Rep. Fac. Sci. Engrg.
Saga Univ.
38-1 (2009), 1~3

周波数変調による量子ウォークのシミュレーション

遠藤　隆*，石原佳子**，豊島耕一*，平良　豊*

Simulation of Quantum Walks with Frequency Modulation

By
Takasi ENDO, Yoshiko ISHIHARA, Kouichi TOYOSHIMA, and Yutaka HIRAYOSHI

Abstract: A simple model of continuous-time discrete one-dimensional quantum walk is developed in terms of frequency modulations. Intersite coupling in the quantum walk is translated to intermode coupling in the frequency modulation.

Key words: quantum walk, frequency modulation

1．は じ め に

図１のような１次元空間（これを x 軸とする。）に一定の間隔 Δx で並んだ格子点から成る系を考える。格子点の位置エネルギーを０とし，結合は隣接格子点間のみに存在するとする。時刻 $t=0$ で，ある点に置かれた粒子の確率分布は，時間に比例して拡散することが分かっている。これを古典的なランダムウォークに対して，量子ウォーク [1]と言う。量子ウォークは，量子情報への応用が期待されており，関心が高まっている。[2,3]

このような単純な量子ウォークは，ベッセル関数を用いて表すことができる。[4,5]

ところで，ある単色波を周波数変調すると，そのスペクトル分布もベッセル関数で表される。これは，単なる偶然ではなく，周波数変調と量子ウォークの間に密接な関係があることを示唆する。この論文では，両者の関係を明らかにする。

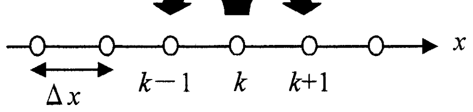

Fig.1　Quantum walk in the 1D discrete system

平成21年５月１日受理
*理工学部物理科学科
**工学系研究科物理科学専攻

2．量 子 ウ ォ ー ク

最も簡単な量子ウォークは，次のハミルトニアンに従う１次元連続時間量子ウォークである。

$$\hat{H} = -\mathrm{i}\hbar v \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|k\rangle\langle k+1| - |k\rangle\langle k-1|}{2\Delta x} \tag{1}$$

ここで，隣接サイトに移す演算子（昇降演算子）を，

$$\hat{a}^{+} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k+1\rangle\langle k|$$
$$\hat{a} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k-1\rangle\langle k| \tag{2}$$

と定義すると，このハミルトニアンは，

$$\hat{H} = \mathrm{i}\hbar \frac{v}{2\Delta x}(\hat{a}^{+} - \hat{a}) \tag{3}$$

と書き直すことができる。

このハミルトニアンによる運動は，次のユニタリー変換によって与えられる。

$$\hat{U} = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}t}{\hbar}\right) = \exp\left(\frac{x'}{2\Delta x}(\hat{a}^{+} - \hat{a})\right) \tag{4}$$

ただし $x'=vt$ と置いた。

ここで，$\hat{a}^{+}$ と $\hat{a}$ の積を求めると，

$$\begin{aligned}\hat{a}^{+}\hat{a} &= \sum_j |j+1\rangle\langle j|\sum_k |k-1\rangle\langle k| \\ &= \sum_{jk} |j+1\rangle\langle j|k-1\rangle\langle k| \\ &= \sum_{jk} |j+1\rangle\delta_{j,k-1}\langle k| \\ &= \sum_k |k\rangle\langle k| = 1\end{aligned} \tag{5}$$

となる。（ここで，δ_{jk} はクロネッカーのデルタであり，$j=k$ の場合に 1 で，それ以外の場合は 0 である。）同じように $\hat{a}\hat{a}^{+}=1$ となることもわかるので，$\hat{a}^{+}$ と $\hat{a}$ は交換可能である。すなわち，

$$\hat{a}^{+}\hat{a} = \hat{a}\hat{a}^{+} = 1 \tag{6}$$

となる。これは，$\hat{a}^{+}$ と $\hat{a}$ が互いに逆演算になっていることを考えると，直感的にもすぐわかる。

したがって，exp の中には交換可能な演算子しか含まれていないので，通常の数とみなして展開することができて，

$$\hat{U} = \sum_k J_k\left(\frac{x'}{\Delta x}\right)\left(\hat{a}^{+}\right)^k \tag{7}$$

が得られる。ただし，ここで次のベッセル関数に関する公式を用いた。

$$\exp\left(\frac{z}{2}\left(a-a^{-1}\right)\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(z)a^k \tag{8}$$

ユニタリー変換の表式が得られたので，初期状態を与えれば，ダイナミックスが求まる。例えば，時刻 $t=0$ のとき $|\Psi\rangle = |k_0\rangle$ であるならば，

$$\begin{aligned}|\Psi'\rangle = \hat{U}|\Psi\rangle &= \sum_k J_k\left(\frac{x'}{\Delta x}\right)\left(\hat{a}^{+}\right)^k|k_0\rangle \\ &= \sum_k J_k\left(\frac{x'}{\Delta x}\right)|k_0+k\rangle\end{aligned} \tag{9}$$

となる。この解は，1 次元連続時間量子ウォークの解として知られている。

3．周波数変調モデル

通常，$\{|k\rangle\}$ は，1 次元空間に等間隔 Δx で並んだ無限個のサイトを表すとみなされている。しかし，これらは，直交する無限個の固有状態であれば何でもあってもよい。

そこで，周波数領域において無限個の固有（周波数）モード $\{|k\rangle\}$ を考える。モード（周波数）間隔を，$\Delta\omega$ とする。次に，次のような置き換えをする。

$$\Delta x \Rightarrow \Delta\omega$$
$$x' \Rightarrow \omega'$$

$|k\rangle$ に対応する波動関数は，規格化因子を除いて，

$$\Psi(t) = \langle t|k\rangle = \exp(\mathrm{i}k\Delta\omega\, t) \tag{10}$$

と置くことができる。(ここでの時間パラメータ t は，ユニタリー変換のパラメータではないことに注意する必要がある。)

そうすると，初期条件を $|\Psi\rangle = |k_0\rangle$ とするならば，言い換えると，

$$\Psi(t) = \langle t|\Psi\rangle = \langle t|k_0\rangle = \exp(\mathrm{i}k_0\Delta\omega\, t) \tag{11}$$

をユニタリー変換すると，

$$\begin{aligned}\Psi'(t) = \langle t|\hat{U}|\Psi\rangle &= \sum_k J_k\left(\frac{\omega'}{\Delta\omega}\right)\langle t|k_0+k\rangle \\ &= \sum_k J_k\left(\frac{\omega'}{\Delta\omega}\right)\exp\left(\mathrm{i}(k_0+k)\Delta\omega t\right)\end{aligned} \tag{12}$$

となる。

この結果は，搬送波 $\Psi(t) = \exp(\mathrm{i}k_0\omega\, t)$ を周波数 $\Delta\omega$ で変調した信号

$$\Psi'(t) = \exp\left(\mathrm{i}\omega_0 t + \mathrm{i}\frac{\omega'}{\Delta\omega}\sin\Delta\omega\, t\right) \tag{13}$$

のスペクトルと等価である。ただし，$\omega_0 = k_0\Delta\omega$ と

置いた。

この式は，

$$\Psi'(t) = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega'}{\Delta\omega}\sin\Delta\omega\, t\right)\exp(\mathrm{i}\omega_0 t) \tag{14}$$

と変形すると，搬送波 $\Psi_0(t) = \exp(\mathrm{i}\omega_0 t)$ を，

$$\begin{aligned} U &= \exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega'}{\Delta\omega}\sin\Delta\omega t\right) \\ &= \exp\left(\frac{\omega'}{2\Delta\omega}\left(e^{\mathrm{i}\Delta\omega t} - e^{-\mathrm{i}\Delta\omega t}\right)\right) \end{aligned} \tag{15}$$

によって周波数変調したと解釈することができる。

さきほどのベッセル関数の公式(8)を使って展開すると，

$$U = \sum_k J_k\left(\frac{\omega'}{\Delta\omega}\right)e^{\mathrm{i}k\Delta\omega t} \tag{16}$$

となる。$e^{\mathrm{i}k\Delta\omega t}$ を掛けること，すなわち変調することは，$e^{\mathrm{i}\omega_0 t}$ の周波数を $k\Delta\omega$ だけシフトし，$e^{\mathrm{i}(\omega_0 + k\Delta\omega)t}$ に変えることを意味する。

4．周波数シフト

ここで考えたハミルトニアンは，一次元並進運動を離散化したものであるが，厳密解はベッセル関数で展開される対称な強度分布を持っている。しかし，最近，初期状態が格子点間隔 Δx よりも広く分布している場合は，波動関数は拡散せずに，x' だけ平行移動することがわかった。[6]

この現象は，石原により，周波数変調の場合でも確かめられた。[7]

もし $\Delta\omega^{-1}$ よりも短い短時間パルスを入力すると，$t << \Delta\omega^{-1}$ として，ユニタリー変換を，

$$U = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega'}{\Delta\omega}\sin\Delta\omega t\right) \approx \exp(\mathrm{i}\omega' t) \tag{17}$$

と近似することができる。これは，

$$\exp(\mathrm{i}\omega_0 t) \to \exp(\mathrm{i}(\omega_0 + \omega')t) \tag{18}$$

という変換を与える。従って，周波数軸上で ω' だけシフトをもたらす。言い換えれば，$\Delta\omega$ よりも広い周波数幅を持つ搬送波を入力すると，パワースペクトルの対称な拡散ではなく，一方向の（したがって非対称の）周波数シフトが得られる。

この現象は，広い周波数幅を持つスペクトルを入力するかわりに，出力を短い時間幅で切り出しても観測されるであろう。実験的には，この方が簡便である。

石原は，この理論的予測を検証するため，位相を制御した周波数変調信号を発生させ，そのフーリエ変換によってパワースペクトルを測定し，予想通りの結果を得ている。

4．おわりに

量子ウォークと周波数変調の間に類似性があることが分かった。従って，量子ウォークを応用した量子計算などのシミュレーションに，周波数変調を利用することが可能であるかもしれない。（ただし，波束の収縮はシミュレーションできない。またエンタングルメントのシミュレーションも困難である。）

さらに，一般的な量子力学のシミュレーションを，電気回路あるいは電子回路で行う際に，周波数スペクトルを量子状態に対応させることで，様々な量子力学のシミュレーションが簡単に実行できるかもしれない。

参考文献

(1) Y. Aharonov, L. Davidovich, and N. Zagury: Phys. Rev. A **48** (1993) 1687.
(2) E. Farhi and S. Gutmann: Phys. Rev. A **58** (1998) 915.
(3) J. Kempe: Contemp. Phys. **44** (2003) 307
(4) N. Konno:Phys. Rev. E **72** (2005) 026113.
(5) 今野紀雄，『量子ウォークの数理』(産業図書, 2008)
(6) Takasi Endo, Shin'ichi Osano, Kouichi Toyoshima, and Yutaka Hirayoshi, “Ballistic Quantum Walk in a Discrete One-Dimensional System” J. Phys. Soc. Jpn. (in press)
(7) 石原佳子，「電子回路による量子現象のシミュレーション」（平成 20 年度佐賀大学大学院工学系研究科物理科学専攻修士論文）