J. Fac. Edu. Saga Univ.
Vol. 16, No. 1 (2011) 21～26

単純閉凸曲線の長さについて

西　　晃央[1]，瀧川　真也[2]，菊池　泰樹[3]，Muhammad IQBAL[4]

On the Length of Simple Closed Convex Curves

Akihiro NISHI, Shin-ya TAKIGAWA, Yasuki KIKUCHI, and Muhammad IQBAL

要　　旨

円周率の指導の際に，円周の長さが直径の長さの何倍になるかという見通しを立てさせる。そのとき，円に外接する正多角形の周の長さの方が円周よりも長いということが用いられるが，このことは数学的にはさほど明らかなことではない。本稿では，円を一般にした単純閉凸曲線（自己交差しない閉曲線 C で，C とその内部を合わせた集合 $[C]$ が凸集合であるもの）の長さについて，面積という量を介さないで考察する。２つの単純閉凸曲線 C_1，C_2 が $[C_1]\subset[C_2]$ を満たせば，C_1 の長さは C_2 の長さを超えないことを示し，これを用いて，単純閉凸曲線 C の長さは，C に外接する単純多辺形の長さの下限に等しいことを証明する。曲線の長さは積分計算では求めるのが困難な例も少なくないが，本稿で行うような幾何学的考察によれば，曲線に外接する多角形の周の長さで近似されることがわかる。

１．はじめに

小学校で円周率を学習する際に，円周の長さが直径の長さの何倍になるかの見通しを立てさせるという指導が行われている。学習指導要領解説には，円周率の指導内容として，「例えば，円に内接する正六角形と円に外接する正方形を利用すれば，円周の長さは直径の３倍（半径の６倍）より大きく，直径の４倍より小さいことを見いだすことができる。」という記述がある（［７］，p. 157～p. 158）。この記述のうち，円に内接する正六角形の周の長さよりも円周の長さの方が大きいことは図を描いてみれば理解できるが，円周の長さが円に外接する正方形の周の長さより小さいことは，必ずしも直感的に明らかなことではないように筆者には思われる。

この見通しを立てた後，いくつかの円について測定することにより，円周の長さの直径の長さに対する割合が一定であることを帰納的に見いだすことが指導される。曲線（円）の長さの測定は誤差が生じやすく，「割合が一定」であることに気づかせることはなかなか困難であるので，3.14という数値を天下り的に出すことになる。小学校では，円周率を帰納的に考えるのは無理からぬことであるが，中学校，高等学校においては円周の長さと直径の長さとの間の関係を数学的に裏付けるような学習内容は見られず，小学校で学んだ帰納

[1] 佐賀大学　文化教育学部　理数教育講座
[2] 佐賀大学　文化教育学部　教科教育講座
[3] 長崎大学　医学部
[4] 佐賀大学　大学院工学系研究科

的な理解に留まっていることになる。

［6］では，半径1の円に外接する正 n 角形の面積が円の面積より大きいことから不等式 $n\tan\dfrac{\pi}{n}>\pi$ を導いている。この不等式を用いることにより，円に外接する正 n 角形の周の長さ $2n\tan\dfrac{\pi}{n}$ が円周の長さ 2π より大きいことを述べているが，間に面積という別の量を介しており，長さという量だけを用いて，円周の長さと円に外接する正 n 角形の周の長さの大小が比較できたというわけではない。

本稿では，円に限定せず一般的に，平面上の単純閉凸曲線の長さについて考察する。平面上の自己交差しない閉曲線を単純閉曲線という。C を単純閉曲線とすると，Jordanの閉曲線定理により，C は平面を2つの領域に分割するが，そのうち有界な方の領域を C の内部といい，C 及びその内部からなる集合を$[C]$で表す。$[C]$が凸集合であるような単純閉曲線を特に単純閉凸曲線という。円は単純閉凸曲線の一つの例である。

第2節では，単純閉凸曲線 C の長さ $l(C)$ が C に内接する単純多辺形の長さの上限として定義されることを述べ，単純閉凸曲線 C_1，C_2 について，$[C_1]\subset[C_2]$ ならば $l(C_1)\leqq l(C_2)$ が成り立つことを示す。第3節では，単純閉凸曲線 C の長さは，C に外接する単純多辺形の長さの下限に等しいことを証明する。このことにより，円に外接する正 n 角形は円周よりも長いことが，長さという量のみを用いて示されることになる。

2．単純閉凸曲線の長さのもつ性質

本節では，単純閉凸曲線 C の長さのもつ性質を調べることにする。まず，単純閉曲線の特別な場合として，単純多辺形を考察する。平面上に n 個$(n\geqq 3)$の点 A_1，A_2，…，A_n があるとき，これらを順次結んで，線分 A_1A_2，A_2A_3，…，$A_{n-1}A_n$，A_nA_1 からなる図形を作る。これを閉折線といい，各点 A_k を頂点，各線分 $A_{k-1}A_k$ や A_nA_1 を辺という。閉折線のうち，どの2辺についても隣り合う2辺の共通の頂点以外には共有点をもたないものを単純多辺形（辺数まで表すときは単純 n 辺形）という。P が単純多辺形であるとき，$[P]$を多角形と呼ぶ。多角形が集合として凸であるものは凸多角形と呼ばれる（以上の定義は［1］による）が，このとき P を単純凸多辺形と呼ぶことにする。

〔補題1〕 P，Qが単純多辺形であるとする。$[P]$，$[Q]$が凸であって$[P]\subset[Q]$を満たすならば，$l(P)\leqq l(Q)$が成り立つ。

［証明］Pの辺を1つとり，ABとする。$[Q]$は凸集合だから，辺ABを延長した直線はQとちょうど2点X，Yで交わり，その直線によりQは2つの折れ線に分けられる（図1(a)）。また，$[P]$は凸集合だから，その直線に関してP はどちらか片側にある。P と同じ側にある Q の一部分と線分 XY で構成される単純多辺形を Q_1 とする。Pと反対側にあるQ の一部分の折れ線の長さは線分XYの長さより大きいので，$l(Q)\geqq l(Q_1)$が成り立つ。

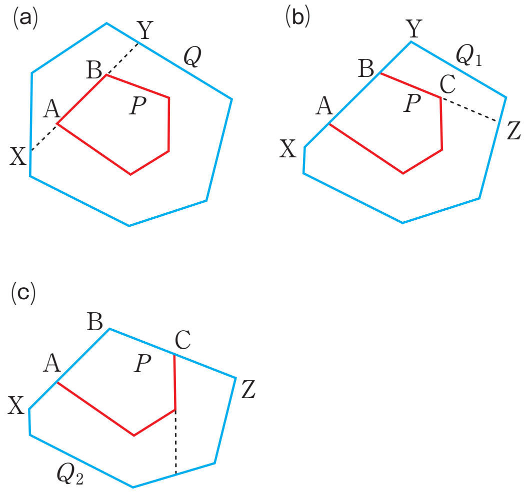

図1：単純多辺形の列を構成する

次に，ABと隣り合うP の辺 BC をとる。辺 BC を C の側に延長した半直線はQ_1とただ1点 Z で交わる（図1(b)）。Q_1 の一部分と線分 BZ を用いて上と同様にして単純多辺形 Q_2 を作る（図1(c)）と，$l(Q_1)\geqq l(Q_2)$が成り立つ。

この操作を繰り返すと，高々 P の辺数回の操

作で P 自身が得られることになる。即ち，単純多辺形の列 Q_1，Q_2，…，$Q_m(=P)$ が構成されて，$l(Q)\geqq l(Q_1)\geqq l(Q_2)\geqq\cdots\geqq l(Q_m)=l(P)$ が成り立つ。（証明終）

〔**補題２**〕単純閉凸曲線 C 上に一定の向きに点 A_1，A_2，…，A_n をとるとき，これらの点を順次結んで得られる閉折線 P は単純多辺形であり，$[P]$ は凸多角形になる。

［証明］簡単のため，$\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{A}_1$ とおく。もし P が単純多辺形でないとすれば，ある頂点 A_k から出る辺 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ はそれ以前の辺 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}(i+1<k)$ と交わる。このとき，頂点 A_{k+1} は C 上の A_i と A_{i+1} との間にあることになり，点を一定の向きにとっていることに反する。よって，P は単純多辺形である。

次に，n 個の点 A_1，A_2，…，A_n から生成される凸包を D とする。定義から $[P]\subset D$ は明らか。もし $[P]$ と D が等しくないとすると，D の境界に含まれない P の頂点 A_l が存在する。即ち，A_l は D の点であって D の境界点ではないから D の内点である。C は単純閉凸曲線だから $D\subset[C]$ となり，A_l は C に属さないことになって矛盾を生じる。（証明終）

補題２で述べたような単純多辺形 P（以下 C に内接する単純多辺形と呼ぶ）の周の長さの集合は上に有界であることが，次の定理１により示される。単純閉凸曲線 C の長さは，そのような P の長さの上限で定義される。

【**定理１**】単純閉凸曲線 C の長さは有限である。

［証明］$[C]$ は有界だから，十分大きな長方形 R をとると，$[C]\subset[R]$ とすることができる。C に内接する任意の単純多辺形を P とすると，$[P]\subset[C]\subset[R]$ である。補題１により $l(P)\leqq l(R)$ となり，R は P のとり方によらないので $l(P)$ の集合は上に有界である。（証明終）

以下，単純閉凸曲線 C に対しても，その長さを同じ記号 $l(C)$ で表すことにする。この節の最後に，補題１は２つの単純閉凸曲線に対しても成立することを示す。

【**定理２**】C_1，C_2 が単純閉凸曲線で $[C_1]\subset[C_2]$ ならば，$l(C_1)\leqq l(C_2)$ が成り立つ。等号は $[C_1]=[C_2]$ のときに限る。

［証明］曲線 C_1 に内接する単純多辺形 P をとり，その頂点を一定の向きに A_1，A_2，…，A_n とする。図２のように，A_k から A_{k+1} の向きに延長した半直線と曲線 C_2 との交点を B_k とおく。ここで $1\leqq k\leqq n$ であり，$k=n$ のとき $\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{A}_1$ と解釈する。このとき，B_1，B_2，…，B_n は C_2 上に一定の向きに位置しているので，これらの点を順次結ぶと，補題２から C_2 に内接する単純凸多辺形 Q が得られる（図２）。$[P]\subset[Q]$ なので，補題１より $l(P)\leqq l(Q)$。$l(C_2)$ の定義より $l(Q)\leqq l(C_2)$ だから，$l(P)\leqq l(C_2)$ となる。P に関して上限をとって $l(C_1)\leqq l(C_2)$ を得る。

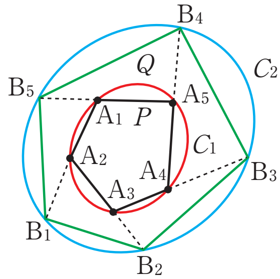

図２：C_2 に内接する凸多辺形 Q の構成

もし $[C_1]\neq[C_2]$ なら，C_1 の点 A で C_2 の内部にあるものが存在する。凸集合の性質から，A を通る直線 l をとると，l によって分割されたどちらか一方の半平面に $[C_1]$ が含まれるようにすることができる。l に関して C_1 と同じ側にある曲線 C_2 の一部分と l の一部分を用いて，閉曲線 K を作る（図３）。$[C_1]\subset[K]$ より $l(C_1)\leqq l(K)<l(C_2)$ となり，等号は成立しない。（証明終）

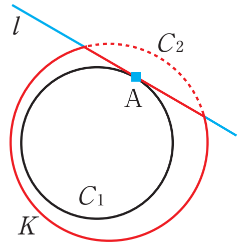

図３：C_1 の支持直線を用いた曲線 K の構成

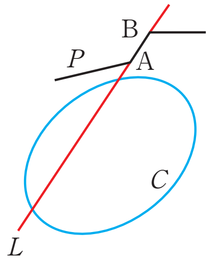

図４：直線 L が $[C]$ を分離しない場合

３．単純閉凸曲線の長さとその曲線に外接する多角形の長さとの関係

与えられた単純閉凸曲線 C に対し，P が単純多辺形で $[P]$ が C を含むときの P の長さ $l(P)$ の下限を α とおく。P が凸多辺形でないなら，P の凸包の境界（P^b とおく）は C を含む凸多辺形で $l(P^b)\leqq l(P)$ となるので，P は凸多辺形に限定してよい。Q が C に外接する単純多辺形であるときの Q の長さ $l(Q)$ の下限を β とおく。なお，このとき $[Q]$ は常に凸集合になることに注意しておく。本節では，$l(C)$，α，β の間の関係について調べる。ここで，単純多辺形 Q が単純閉凸曲線 C に外接するとは，$[Q]\supset C$ であって Q の各辺は C と共有点を持つことであるとする。

β より α の方が下限をとる範囲が広いから，下限の定義より $\alpha\leqq\beta$ は明らかである。$\alpha\geqq\beta$ を示すため，補題を用意する。

〔補題３〕 C を単純閉凸曲線，P は単純凸多辺形で $[C]\subset[P]$ とする。このとき，P の各辺を延長した直線は $[C]$ を分離する。

［証明］もし P のある辺AB を延長した直線 L が $[C]$ を分離しないなら，図４のような状況になる。即ち，直線 L によって平面全体が２つの半開平面 D_1，D_2 と L に分けられて，$[C]\cap D_1$ 及び $[C]\cap D_2$ はともに空集合にはならない。

$[P]\supset[C]$ なので $[P]\cap D_1$ 及び $[P]\cap D_2$ はともに空集合ではない。よって，$[P]$ の点で D_1 に属するもの，D_2 に属するものが存在する。一方，$[P]$ は凸多角形であるから，$[P]$ のすべての点は P の辺AB を延長した直線 L に関して同じ側にあるはずであり，矛盾を生じる。（証明終）

〔補題４〕 C を単純閉凸曲線，P は単純多辺形で $[P]$ は C を含む凸多角形であるとする。このとき，C に外接する単純多辺形 Q で $[Q]\subset[P]$ を満たすものが存在する。

［証明］P の各辺（を延長した直線）を P の内部に向かって，C と共有点を持つまで平行移動すればよい。補題３より，P の各辺を延長した直線に関して C はどちらかの側に含まれるので，この方法により，補題を満たす単純多辺形 Q は構成可能である。（証明終）

P が単純多辺形で $[P]$ は C を含む凸多角形であるとき，補題４の性質を持つ Q を構成すると，β の定義と補題１により $\beta\leqq l(Q)\leqq l(P)$ が成り立つ。P に関して下限をとると $\beta\leqq\alpha$ を得るので，結局 $\alpha=\beta$ であることがわかる。

次に，α や β と曲線 C の長さ $l(C)$ との関係を示すために，単純閉凸曲線 C の相似拡大について述べる。P_0 を $[C]$ の内部の点とし，正数 r に対して，曲線 C を点 P_0 に関して r 倍に相似拡大した図形 C_r を次式で定義する。

$$C_r = C_r(\mathrm{P}_0) = \{\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}+r\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} \mid \mathrm{P}\in C\}$$

ここで，O は座標の原点とする。なお，相似拡大という言葉を用いるが，r が１より小さいときは縮小された図形となることは言うまでもない。

例えば，C が単位円，P_0 が点（0，b）（$-1<$

$b<1$）のとき，C_r は中心（0，$(1-r)b$），半径 r の円となる（図５）。図において，相似拡大の中心 P_0 を通る半直線と C，C_r との交点をそれぞれ P_1，P_2 とするとき，$P_0P_2 = rP_0P_1$ の関係がある。

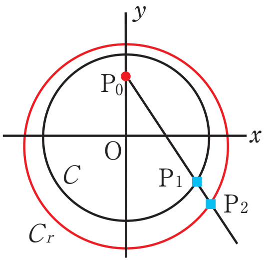

図５：単位円の相似拡大

曲線 C の長さと，それを相似拡大した曲線 C_r の長さとの間には，次の関係がある。

【定理３】$r>0$ に対して $l(C_r)=r\cdot l(C)$ が成り立つ。

［証明］m を $m<l(C)$ を満たす任意の正数とすると，曲線の長さの定義から，C に内接する単純多辺形 P で $l(P)>m$ を満たすものが存在する。多辺形 P の頂点を順に A_1，A_2，…，A_N とし，半直線 P_0A_k と曲線 C_r との交点を B_k とする $(1\leqq k\leqq N)$。これらの点 $B_k(1\leqq k\leqq N)$ を順に結んでできる多辺形を Q とすると，図６からわかるように，P のある辺の長さを r 倍したものが対応する Q の辺の長さに等しくなる。よって $l(Q)=r\cdot l(P)$ が成り立つ。Q は C_r に内接するから $l(C_r)\geqq l(Q)=r\cdot l(P)>rm$ となるが，m は $l(C)$ より小さい任意の正数であるので $l(C_r)\geqq rl(C)$ を得る。逆向きの不等式も同様にして得られる。（証明終）

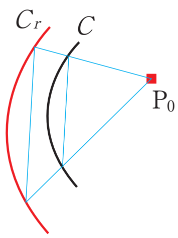

図６：P の辺と対応する Q の辺

【定理４】$\alpha=\beta=l(C)$ が成り立つ。

［証明］$\alpha=\beta$ は既に示した。Q を C に外接する単純多辺形とする。C に内接する任意の単純多辺形 R をとると，$[R]\subset[C]\subset[Q]$ であるから補題１により $l(R)\leqq l(Q)$ が成り立つ。R について上限をとると，Q は R に無関係だから $l(C)\leqq l(Q)$ となる。Q について下限をとると $l(C)\leqq\beta$ を得る。

逆向きの不等式を示すために，$r>1$ に対して C と C_r の距離を $d(r)$ とおく。このとき $d(r)>0$ であり，r を１に近づけると $d(r)$ も０に近づく。

C_r 上の各点で半径 $\dfrac{d(r)}{2}$ の開円板を考えると C_r はそれら無限個の開円板で覆われるが，C_r はコンパクト集合であるから，既にそのうちの有限個で覆われていることになる。これら有限個の円板の中心を順に結んでできる単純多辺形を P とする。

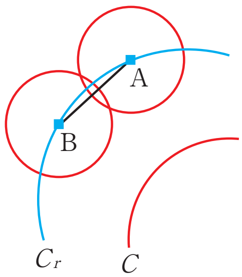

図７：P の辺 AB と C との関係

P の隣り合う２つの頂点A，Bについて考える。A を中心とする円板と B を中心とする円板とは重なり合うから（図７），辺ABの長さは $d(r)$ より小さい。従って $d(r)$ の定義により，辺ABは曲線 C とは共有点を持たず，$[P]\supset C$ である。α の定義から $\alpha\leqq l(P)$ である。一方，P は C_r に内接する単純多辺形であるので，$l(C_r)$ の定

義と定理３から $l(P) \leqq l(C_r) = r \cdot l(C)$ が成り立つ。２つの不等式を合わせると $\alpha \leqq r \cdot l(C)$ となるが，r は１より大きい任意の数であり，α や $l(C)$ は r によらないから $\alpha \leqq l(C)$ を得る。（証明終）

参考文献

［1］鈴木晋一，『幾何の世界』，朝倉書店，2001
［2］佐々木元太郎，『ユークリッド幾何』，培風館，1979
［3］寺阪英孝，『綜合初等幾何学』，共立出版，1956
［4］Ballard, W. R., *Geometry*, W. B. Saunders Company, 1970
［5］円に外接する多角形の周は，どうして円周より大きいのでしょうか，http://okwave.jp/qa53355.html
［6］瀧川真也，西晃央，井上正允，Iqbal, M.,「円と円周率に関する考察」，『九州数学教育学研究』，2008，第15号，pp. 33-38
［7］文部科学省，『小学校学習指導要領解説　算数編　平成20年８月』，東洋館出版社，2008