方、株主資本コスト $r_e B$ は、期首の株主資本 B と株主資本コスト率 r_e の積で定義されているとおり、期首の一時点で算定される資金調達コストである。しかしながら、これは会計期間を通じて株主によって期待される収益率であるため、固定費と同様の経時的コストとも考えられる。

そこで $\Delta t \rightarrow dt$ として、式(18)の ΔS と Δx^a に、それぞれ式(15)の dS および式(16)の dx^a を代入すると次式が得られる。

$$\left(-\frac{\partial x^a}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x^a}{\partial S^2} \sigma_S^2 S^2 \right) dt = (F + r_e B) dt \quad (19)$$

ここで、式(19)右辺の $F + r_e B$ に対して、式(17)の左辺を代入し、さらに両辺から dt を控除して辺々整理すると、次式のとおき残余利益 x^a に関する2階の偏微分方程式が得られる。

$$x^a = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x^a}{\partial S^2} \sigma_S^2 S^2 + \frac{\partial x^a}{\partial S} S + \frac{\partial x^a}{\partial t} \quad (20)$$

本稿では、式(20)の偏微分方程式を「残余利益方程式」と呼ぶこととする。本稿の主題である残余損益オプションの価値とは、この残余利益方程式の特殊解により与えられる。

3.2 境界条件としての残余損益分岐点

式(20)の残余利益方程式の一般解は、パラメータとして未定の積分定数を含むため一意には定まらない。これに対して、残余損益オプションのペイオフ構造を境界条件として与え、同式のパラメータを特定することによって、残余利益方程式の特殊解としての残余損益オプション価値が一意に求められる。

残余損益のペイオフ構造が示す境界条件とは、残余利益と残余損失の分岐点に位置する売上高として与えられる。これを「残余損益分岐点 R 」と呼ぶと、これは式(10)において、残余利益について $x^a = 0$ とおくことにより、次式で与えられる。

$$R = \frac{F + r_e B}{m} \quad (21)$$

以下では、 $0 < x^a$ と $x^a > 0$ の状態をまとめて残余損益と呼び x^a で表わす。そこで、売上高 S と残余損益分岐点 R によって、残余損益 x^a は次のように表わされる。

$$x^a = mS - R \quad (22)$$

ここで、期末時点 T における売上高 S_T に対して、時刻 T における残余損益 $x^a(S_T, T)$ は、次の条件式に従うペイオフを示す。

$$x^a(S_T, T) = \begin{cases} mS_T - R & \cdots S_T \geq R \\ mR - S_T & \cdots S_T < R \end{cases} \quad (23)$$

式(23)は、売上高 S_T が R 以上であれば残余利益 $x^a(S_T, T) \geq 0$ となり、一方で S_T が R 未満の場合は残余損失 $x^a(S_T, T) < 0$ となる。したがって、同式を境界条件として残余利益方程式を解くと、次式のような残余損益オプション価値 I^a が得られる。

$$I^a(S, t) = mS \cdot N(d_1) - Re^{-\tau} \cdot N(d_2) + mS \cdot N(-d_1) - Re^{-\tau} \cdot N(-d_2) \quad (24)$$

ただし、 $N(\cdot)$ は標準正規分布の密度関数を表わしており、 d_1 および d_2 は次式で与えられる。

$$d_1 = \frac{\log \frac{S}{R} + \left(1 + \frac{\sigma_S^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\log \frac{S}{R} + \left(1 + \frac{\sigma_S^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} - \sigma \sqrt{T-t}$$

式(24)の残余損益オプション価値を示す特殊解は、Black and Scholes (1972) のオプション価格モデルと酷似している。ただし、Black and Scholes モデルにおける無リスクポートフォリオの複製に基づくリスク中立評価法における安全利子率は用いられていない。Black and Scholes モデルの測定対象となるのは、金融派生資産の一つである株式オプションであり、その取引市場では株式と安全資産によるデルタヘッジと呼ばれる無リスクポートフォリオが複製できると仮定され、その上で資本市場における無裁定原理に依拠して、当該ポートフォリオの収益率が安全利子率に等しくなるという手順で株式オ

プシオンの価格モデルが導かれる。

これに対して本稿では、式(17)から式(20)で示したように、原資産である売上高から残余利益が計算される過程に着目することにより、式(20)の残余利益方程式を導き、その特殊解として式(24)の残余損益オプション価値が求められた。ここでは資本市場における安全利子率ではなく、個別企業における株主資本コスト率 r_e から得られる残余損益分岐点 R を、残余利益方程式の境界条件とする残余損益オプション価値が定式化されたことになる。

このような株主資本コスト率の影響は、式(24)の d_1 および d_2 の計算要素である残余損益分岐点 R に反映されている。したがって、式(24)の解析解を用いることにより、任意の測定時点 τ における残余損益オプション価値が一意に定まることになる。

IV. モンテカルロ・シミュレーション⁴

4.1 原資産の確率過程とパラメータの設定

ここでは、前節で導出された残余損益オプション価値 I_t^a の測定属性（測定手段としての性質）について検証するため、モンテカルロ法によるシミュレーションを実施する。シミュレーションでは、残余財産モデル（RIM）と残余利益オプションモデル（RIOM）による株式価値評価の相違点に注目して両者の差異を定量的に示し、さらに両モデルのパラメータに関する感度分析を行うことによって、RIM と RIOM の測定属性について比較検討する。

表1はRIOMに基づくシミュレーションを実行するための変数およびパラメータの初期値を一覧にしたものである。既述のとおり、残余損益オプションの原資産である売上高 S_t の確率過程は、式(15)の幾何ブラウン運動にしたがうと仮定されており、売上高 S_0 、売上高成長率 μ_0 および売上高ボラティリティ σ_0 の初期値は、それぞれ100百万円、2.50%および5.00%とされている。

売上高の確率過程から変動費、固定費および株主資本コストを差し引いて残余利益 x_t^a を求め、その上で式(24)の残余利益オプション価値 I_t^a を推定し、これをRIOMに代入することによって t 期における企業価値 V_t は、次式のとおり推定される。

変数・パラメータ	記号	設定値・単位等	
売上高初期値	S_0	100	百万円／四半期
純資産初期値	B_0	1,000	〃
売上高成長率初期値	μ_0	2.50	%／四半期
売上高ボラティリティ初期値	σ_0	5.00	〃
変動費率	ν	70.0	〃
固定費	F	80	百万円／四半期
法人税率	T	35.0	%／四半期
株主資本コスト率	r_e	2.00	〃
評価期間	t	25	年
タイムステップ	Δt	1	四半期
試行回数	—	100,000	

表1 モンテカルロ・シミュレーションの初期値およびパラメータ値

$$V_t = B_t + \sum_{\tau=1}^{T-1} \left[\frac{I_{t+\tau}^a}{(1+r_e)^{t+\tau}} \right] + \frac{V_T}{(1+r_e)^{t+\tau}} \quad (25)$$

ここで、式(25)の V_T とは、株式価値の推定期間における最終時点 T におけるターミナルバリューを示しており、 V_T は T 時点で実現される純利益の10倍(2.5年分)と設定されている。また式(25)の純資産 B_0 の初期値は1,000百万円とする。

さらに、式(10)の残余損益の計算過程における変動費率および固定費は、それぞれ70%および80百万円とする。その上で、法人税率を35%として純利益を算出する。

また、株主資本の調達コストとして残余損益を決定する株主資本コスト率は2%とする。ただし、本稿では残余損益オプション価値の株式評価に及ぼす影響力について検証するため、負債による資金調達および支払利息等の営業外費用は捨象されている。これにより、最重要のリスクファクターである残余損益オプション価値の確率的挙動が鮮明化されることが期待されている。

なお、シミュレーションの評価期は25年(4半期×25=100ステップ)、またシミュレーションの試行回数は10万回とする。

4.2 シミュレーションの結果

表1の初期値を用いたモンテカルロ・シミュレーションの結果、主要な変数およびパラメータに関する25期間の推移が、図3～図5に示されている。図3によると、原資産としての売上高はシミュレーション開始時点から19期間にわたって総費用を下回り、その間は純損失が発生している。これはシミュレーション当初における変動費（売上高100百万円×変動費率70%）が70百万円、貢献利益（売上高－変動費）が30百万円のため、固定費80百万円のうち未回収部分の50百万円が純損失になるという原価態様によるものである。

このような純損失の発生によって毀損した株主資本に応じて株主資本コストは逓減し、棒グラフで示された残余損益分岐点もまた緩やかに低下している。その後、19期目には売上高が損益分岐点を超過し純利益が稼得されている。ただし、その時点では依然として残余損失の状態は解消されておらず、結局は22期目になってから、ようやく売上高が残余損益分岐点を超過することになり、図4にあるように、同時期から残余損失が残余利益に転換している。

ここで注目すべきは、図4の棒グラフで示されている「残余損益オプション価値」の大きさと推移である。すなわち、残余損益オプション価値は0期から2期までの期間は、-226.8～-5.1百万円とマイナスの値を示している。これは残余損益オプションのうち、残余損失の発生にともなうプットオプションのペイオフとして推定されたショートポジションのオプション価値によるものである。

図5のとおり、同期間におけるRIOMによる株式価値評価額は721.9～623.9百万円であるのに対し、RIMによる株式価値評価額は881.5～573.0百万円と推移している。これにより、同図の右側目盛で示されている両者の比率（RIOM/RIM）は0.82～1.09と変化している。このことは、残余損失に起因するプットオプション価値の絶対値が小さくなるにしたがって、RIMよりもRIOMによる株式価値評価額が増加することを意味するものである。

なお、図4のとおり残余損益オプション価値は、下方に位置する残余損益線の形状に沿うように上下動しながら、残余損益オプション価値は31.2～151.3百万円へと推移している。この残余損益オプション価値が、図5にお

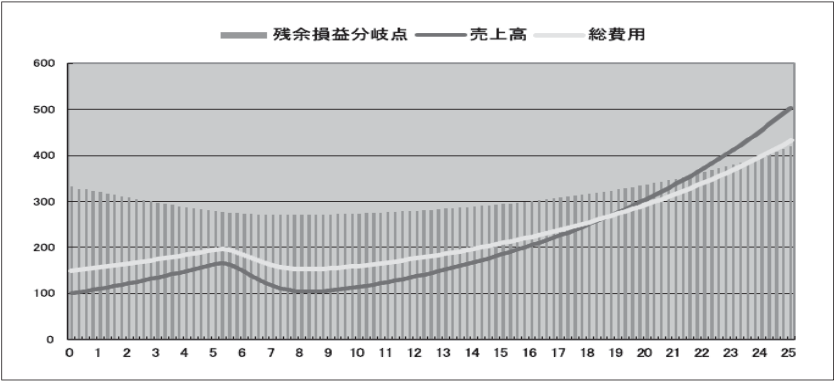


図3 残余損益分岐点，売上高，総費用の推移

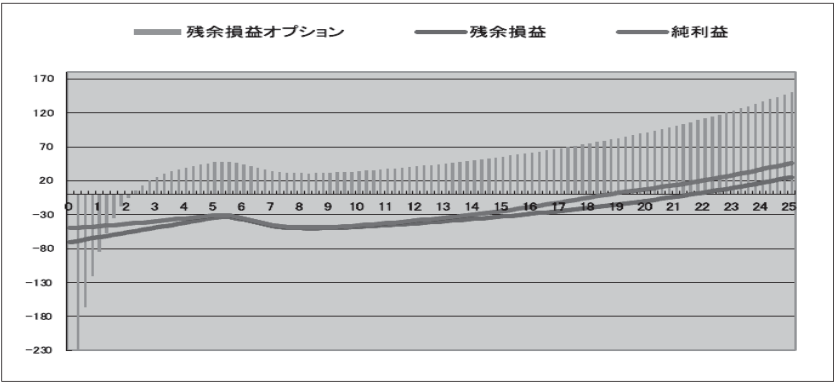


図4 残余損益オプション価値，残余損益額，純利益の推移

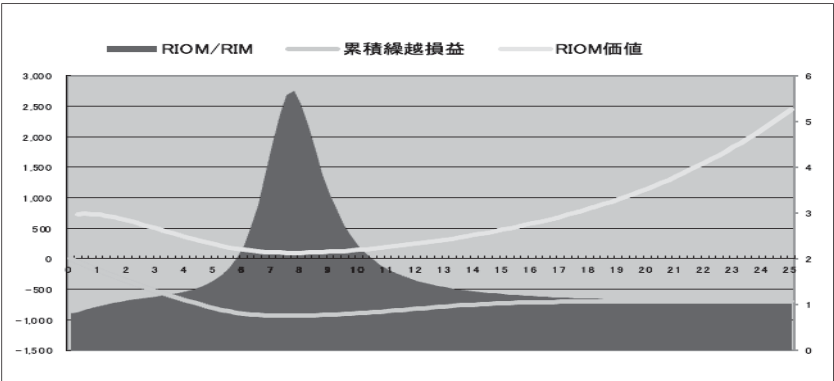


図5 RIOM-RIM 比率，累積繰越損失，RIOM 価値の推移

ける RIOM による株式価値の推移98.6～2,449百万円に対して、RIM による株式価値の推移17.4～2,323百万円という差異をもたらしている。ちなみに、図5のように両者の比率（RIOM/RIM）もまた1.11から最大5.68にまで拡大している。ただし、最後の25期における同比率は1.05まで逡減し、両者の差はほとんど解消されるに至っている。このように残余利益に起因するコールオプション価値によって、RIOM による株式価値評価額は、ひとたびは RIM の5倍を超える大きさに達するが、このようなオプション価値による差異は、残余損益オプションの満期日であるシミュレーションの終末時点までには消滅し、RIM による株式価値の推定値に収束する。

なお、表2にはシミュレーションの最終期間である25期目における RIOM, RIM および純利益モデルによる株式価値評価額の計算過程が記されている。同表左側の RIOM では、式(25)のとおり期首の株主資本簿価①に加えてターミナルバリュー②と残損益オプション価値③の合計④を、株主資本コスト率によって現在価値に割引いた額が加算され、株式価値が1,372百万円となることが示されている。同様にまた RIM による株式価値は、残余損益オプション価値の代わりに残余損益⑤を用いることによって、1,296百万円と評価されている。さらに表3の右端は残余利益ではなく、純利益の成長から推定された株式価値であり、これは Schwartz and Moon (2000) モデルと同じ純利益に基づいて評価された株式価値であり、その値1,309百万円が記されている。

以上のように株式価値評価額の大きさは、RIM<純利益モデル<RIOM の順で大きくなっているが、そもそも RIM では純利益から株主資本コストが差し引かれるため、RIM による株式価値もまた純利益モデルよりも小さな値を示すことになる。

そもそも株主資本コストとは、株主から期待された企業業績に関するハードルレートであり、経営者にとっては業績評価上のシグナルとしての役割を担っている。したがって、株主資本コストが差し引かれた後の残余利益とは、いわば株主にとっての超過（期待外）利益であり、そこには株式保有による利益配当および残余財産に対する条件付請求権としての価値が含まれている。本稿では、これをもってコールオプション価値（負の場合はプットオプション

ン価値)として評価したことになる。このように残余損益オプション価値が陽に測定されたことによって、RIOMによる株式価値評価額はRIMおよび純利益モデルよりも大きな価値を発現したものと解される。

残余利益オプションモデル		残余利益モデル		純利益モデル	
期首株主資本簿価①=	1,000	期首株主資本簿価①=	1,000	期首株主資本簿価①=	1,000
ターミナルバリュ②=	463	ターミナルバリュ②=	463	ターミナルバリュ②=	463
残余損益オプション価値③=	151	残余損益⑤=	25	純利益⑦=	46
②+③の現在価値④=	372	②+⑤の現在価値⑥=	296	②+⑦の現在価値⑧=	309
株式の現在価値①+④=	1,372	株式の現在価値①+⑥=	1,296	株式価値①+⑧=	1,309

表2 基本設定時におけるRIOM, RIM, 純利益モデルによる株式価値評価の比較

4.3 残余利益オプションモデルの感度分析

表3には、残余損益オプションモデルのシミュレーションで設定した変数およびパラメータに関する感度分析の結果が示されている。ここでは変数およびパラメータをそれぞれの基本設定値から20%増減させ、株式価値の現在価値については、パラメータの増減後の推定値 V^{adj} と基本設定値 V^{base} による推定値との乖離率： $(V^{adj} - V^{base})/V^{base}$ を株式価値感度と表記している。

また残余損益オプション価値については、パラメータ調整後の残余損益オプション推定 I^{adj} 値と基本設定値による残余損益オプション価値 I^{base} との乖離率： $(I^{adj} - I^{base})/I^{base}$ をオプション感度〈1〉、また基本設定値による残余損益オプション価値 I^{base} と残余利益 I との乖離率： $(I^{base} - I)/I$ をオプション感度〈2〉と表記している。

表3のとおり、基本設定値によるシミュレーションで推定された株式価値は1,372百万円、その時のオプション感度〈2〉は499.37%であり、残余損益オプション価値は残余利益の約5倍の額に達している。

また、残余損益オプションの原資産である売上高、ならびに売上高成長率に関する株式価値感度は、それぞれ60.57%および75.23%となっているが、これは売上高を120百万円、売上高成長率初期値を3.00%にした場合の株式価値の増加率を意味している。さらにまた、この時の残余損益オプションの感度〈1〉は、121.06%および150.34%といった増加状態にあることを示している。

株式価値の感度でもっとも大きな値を示しているのが、変動費率の119.97%である。これは変動費率を基本設定値70%から56%に減少させたことにより、株式価値の増加額が約2.2倍に達することを示している。さらに残余損益オプション価値は、基本設定値の場合の3倍を超えて239.70%まで増加し（オプション感度〈1〉）、また残余損益オプション価値は、残余損益より95.20%大きな値を示している（オプション感度〈2〉）。一方で同じ費用項目である固定費の場合、株式価値の感度65.59%、オプション感度〈1〉および同〈2〉は、それぞれ123.90%および103.32%となっている。

なお、売上高ボラティリティ、法人税率および株主資本コスト率に関する株式価値の感度は、それぞれ-2.56%から3.15%、ならびに残余損益オプション価値の感度〈1〉は、0.12%から6.37%と、すべて一桁代の感度となっており、RIOMのパラメータとして株式価値および残余損益オプション価値に対する影響力は小さいことが示された。

変数・パラメータ	記号	20%増減 (+ -)	株式価値 評価額	株式価値 感度	オプション 感度〈1〉	オプション 感度〈2〉
基本設定値	—	—	1,372	—	—	499.37%
売上高初期値	μ_0	120 +	2,203	60.57%	121.06%	123.61%
純資産初期値	B_0	1,200 +	1,908	39.08%	49.02%	190.93%
売上高成長率初期値	σ_0	3.00 +	2,404	75.23%	150.34%	104.63%
売上高ボラティリティ初期値	η_0	6.00 +	1,415	3.15%	6.37%	427.70%
法人税率	τ	42.0 +	1,348	-1.73%	1.11%	398.83%
株主資本コスト率	r_e	2.40 +	1,337	-2.56%	0.12%	843.02%
変動費率	ν	56.0 -	3,018	119.97%	239.70%	95.20%
固定費	F	64.0 -	2,286	65.59%	123.90%	103.32%

表3 残余利益オプションモデルの感応度分析の結果

4.4 ディスカッション

4.2および4.3におけるモンテカルロ・シミュレーションならびに感度分析に基づいて、ここではRIOMによる株式価値の測定属性ならびに推定値の性質について検討する。

まずシミュレーションの全体を通じて、残余利益オプションモデルによる株式価値評価に大きく影響するのは、原資産である売上高およびその成長率、

さらに原価態様を示す変動費や固定費といった変数やパラメータであることが分かった。これらは、すべて純利益の算定に直接影響する項目であり、株主資本コストとして純利益の控除対象となる株主資本コスト率の基本設定値が2.0% ($1,000 \times 0.02 = 20$ 百万円)と小さく、したがって純利益と残余利益の差が小さいことから、これらの4項目が純利益の算定を通じて残余利益に影響し、その結果として残余利益オプションを大きく変動させたことによって株式価値評価の感度を増大させたと考えられる。このようにRIOMとは、企業会計における期間損益計算や原価態様に基づく業績評価指標といった通常の企業会計の測定属性に依拠する推定モデルと言うことができる。

これに対して、売上高ボラティリティ、法人税率および株主資本コスト率の3つのパラメータの株式価値および残余損益オプション価値の感度〈1〉は、-2.56%から3.15%であり、上述の項目と比較して非常に軽微である。ただし、残余損益オプション価値の感度〈2〉は、398.83%から848.02%と、その他の項目と比しても格段に大きな感度を示している。このようにパラメータごとの増減調整による株式価値および残余損益オプション価値の感度としては小さな影響力しか示さない一方で、残余利益から残余損益オプション価値が生成される過程における感度の増幅効果(レバレッジ効果)が際立って大きいところに、これら3つのパラメータの特徴がある。

まず売上高ボラティリティであるが、これは式(24)のRIOMにおける d_1 および d_2 のとり、原資産である売上高が残余損益分岐点を超過すれば、残余損益オプション価値のうちのコールオプション価値(ロングポジション)が増大し、逆に売上高が残余損益分岐点を下回る場合には、残余損益オプション価値のうちプットオプション価値(ショートポジション)を増大させることになる。これらコールオプション価値とプットオプション価値の合計が残余損益オプション価値となるから、両者の多寡によって残余損益オプション価値の総体もまた大きく増減する。このシミュレーションにおける原価態様は、変動費率70%、また固定費80百万円であり、初期の段階から第18期まで純損失を計上し、これに応じて第22期までは残余損失が計上されているため、残余利益はシミュレーション期間を通じて寡少になっている。これに対して売上高ボラティリティは、このような小さな残余利益に作用して、これを残

余損益オプション価値として427.70%（約5倍）まで増幅させるというレバレッジ効果を有している。

一方、法人税率および株主資本コスト率は、上述の売上高ボラティリティとは異なるメカニズムで残余損益オプションに影響している。法人税と株主資本コストは、それぞれ税引前利益および税引後利益から控除されるところに利益計算上の違いはあるが、いずれも純資産（としての利益）の減少項目であり、株式価値の減少要因であるという点で同じ性質を有している。すなわち、前掲の売上高や変動費、および固定費が事業活動による収益ないし費用として、法人税の計算方式に関わらず利益そのものを直接的に増減させる因子であるのに対して、法人税および株主資本コストとは、あくまで事業活動の結果として確定された利益に対して、法定された税率や株主の期待投資収益率に基づいて事後的に算定されるコストである。したがって、それらの変動が株式価値に及ぼす影響もまた間接的であり、株式価値評価額の感応度は低くなる。

一方、表2のように基本設定値の場合のオプション価値の変化率が、 $(151 - 25)/25 \approx 4.49$ であるのに対して、法人税率および株主資本コスト率を20%増加させた場合には、それぞれ $(151 - 31)/31 \approx 3.98$ 、および $(151 - 16)/16 \approx 8.43$ となった。これから分かるように、そもそも基本設定値における残余利益（表2の残余利益⑤）が過小であるため、オプション価値の変化率が残余利益の多寡によって大きく変動しやすくなっており、法人税率および株主資本コスト率の増加にともなう残余利益 I^{adj} の減少に応じて、基本設定値による残余利益オプション価値 I^{base} （表2の残余損益オプション価値③）との間に乖離が生じたことになる。

V. 問題と課題

本稿では、残余利益が残余財産の毀損による企業倒産リスクに対するヘッジ機能を有しており、その効果が、売上高を原資産とするコールオプション（ないしプットオプション）として測定できることを明らかにした。その際、残余利益に内包されたオプション的属性のことを残余損益オプションと呼び、

従来の残余利益モデル（RIM）を残余利益オプションモデル（RIOM）に拡張して定式化した。

Ohlson（1995）で提示された RIM は、残余利益の時系列に 1 次の自己回帰モデルを適用して求められる線形情報動学モデル（Linear Information Dynamics Model）であるが、本稿における RIOM は非線形の確率的動学モデルであるところに特徴がある [9]。一方で本稿の貢献は「RIM において株式価値の源泉となる因子が、なにゆえ会計測定値である純利益ではなく残余利益とされるのか」という問いに対する一つの解として、「残余利益にはリアルオプション価値が内包されており、これは倒産リスクに対するヘッジ手段という点で、企業の持続可能性に資する価値として每期推定される」という見解を示したところにある。

また Schwartz and Moon（2000, 2001）では、売上高を原資産とする純利益に基づく株式価値評価モデルによるモンテカルロ・シミュレーションの結果が示されたが、そこでは売上高を幾何ブラウン運動、また売上高成長率や売上高ボラティリティを平均回帰過程にしたがう確率過程としてシミュレーションが実行された [11, 12]。

本稿でも Schwartz and Moon（2000, 2001）と同じような売上高を幾何ブラウン運動にしたがう原資産とし、さらに変動費および固定費からなる原価態様を考慮した確率モデルによるモンテカルロ・シミュレーションを実行した。ただし、本稿では純利益よりも株主資本コストの分だけ高いハードルレートとなる残余利益に基づく RIOM を提示した。この RIOM には、残余損益に潜在的に内包されている残余財産の毀損による倒産リスクに対するヘッジ機能と解されるコールオプション価値があること、またこのオプション価値が一般に残余利益に期待されている超過収益力と解されることから、それらの価値を株式価値評価モデルの要素に組み入れたところに独自性があると考えられる。

なお、本稿は数多の問題点を抱えているが、ここでは早期に取り組むべき検討課題とその対策について、以下の 3 点を提起しておきたい。

- (1)本稿では、RIOM の原資産である売上高の確率過程として、リアルオプション分析で一般的に用いられる幾何ブラウン運動を仮定した。しかしながら、

純利益および残余損益は、売上高や資産ないし負債等の会計数値と比較してヒストリカル・ボラティリティが大きく非定常な性質がある。そこで原資産の時系列にマートン型ジャンプ過程を加味したジャンプ拡散過程によるシミュレーションモデルについて検討する必要がある。

- (2)本稿では、仮想のデータによって株式価値評価のためのシミュレーションを実行した。これに対して、実際の企業の株式価値を評価することによって、RIOMの現実適応力を検証する必要がある [25]。
- (3)RIOMの測定精度を統計的に検証するため、これを計量モデル化した上で、アーカイバルデータを用いた実証研究モデルを構築する必要がある。

本稿で提示された RIOM に基づく株式価値評価は、景気動向や業績変動といった企業内外に起因する大きな不確実性に晒された企業に適応する評価モデルであると考えられる。このことは、まさに残余利益の定義が正常利益を超過する異常利益（超過収益力）とされていることに拠るものである。Edwards and Bell (1961) では、このような異常利益の獲得能力を示す残余利益をもって、現行の会計測定では捉えられない超過収益力としての「のれん」の性質が論じられた [4]。RIM や EVA において、純利益や NOPAT から株主資本コストが差し引かれたエクイティ・スプレッドとしての残余利益や経済的利益が求められているが、これらの株式価値評価モデルや企業業績評価モデルと並んで、本稿における RIOM のように、企業業績として利益に本来的に内包されている株式のリアルオプション価値に注目することによって、「のれん」をはじめとする無形資産の推定方法が進展するとともに、その総体的価値が反映された株式価値評価が可能になることが期待される。

〔補遺A〕 株式時価総額に対応した RIM の導出

2. 4 節で取り上げた純資産の時価による修正後の RIM の導出過程は、以下のとおりである [26]。

$$\begin{aligned}
 V_t &= \frac{B_0 + b_1 + x_1 - B_1}{1 + r_E} + \frac{B_1 + b_2 + x_2 - B_2}{(1 + r_E)^2} + \dots + \\
 &= \frac{B_0 + b_1 + x_1 - B_1 + r_E B_0 - r_E B_0}{1 + r_E} + \frac{B_1 + b_2 + x_2 - B_2 + r_E B_1 - r_E B_1}{(1 + r_E)^2} + \dots + \\
 &= \frac{B_0(1 + r_E) + b_1 + x_1 - r_E B_0 - B_1}{1 + r_E} + \frac{B_1(1 + r_E) + b_2 + x_2 - r_E B_1 - B_2}{(1 + r_E)^2} + \dots + \\
 &= B_0 + \frac{b_1 + x_1 - r_E B_0}{1 + r_E} - \frac{B_1}{1 + r_E} + \frac{B_1}{1 + r_E} + \frac{b_2 + x_2 - r_E B_1}{(1 + r_E)^2} - \frac{B_2}{(1 + r_E)^2} + \frac{B_2}{(1 + r_E)^2} + \dots + \\
 &= B_0 + \frac{b_1 + x_1 - r_E B_0}{1 + r_E} + \frac{b_2 + x_2 - r_E B_1}{(1 + r_E)^2} + \dots + \frac{b_n + x_n - r_E B_{n-1}}{(1 + r_E)^n} - \frac{B_n}{(1 + r_E)^n} \\
 &= B_0 + \left(\sum_{n=1}^{n-1} \frac{x_n + b_n - r_E B_{n-1}}{(1 + r_E)^n} \right) - \frac{B_n}{(1 + r_E)^n} \\
 &= B_0 + \left(\sum_{n=1}^{n-1} \frac{x_n - (r_E B_{n-1} - b_n)}{(1 + r_E)^n} \right) - \frac{B_n}{(1 + r_E)^n}
 \end{aligned}$$

ここで、 $x_n = m_n S_n - F$ とすれば、式(14)が得られる。

〔補遺B〕 残余利益方程式の導出

ここでは、式 [20] の残余利益方程式が一次元の熱伝導方程式（拡散方程式）と同値であることを示し、その解法について概説する。はじめに、次式のような変数変換を行う⁵。

$$\begin{cases} u = \log \frac{S}{R} + \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) \\ \tau = T - t \end{cases} \quad (26)$$

ここで、 τ は現時点 t から満期時点 T までの時間を表わしており、 $\tau > 0$ である。続いて、式(20)の残余利益 $x^a(S, t)$ が⁸、次式のような未知関数 $y(u, \tau)$ に関する割引現在価値で与えられると仮定する⁶。

$$x^a(S, t) = e^{-\tau} \cdot y(u, \tau) \quad (27)$$

ここで、式(27)の右辺に対して τ と S それぞれに関する 1 階の偏導関数、同じく S に関する 2 階の偏導関数を求め、これらを式(20)に代入することにより、次式のような $y(u, \tau)$ に関する 2 階の偏微分方程式が得られる⁷。

$$\frac{\partial}{\partial \tau} y(u, \tau) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} y(u, \tau) \quad (28)$$

式(28)は 1 次元の同次熱伝導方程式と呼ばれ、一次元空間における位置 μ と時刻 τ にともなって変化する熱分布 y の状態を表わす偏微分方程式である。そこで、式(26)の第 2 式より $T = t \rightarrow \tau = 0$ であるから、これを同第 1 式に代入すれば、 $u = \log \frac{S_t}{R} + 0$ となることから、時刻 T では原資産である売上高 S のボラティリティは消滅し、その値は確定する。したがって、 $e^u = \frac{S_t}{R}$ より $S_t = Re^u$ となって、式(23)は次式のように変形される。

$$y(u, 0) = \begin{cases} mR(e^u - 1) \cdots u \geq 0 \\ mR(1 - e^u) \cdots y < 0 \end{cases} \quad (29)$$

ここで、 $u \geq 0$ という条件が付されるのは、式(23)の $S_T \geq R$ より $Re^u > R$ となるからである。式(29)は、式(20)の残余利益方程式の特殊解を求める際の境界条件になる。

〔補遺 C〕 熱伝導方程式の解法

ここでは、式(28)の熱伝導方程式の求解過程について概説する。

まず $\tau > 0$ であるから、式(28)の $y(u, \tau)$ に関する τ 、および S による 1 階の偏導関数および S による 2 階の偏導関数を求めると、それぞれ次式のようなになる。

$$\frac{\partial}{\partial \tau} e^{-\tau} \cdot y(u, \tau) = e^{-\tau} \left[- \left(1 - \frac{\sigma_S^2}{2} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial u} y(u, \tau) + y(u, \tau) - \frac{\partial y}{\partial \tau}(u, \tau) \right] \quad (30)$$

$$\frac{\partial}{\partial S} e^{-\tau} \cdot y(u, \tau) = e^{-\tau} \cdot \frac{\partial}{\partial u} y(u, \tau) \frac{1}{S} \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial S^2} e^{-\tau} \cdot y(u, \tau) = \frac{e^{-\tau}}{S^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial S^2} y(u, \tau) - \frac{\partial}{\partial S} y(u, \tau) \right] \quad (32)$$

以上の式(30)～式(32)の偏導関数を式 [20] に代入して整理すると、次式の $y(u, \tau)$ を解とする一次元の同次熱伝導方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} y(u, \tau) = \frac{2}{\sigma_S^2} \frac{\partial}{\partial \tau} y(u, \tau) \quad (33)$$

この熱伝導方程式は、以下のような変数分離型の手順で解くことができる。すなわち、次式のように $y(u, \tau)$ を変数 u のみからなる関数 $V(u)$ 、および変数 τ のみからなる関数 $W(\tau)$ の積で表わされると仮定する。

$$y(u, \tau) = V(u) \cdot W(\tau) \quad (34)$$

したがって、 $\frac{\partial^2}{\partial u^2} y(u, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} V(u) \cdot W(\tau)$ および $y(u, \tau) = V(u) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} W(\tau)$ であるから、これらを式(33)に代入することにより、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} V(u) \cdot W(\tau) = \frac{\sigma^2}{2} V(u) \frac{\partial}{\partial \tau} W(\tau) \quad (35)$$

この式(35)を、 $V(u)$ の項と $W(\tau)$ の項に左右両辺に分離した上で、両者を任意の係数 $-k^2$ とおくと、次のような u に関する 2 階の常微分方程式、および τ に関する 1 階の常微分方程式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial u^2} V(u) + k^2 V(u) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} W(\tau) + \frac{\sigma^2 k^2}{2} W(\tau) = 0 \end{cases} \quad (36)$$

すなわち、式(36)の 2 つの常微分方程式の一般解の積は、式(33)の熱伝導方程式の解となり、次式のように表わされる。

$$y(u, \tau) = \left\{ C_1(k) \cos ku + C_2(k) \sin ku \right\} C_3 e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} \tau} \quad (37)$$

ここで、 $C_1(k)$ および $C_2(k)$ は、式(36)の第 1 式の一般解における定数項であり、いずれも k の関数である。また C_3 は、同第 2 式の一般解の定数項である。一般に、偏微分方程式に関する重ね合わせの原理より、式(37)の解を任意の $k (0 \leq k < \infty)$ について重ね合わせた関数も熱伝導方程式の解となることから、式(37)を次式のとおおり k について積分する。

$$y(u, x) = \int_0^{\infty} \left\{ C(k) \cos ku + D(k) \sin ku \right\} e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} x} dk \quad (38)$$

式(38)では、 $C_1(k)C_3$ および $C_2(k)C_3$ は共に k の関数であることから、あらためて $C_1(k)C_3=C(k)$ および $C_2(k)C_3=D(k)$ で置き換えている。この式(38)に対して式(29)の初期条件 $y(u, 0)$ を適用することによって $e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} \tau} = e^0 = 1$ となり、次式が得られる。

$$y(u, 0) = \int_0^{\infty} \left\{ C(k) \cos ku + D(k) \sin ku \right\} dk \quad (39)$$

式(39)は、 $y(u, 0)$ のフーリエ積分展開となっているから、フーリエ積分定理より、係数 $C(k)$ および $D(k)$ は、次式で与えられる。

$$\begin{cases} C(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y(u, 0) \cos kudu \\ D(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y(u, 0) \sin kudu \end{cases} \quad (40)$$

ここで、式(40)の積分範囲は $-\infty \sim +\infty$ だから、 $C(k)$ および $D(k)$ は任意の定数になる。そこで、 u に対して変数変換 $v = \frac{a-u}{\sigma\sqrt{x}}$ を行って、 $a = u + \sigma\sqrt{\tau}v$ とした上で、 $y(u, 0) \rightarrow g(a)$ とおくことにより、式(40)は次式のように変換される。

$$\begin{cases} C(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(a) \cos kudu \\ D(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(a) \sin kudu \end{cases} \quad (41)$$

ここで、式(29)の境界条件は、次式のように変形されている。

$$g(a) = \begin{cases} mR(e^{u+\sigma\sqrt{xv}} - 1) \cdots v \geq -\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} \\ mR(1 - e^{u+\sigma\sqrt{xv}}) \cdots v < -\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} \end{cases} \quad (42)$$

そこで、式(41)を式(39)に代入し、積分の順序を入れ替えて整理することにより、 $y(u, 0) \rightarrow y(u, x)$ と変換されて、次式が得られる⁸。

$$y(u, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(a) \left\{ \int_0^{\infty} \cos k(a-u) e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} x} dk \right\} da \quad (43)$$

ここで、積分公式： $\int_0^{\infty} e^{-s^2} \cos(2bs) ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$ を用いれば、式(43)は次式のように変形される。

$$y(u, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} \int_0^{\infty} g(a) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{a-u}{\sigma\sqrt{x}} \right)^2} da \quad (44)$$

ここで、式(44)の右辺は、式(42)の $g(a)$ に関する境界条件を積分区間（残余損益分岐点を挟んだ領域）とする、次式のような2つの定積分の和で与えられる。

$$\begin{aligned} y(u, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}} g(a) e^{-\frac{v^2}{2}} dv + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{\infty} g(a) e^{-\frac{v^2}{2}} dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}} m(R e^{u+\sigma\sqrt{x}v} - R) e^{-\frac{v^2}{2}} dv + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty} m(R - R e^{u+\sigma\sqrt{x}v}) e^{-\frac{v^2}{2}} dv \end{aligned} \quad (45)$$

ここで、 $u = v - \sigma\sqrt{\tau}$ と変数変換を行った上で、式(45)の定積分を求めると、次式の残余損益オプション価値 $x^a(S, t)$ が与えられる。

$$\begin{aligned} x^a(S, t) &= m e^{-\tau} \left[\left\{ Se^{\tau} \cdot N \left(-\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} - \sigma\sqrt{\tau} \right) - R \cdot N \left(-\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ R \cdot N \left(\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) - Se^{\tau} \cdot N \left(\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} + \sigma\sqrt{\tau} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (46)$$

ここで、 $N(\cdot)$ は標準正規分布の密度関数を表わす積分： $N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ であり、その積分区間は、式(26)の変数変換に基づいて次式で与えられる。

$$d = \frac{\log \frac{S}{R} + \left(1 + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (47)$$

追記：

本稿は、日本会計研究学会第74回全国大会における自由論題報告「残余利益のリアルオプション的性質に基づく株式価値評価法」（未定稿）で提示した株式価値評価モデルを、残余損益のリスクヘッジ機能という視点から再検討を加えた上で、新たにシミュレーションを実施した結果をもとに全面的に書き改めたものである。

謝辞：

本稿は木戸田力教授のご退職にあたり、これまでのご厚情とご指導に対する感謝の意を込めて投稿させていただいたものである。木戸田教授の今後ますますのご健勝をご祈念申し上げます。

参考文献

- [1] Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637-659.
- [2] Boness, A. J. (1964). Elements of a theory of stock-option value. *Journal of Political Economy*, **72**(2): 163-175.
- [3] Cheung, J. K. and Heaney, J. (1990). A contingent-claim integration of cost-volume-profit analysis with capital budgeting. *Contemporary Accounting Research*, **6** (2): 738-760.
- [4] Edwards, E. O. and Bell, P. W. (1961). *The Theory and Measurement of Business Income*. University of California Press.
- [5] Gerber, H. U. and Elias S. W. Shiu (1996). Actuarial Bridges to Dynamic Hedging and Option Pricing, *Insurance: Mathematics and Economics*, **18** (3): 183-218.
- [6] Merton, R. C. (1973). An Intertemporal Asset pricing Model. *Econometrica*, **41**: 867-887.
- [7] Merton, R. C. (1974). On The Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, **29** (2): 449-470.
- [8] Merton, R. C. (1976). Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, **31** (1-2): 125-144.
- [9] Ohlson, J. A. (1995). Earnings, Book Values, and Dividends in Equity Valuation. *Contemporary Accounting Research*, **11** (2): 661-687.
- [10] Ohlson, J.A. (2001). Earnings, Book Values, and Dividends in Equity Valuation: An Empirical Perspective. *Contemporary Accounting Research*, **18** (1): 107-120.

- [11] Schwartz, E. S and M. Moon. (2000). Rational pricing of internet companies. *Financial Analyst Journal*, **56**, 62-75.
- [12] Schwartz, E. S and M. Moon. (2001). Rational pricing of internet companies Revisited. *The Financial Review*, **36**, 7-25.
- [13] 石村貞夫・石村園子 (2008). 『増補版 金融・証券のためのブラック・ショールズ微分方程式』. 東京書籍.
- [14] 大野薫 (2014). 『モンテカルロ法によるリアルオプション分析－事業計画の戦略的評価』. きんざい.
- [15] 兼清泰明 (2017). 『確率微分方程式とその応用』, 森北出版.
- [16] 後藤 允 (2020). 『投資戦略の数理モデル－リアルオプションの基礎と理論』. 朝倉書店.
- [17] 辻村元男, 前田章 (2016). 『確率制御の基礎と応用』. 朝倉書店.
- [18] 佐藤清和 (1999). “オプション価格の CVP 分析への応用－損益分岐点を権利行使価格とする業績予測モデル”. 『青森公立大学経営経済学研究』第4巻第2号, 42-64.
- [19] 佐藤清和 (2010). “不確実性下における CVP 分析の連続時間モデルへの拡張”, 『金沢大学経済論集』第30巻第2号, 231-247.
- [20] 佐藤清和 (2011). “確率的 CVP 分析－離散時間モデル”, 『金沢大学経済論集』第31巻第2号, 153-174.
- [21] 佐藤清和 (2012). “マルチンゲール測度に基づく CVP 分析の拡張可能性: 佐藤 [2010]・佐藤 [2011] における問題点の検証と修正”, 『金沢大学経済論集』第33巻第1号, 157-173.
- [22] 佐藤清和 (2013). “確率的 CVP 分析とオプション理論に基づく株式価値評価モデル”, 『金沢大学経済論集』第33巻第2号, 151-182.
- [23] 佐藤清和 (2013). “財産・損益・収支のオプション価値”, 『金沢大学経済論集』第34巻第1号, 87-111.
- [24] 佐藤清和 (2014). “経営者のリスク選好が反映された確率的 CVP 分析の検討”, 『金沢大学経済論集』第34巻第2号, 189-212.
- [25] 佐藤清和 (2016). “残余利益オプションモデルによるインターネット企業の株式評価”, 『リアルオプションと戦略』第8巻第3号, 21-32頁.
- [26] 佐藤清和 (2019). “「資本コストポテンシャル」による ROE の再評価”－ROE は大きければ良いのか?, 『金沢大学経済論集』第39巻第2号, 39-63.
- [27] 佐藤清和 (2021). “キャピタル・ダイナミクスによる株式価値評価”, 『金沢大学経済論集』第41巻第2号, 31-63.
- [28] 桜井久勝 (2020). 『財務諸表分析 [第8版]』中央経済社.
- [29] 藤田博司 (2018). 『「集合と位相」をなぜ学ぶのか－数学の基礎として根づくまでの歴史－』技術評論社.
- [30] 森平爽一郎 (2009). 『信用リスクモデリング－測定と管理－』朝倉書店.

[31] 森平爽一郎 (2016), “リスク回避度と期待を反映したデフォルト確率”, 経済系』第 269 集.

-
- ¹ このような条件付請求権としての利益配当請求権の価値とは、原資産を売上高とした場合、決算日を満期日、また権利行使価格を損益分岐点売上高とする、ヨーロッパ・コールオプションのプレミアムとして評価することが可能である [19] [20] [22]。
 - ² 同式の計算過程については補遺 A に示している。
 - ³ 本節におけるオプション価格モデルのための偏微分方程式の導出、並びにその求解過程については、石村・石村 (2008) に多くを学んでいる。
 - ⁴ 本稿におけるモンテカルロ・シミュレーションは、Schwartz and Moon (2000) で提示された Amazon モデルを VBA で実装した大野 (2014) のプログラムを用いて、これを残余利益オプションモデルとして書き換えて実行した結果である。
 - ⁵ 式(26)の変数変換は、Black and Scholes (1973) による株式オプションのデルタヘッジに関する偏微分方程式を「安全利子率 = 1」とおいた求解過程を示している。これは本稿の残余利益方程式と Black and Scholes (1973) の偏微分方程式とは安全利子率の有無という点で異なるからである。
 - ⁶ このように、指数関数 e を用いた未知関数を仮定することは、熱伝導方程式のような定数係数偏微分方程式の一般的な解法である [29]。
 - ⁷ これらの偏微分の計算過程は [補遺 C] 参照されたい。
 - ⁸ 積分の順序入れ替えの可否については、厳密にはルベーグの収束定理に関する議論が必要であるが、本稿では割愛する [15]。