

## 量子ウォークエコー

遠藤 隆\*, 草場祥\*\*, 當間光\*\*, 坂井大地\*\*, 豊島耕一\*, 平良 豊\*

## Quantum Walk Echo

By

Takasi ENDO, Sho KUSABA, Hikaru TOMA, Daichi SAKAI,  
Kouichi TOYOSHIMA, and Yutaka HIRAYOSHI

**Abstract:** The quantum walk is the quantum analog of the classical random walk. The quantum walk is reversible because its time development is given by a unitary operator, while the random walk is irreversible. We found that the diffusion of the quantum walker can be reversed by a phase changing pulse. The refocusing time is the same as the free diffusing time before the pulse.

**Key words:** quantum walk, spin echo

### 1. はじめに

量子ランダムウォークは、ランダムウォークの量子版<sup>1)</sup>として研究されたが、ユニタリー変換によって運動が記述され、ランダムな運動ではないことから、量子ウォーク<sup>2)</sup>と呼ばれるのが普通になった。量子ウォークの運動は、波動性も持っているため、干渉効果があり、位相に敏感である。我々は、この性質を利用して、幅のある初期波束が、各点から拡散した波動の干渉により、拡がらないでむしろ弾道的に運動することを示した。<sup>3)</sup>

一般に拡散現象は不可逆過程であり、自然に元の状態に戻る確率は、ほとんど0と言ってよい。外部系の作用によって元に戻ることは原理的に可能であるが、外部系を含む全体のエントロピーの増加は避けられない。しかし、量子ウォークはコヒーレントな運動であり、一見拡散しているように見えていても、ユニタリー変換で記述される限り、可逆のはずである。

Hahnは、核スピンの磁気共鳴において、ブロッホ球面上の拡散を逆転させることができることを実証した。<sup>4)</sup> スピン系では、自由誘導緩和という現象が知られているが、これはスピンのブロッホ球面上を拡

散することによって初期励起が減衰することで生じる。しかし、スピンは短い時間ではユニタリー変換によって変化しているため、緩和現象に見えても実は可逆であり、二つ目の励起パルス（反転パルス）によって初期励起状態を回復することができる。これがスピネコーである。同様の現象は、光の領域でも、フォトンエコーとして観測されている。<sup>5)</sup>

Karskiらは、量子コイン投げによる量子ウォークの場合、量子コインの逆転によって量子ウォークを逆転できることを実証した。<sup>6)</sup>

我々は、スピネコーと同様に、量子コインを用いない連続時間量子ウォークにおいても、空間的に拡散した後、初期状態を回復できるのではないかと考え、その方法を発見した。これを、量子ウォークエコーと呼ぶことにする。

図1のような1次元空間（これを $x$ 軸とする。）に一定の間隔で並んだ格子点から成る系 $\{|k|k \in Z\}$ を考える。ここで $Z$ は整数の集合で、各格子点は、整数 $k$ で識別する。最も単純な場合として、各格子点の位置エネルギーを0とし、隣接格子点間のみが結合しているとする。

時刻 $t=0$ である点（たとえば原点 $k=0$ ）に置かれた粒子（量子ウォーカー）の確率分布は、時間に比例して拡散する。これを古典的なランダムウォークに対して、量子ウォークと言う。

このような単純な量子ウォークは、ベッセル関数を用いて表すことができる。前の論文<sup>7)</sup>では、この表式が周波数変調の側帯波と同じ表式になっている

平成23年5月1日受理

\*工学系研究科物理科学専攻

\*\*工学系研究科博士前期課程物理科学専攻

©佐賀大学工学系研究科

ことから, その対応関係を論じた。

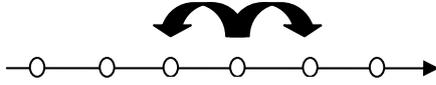


Fig.1 Quantum walk in the 1D discrete system

## 2. モデル

最も簡単な量子ウォークは, 次のハミルトニアンに従う 1次元連続時間量子ウォークである。

$$\hat{H} = -i\hbar \frac{\chi}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (|k\rangle\langle k+1| - |k\rangle\langle k-1|) \quad (1)$$

このハミルトニアンによる運動は, 次のユニタリー変換によって一義的に定まる。

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-i \frac{\hat{H}t}{\hbar}\right) \quad (2)$$

このユニタリー変換は, 次のようにベッセル関数によって表すことができることが知られている。

$$\hat{U}(t) = \sum_{kl} J_l(\chi t) |k+l\rangle\langle k| \quad (3)$$

初期状態を  $|\Psi(0)\rangle = |0\rangle$  とすると, このユニタリー変換による状態変化は,

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|0\rangle = \sum_k J_k(\chi t) |k\rangle \quad (4)$$

となる。この波動関数の拡がりを表すパラメータとして,

$$\sigma^2 = \sum_k k^2 |\langle k|\Psi(t)\rangle|^2 \quad (5)$$

を用いることにすると, ベッセル関数の公式<sup>8)</sup>

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 J_k^2(z) = \frac{1}{4} z^2 \quad (6)$$

を用いて,

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} (\chi t)^2 \quad (7)$$

が得られる。すなわち, 波束は時間に比例して拡がる。

## 3. エコー

自由発展する量子ウォークに, 次の反転パルスを作用させることを考える。

$$\hat{P} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k |k\rangle\langle k| \quad (9)$$

このパルスは, 確率分布を変えずに, 各点の位相だけを変化させる。このパルスを時刻  $t_1$  で作用させると,

$$|\Psi'(t_1)\rangle = \hat{P}|\Psi(t_1)\rangle = \sum_k (-1)^k J_k(\chi t_1) |k\rangle \quad (10)$$

となる。

これ以降は, 再び自由な量子ウォークに戻るとすると, 時刻  $t > t_1$  では,

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \hat{U}(t-t_1)|\Psi'(t_1)\rangle \\ &= \sum_k \left\{ (-1)^k J_k(\chi t_1) \sum_l J_l(\chi(t-t_1)) |k+l\rangle \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

となる。

ここで, 次の Neumann-Schlafli の定理<sup>9)</sup>を用いる。

$$J_l(z \pm \zeta) = \sum_k J_{l \mp k}(z) J_k(\zeta) \quad (12)$$

すると,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_k (-1)^k J_l(\chi(2t_1 - t)) |l\rangle \quad (13)$$

を得る。

この波束は, ちょうど  $t = 2t_1$  において,

$$|\Psi(2t_1)\rangle = \sum_l (-1)^l J_l(0) |l\rangle \quad (14)$$

となるが、 $J_0(0)=1$ で、 $k \neq 0$ では $J_k(0)=0$ となることから、

$$|\Psi(2t_1)\rangle = |0\rangle \quad (15)$$

となり、初期状態に復帰することが分かる。

なお、波束の幅は、

$$\sigma^2 = \sum k^2 J_k^2(\chi(2t_1 - t)) = \frac{1}{2}(\chi(2t_1 - t))^2 \quad (16)$$

となる。すなわち、反転パルス作用後に幅は直線的に狭くなり、ちょうど $t = 2t_1$ において0となることがわかる。

#### 4. 数値計算

いくつかの時刻における量子ウォークエコーの数値計算の例を示す。

計算のプログラムは、Scilab<sup>9)</sup> (Ver.5.3.1)で作成し、Windows7 (64bit)のOS上で実行した。Scilabは、フランス国立研究機関で開発されたフリーソフトであり、無償でダウンロードし利用できる。Scilabは、複素係数のベクトルや行列の計算が簡単に記述できるため、離散的な量子系のダイナミクスの計算には便利である。特に、行列の指数関数が組み込まれているので、ユニタリー変換がハミルトニアンを代入するだけで計算できる。

実際のプログラムは、付録に掲載するが、通常は、微分方程式を解くところであるが、ユニタリー行列をハミルトニアンの行列から直接計算することができるため、極めて簡単にプログラムを記述することができる。

設定する数値計算のパラメータは、 $\chi$ だけであるが、簡単のため $\hbar\chi = 1$ と置いた。この条件では、波束の広がる速度がちょうど1となり、時刻 $t$ では、幅(半幅 $\sigma$ )も $t$ 程度となる。

図1は、時刻0における波束(確率分布)であるが、中心(ここでは $k = 201$ )にのみ存在し、大きさは1である。

この波束が、自由に量子ウォークする。自由量

子ウォークでは、時間に比例して幅が広がる。たとえば時刻50では、 $\pm 50$ 程度(図2)、時刻100では、 $\pm 100$ 程度(図3)まで広がっている。

時刻100で反転パルスを作用させる。このパルスは符号だけを反転するので、パルス作用後の確率分布は図4のように変化しない。

続いて再び自由量子ウォークすると、今度は幅が直線的に狭くなっていく。時刻150では半分に(図5)、時刻200すなわち、ちょうどパルスを作用させるまでの時間と同じだけの時間がパルス後に経過すると、図6のように出発点に戻る。

その後も自由に発展させると、時間に比例して幅が広がることがわかる。(図7, 8)

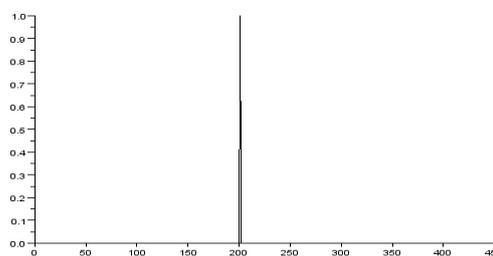


Fig.1 The initial state at time  $t=0$

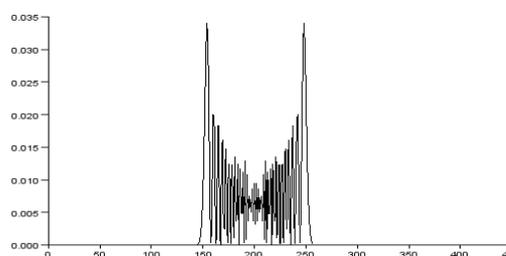


Fig.2 The walker spreads freely. The packet width is 50 at  $t=50$ .

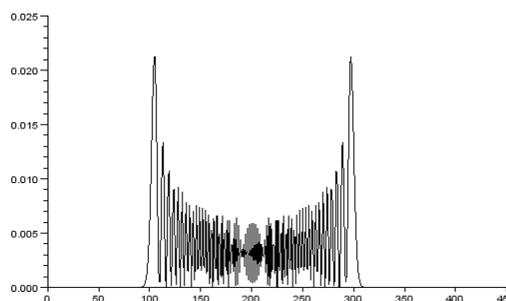


Fig.3 The packet at  $t=100$  just before the reversal pulse.

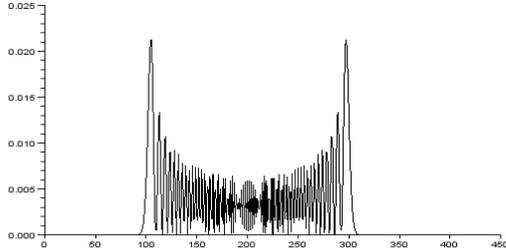


Fig.4 The packet at  $t=100$  just after the pulse. The probability distribution is the same as that before the pulse.

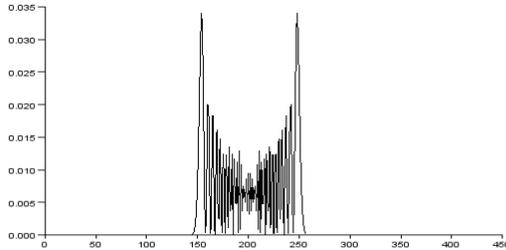


Fig.5 The packet at  $t=150$ . The walker evolves freely and shrinks.

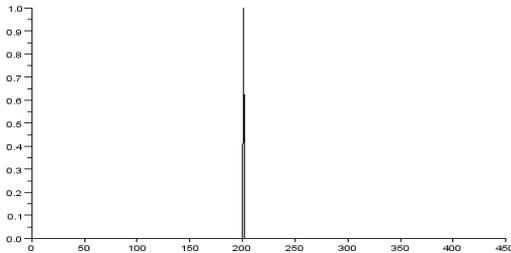


Fig.6 At  $t=200$  (echo time) the walker returns to the start point.

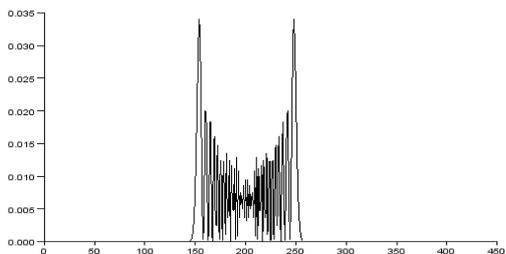


Fig.7 The packet at  $t=250$ . The walker spreads again after the echo time.

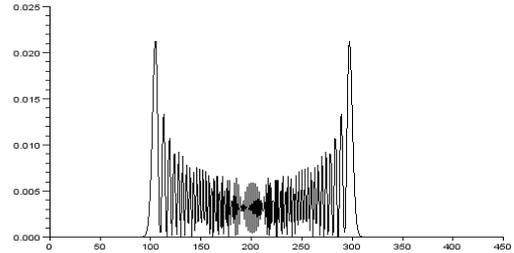


Fig.8 The packet at  $t=300$ .

#### 4. おわりに

単純な 1 次元格子上の連続時間量子ウォークに、あるパルス的作用を与えて位相を変えると、その後の自由な量子ウォークによって元の状態に戻ることができることがわかった。

スピンエコーが、様々なコヒーレント過渡現象の研究に利用されたように、量子ウォークエコーも量子ウォークのコヒーレント過渡現象を理解する上で有用であり、また、量子ウォークの制御にも利用できるものと期待できる。

実際の実験においては、反転パルスの実現方法が課題となるであろう。我々の研究グループでは、電子回路や超音波を用いた量子ウォークのシミュレーションを計画しているが、いずれの場合でも位相の制御は可能であり、量子ウォークエコーのシミュレーションも可能であると考えている。

#### 付 録 A 数値計算のプログラム

自由量子ウォーク

```
// free quantum walk
// condition
N=401;
t=100;//time
Center=(N+1)/2+1; V(Center)=1;//initial state
// Hamiltonian
for i=1:N-1
    H(i,i+1)=-(1/2)*%i;
end
for i=2:N
    H(i,i-1)=(1/2)*%i;
end
```

## 量子ウォークエコー

```
// Unitary operator
U=expm(-%i*t*H);
// dynamics
W=U*V;
// probability
P=abs(W).^2;
plot2d(P)
//

// free walk
W2=U*W1P;
// probability
P=abs(W2).^2;
plot2d(P)
//
```

%i は虚数単位である。  
expm は行列の指数関数である。

### 量子ウォークエコー

```
// quantum walk echo
// condition
N=401;
t1=100;//pulse time
t=300;//probe time
Center=(N+1)/2+1; V(Center)=1;//initial state
// Hamiltonian
for i=1:N-1
    H(i,i+1)=-(1/2)*%i;
end
for i=2:N
    H(i,i-1)=(1/2)*%i;
end
// Pulse
for i=1:N
    P(i,i)=(-1)^i;
end
// Unitary operator
U=expm(-%i*t1*H);
// free walk
W1=U*V;
// pulse
W1P=P*W1;
// Unitary operator
U=expm(-%i*(t-t1)*H);
```

### 参考文献

- (1) Y. Aharonov, L. Davidovich, and N. Zagury: Phys. Rev. A **48** (1993) 1687.
- (2) 今野紀雄, 『量子ウォークの数理』(産業図書, 2008)
- (3) Takasi Endo, Shin'ichi Osano, Kouichi Toyoshima, and Yutaka Hirayoshi, "Ballistic Quantum Walk in a Discrete One-Dimensional System" J. Phys. Soc. Jpn., **78**(2009)064004.
- (4) E. L. Hahn: Phys. Rev. **80**(1950)580.
- (5) N. A. Kurnit, I. D. Abella, and S. R. Hartmann: Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 567.
- (6) Michal Karski, Leonid Förster, Jai-Min Choi, Andreas Steffen, Wolfgang Alt, Dieter Meschede and Artur Widera: Science **325** (2009)174.
- (7) 遠藤隆, 石原佳子, 豊島耕一, 平良豊, 佐賀大学工学部集報第 38 卷(2009)1 頁
- (8) 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信, 『数学公式集』(岩波, 1960)
- (9) <http://www.scilab.org/>