

ユニタリー変換の電子回路モデル

遠藤 隆*, 近藤直哉**, 豊島耕一*, 平良 豊*

An Electronic Circuit Model of Unitary Transformations

By

Takasi ENDO, Naoya KONDO, Kouichi TOYOSHIMA, and Yutaka HIRAYOSHI

Abstract: Electronic circuits equivalent to unitary transformations are devised. Electric AC signals in N channels can be regarded as N quantum states, where the amplitudes and phases correspond to those of the states. Unitary transformations of the states are equivalent to circuits composed of summing amplifiers and phase shifters.

Key words: electronic circuit, unitary transformation, quantum system

1. はじめに

結合した伝送線路によって二準位系の量子力学のダイナミクスをシミュレーションすることができる¹⁾。高松は、実際にコイルとコンデンサを用いた電気回路によって、二準位系のラビ振動のシミュレーションを行い、理論的予測と一致していることを確かめた²⁾。 N 準位系の場合も、 N チャンネルの結合伝送線路と遅延線（位相シフト回路）によって表すことができる。

しかし、伝送線路の場合は、反射波を防ぐための終端回路が必要であり、チャンネル数が増えると、設計が複雑になる。また、長い伝送線を遅延回路に用いると損失が問題になる。

そこで、今回は、演算増幅器を用いた回路によって、量子系のモデルを構成することを考えた。理想的な演算増幅器を用いれば、反射波の存在は考慮しなくてすむ。また、位相シフトも簡単な回路で実現できる。

量子系の運動は、ユニタリー変換によって表されるが、これはチャンネルの信号の混合と、各チャンネルの位相シフトの組み合わせで実現できる。この

二つの基本的な回路を設計し、それらを組み合わせて典型的な量子現象をシミュレーションする方法を提案する。

2. 量子系のユニタリー変換

量子系の状態の一般的な時間変化は、次のようなユニタリー変換によって表される。

$$|\psi(t_{m+1})\rangle = \hat{U}(t_{m+1} - t_m) |\psi(t_m)\rangle \quad (m = 0, 1, 2, \dots, M) \quad (1)$$

ここで、時間 t は離散的なサンプリング点を想定しており、 $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M$ となっているとする。

(このような制限をしなくても式 (1) は成立するし、 t_m は連続的に変化させることができるので、時間の連続性と矛盾するわけではない。)

$\hat{U}(t)$ は、ハミルトニアン \hat{H} とは、

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-i \frac{\hat{H}t}{\hbar}\right) \quad (2)$$

という関係がある。

平成 18 年 5 月 1 日受理

*理工学部物理科学科

**工学系研究科物理科学専攻

©佐賀大学理工学部

N 次元の量子系の状態は, 正規直交完備基底 $\{|n\rangle | n=1,2,\dots,N\}$ を指定すれば,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^N c_n(t) |n\rangle \quad (3)$$

と一義的に表すことができる。ここで係数 $c_n(t)$ は,

$$c_n(t) = \langle n | \Psi(t) \rangle \quad (4)$$

であり, 一般に複素数である。

特に二準位系の時間変化は,

$$\begin{pmatrix} c_1(t_{m+1}) \\ c_2(t_{m+1}) \end{pmatrix} = \hat{U}(t_{m+1} - t_m) \begin{pmatrix} c_1(t_m) \\ c_2(t_m) \end{pmatrix} \quad (5)$$

と表すことができる。

一般に2次元のユニタリー変換は, 次のように表すことができる³⁾。

$$\hat{U}(\Lambda, \Psi, \Theta, \Phi) = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

(前回の論文⁴⁾では, $-\sin(\Theta/2)$ のマイナス符号が欠けていたので, 訂正する。)

このユニタリー変換の表現は,

$$\hat{P}(\phi_1, \phi_2) = \begin{pmatrix} \exp(i\phi_1) & 0 \\ 0 & \exp(i\phi_2) \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

$$\hat{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

という二準位系の各準位毎の位相シフトと, 準位間の混合を表す二つの演算子で書き換えることができる。すなわち,

$$\hat{U} = \hat{P}\left(\frac{\Lambda}{2}, \frac{\Lambda}{2}\right) \hat{P}\left(\frac{\Psi}{2}, -\frac{\Psi}{2}\right) \hat{R}\left(\frac{\Theta}{2}\right) \hat{P}\left(\frac{\Phi}{2}, -\frac{\Phi}{2}\right) \quad (8)$$

となる。最初の位相シフトは, 全体の位相を変える

だけなので, 無視しても一般性は失わないので,

$$\hat{U} = \hat{P}\left(\frac{\Psi}{2}, -\frac{\Psi}{2}\right) \hat{R}\left(\frac{\Theta}{2}\right) \hat{P}\left(\frac{\Phi}{2}, -\frac{\Phi}{2}\right) \quad (9)$$

と表すこともできる。なお, $\hat{P}(\phi_1, \phi_2)$ や $\hat{R}(\theta)$ 自体もユニタリー変換である。なぜなら,

$$\hat{P}(\phi_1, \phi_2) = \hat{U}(\phi_1 + \phi_2, \phi_1 - \phi_2, 0, 0) \quad (10.1)$$

$$\hat{R}(\theta) = \hat{U}(0, 0, 2\theta, 0) \quad (10.2)$$

となるからである。

したがって, ユニタリー変換と等価な電子回路としては, $\hat{P}(\phi_1, \phi_2)$ と $\hat{R}(\theta)$ に相当するものだけを考えればよいことになる。前者の回路を, (ϕ_1, ϕ_2) 位相シフト回路, 後者の回路を, θ 回転回路と呼ぶことにする。

さらに, 一般のユニタリー変換は, 二つの $\hat{R}(\pi/4)$ と位相シフト $\hat{P}(\phi_1, \phi_2)$ の組み合わせで実現できることが知られている⁵⁾。 $\pi/4$ 回転回路は, 位相を適当に変えれば, ビームスプリッター (透過率 1/2) に相当するが, 後述するように, 二つのビームスプリッターで Mach-Zehnder 干渉計を構成し, その途中に位相シフトを挿入すると, 二つのポートの出力比を任意に変化させることができるので, 全体として θ 回転回路に相当するものが構成できるのである。

このことから, 必要な基本回路は $\pi/4$ 回転回路と位相シフト回路のみである。この二つの回路を, 基本回路ユニット と呼ぶことにする。(基本回路ユニットとしては他の組み合わせもあり得る。位相シフトについては, 1チャンネルだけの位相シフトであってもかまわないが, 複雑になる。)

多準位系の場合でも, 二準位系の位相シフトと二準位系の回転の組み合わせで任意のユニタリー変換が実現できることが知られている。したがって, 多準位系のユニタリー変換も, 同じ基本回路ユニット, すなわち位相シフト回路と $\pi/4$ 回転回路だけで構成できることになる。

このように, 全てのユニタリー変換回路は, この基本的な2種類の回路ユニットだけで構成することができるが, 回路の規模, すなわち回路ユニットの総数が増大するので, 基本回路ユニットだけで構成することは, 必ずしも効率的とは言えない。効率化はまた別の問題として考察することにして, とりあえず原理的な問題に限り, 以下では, 二準位系の場合のみを扱うことにする。

3. 等価電気信号

周波数 $f = \omega/2\pi$ の交流電気信号は、複素数を用いて、

$$V(t) = \psi(t) \exp(i\omega t) \quad (11)$$

と表すことができる。 $\psi(t)$ は、一般に複素数である。特に線形回路においては、駆動する周波数が固定されていれば、回路中の信号の電位や電流は、駆動周波数と同一の周波数に限られるので、搬送波信号 $\exp(i\omega t)$ に対する変調波の緩慢に変動する複素振幅だけを用いて議論することが可能である。以下では、 $\psi(t)$ はそのような複素振幅であるとする。

ここで、特に注意すべきことは、この電気信号が依存する時間 t (実時間) は、量子系の時間とは無関係であるということである。そうではなくて、振幅の各段での変化が、量子系の時間変化と対応している。そこで、時刻 t_m における量子状態を、電子回路の第 m 段目の出力に対応させることにする。(0段目の出力は、1段目の入力とする。)

この関係をまとめると、表1のようになる。

Table 1. Correspondence between quantum systems and circuits

Quantum system	Circuit model
no counterpart	time t
time t_m	stage m
$ n\rangle$	channel n
$c_n(t_m)$	complex voltage output at the m -th stage in the n -th channel

今、 N チャンネルの回路 (入力が N チャンネルで、出力も N チャンネルの回路) があるとして、各チャンネルの電圧信号の複素振幅をまとめて

$$|\psi(t_m)\rangle = \sum_n c_n(t_m) |n\rangle \quad (12)$$

と表すことにする。ここで、 $|n\rangle$ は、第 n チャンネルに規格化された搬送波を表すものとする。この表式は、ある特定の時刻の量子系のものと同一であるから、 N チャンネルの回路は、 N 準位系の量子系と等価になる。

電気回路の入力と出力の関係は、

$$|\psi(t_{m+1})\rangle = \hat{U}(t_{m+1} - t_m) |\psi(t_m)\rangle \quad (13)$$

と表すことができる。ただし、一般的な回路では、 \hat{U} はユニタリ演算子とは限らない。そこで、これがユニタリ演算子となる条件を調べれば、電子回路によって量子系のシミュレーションを行うための条件がわかる。(これは必要条件であって十分条件ではないが、後述するように、基本回路ユニットさえ実現できれば、十分である。)

前節で述べたように、位相シフトに相当するユニタリ変換と $\pi/4$ 回転に相当するユニタリ変換だけを考えればよいので、等価回路も、この2種類の基本回路ユニットだけを考察すれば十分である。

4. 位相シフト回路

位相シフト変換 $\hat{P}(\phi_1, \phi_2)$ の等価回路は、図1の回路によって実現できる。(演算増幅器の非反転入力に接続されている抵抗とコンデンサは入れ替えても、同様の位相シフト回路が構成できる。)

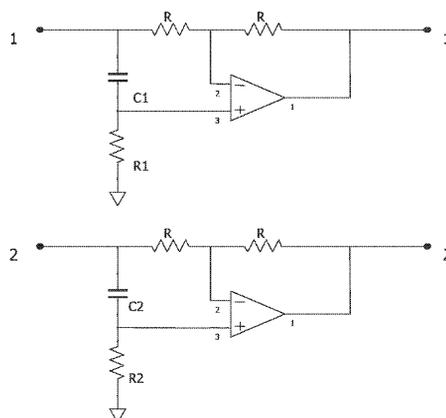


Fig.1 Two-channel phase shifter.

この回路によるチャンネル1及びチャンネル2の電気信号の位相シフトは、それぞれ ϕ_1 及び ϕ_2 となる。ただし、

$$\tan \phi_n = \frac{2\omega R_n C_n}{(\omega R_n C_n)^2 - 1} \quad (n=1,2) \quad (14)$$

である。図2のグラフは位相シフト ϕ と周波数の関係を示しているが、このグラフから分かる通り、周

波数を変えることで, 0 から π までの位相シフトが得られる。完全な π 位相シフトは 1 段の位相シフトでは得られないが, 複数の位相シフトを接続することで実現できる。(実際には, π 位相シフトは符号の反転に相当するので, 反転増幅器によって実現する方が簡単である。)

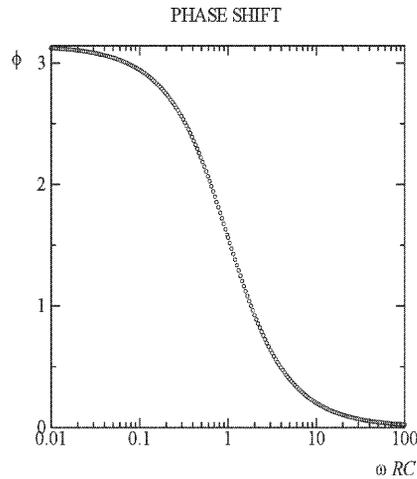


Fig.2 Frequency dependence of phase shift

5. 回 転 回 路

回転変換は加算回路及び反転増幅回路を用いた図3の回路によって実現できる。この回路で $R(\pi/4)$ と等価な回路を実現するためには,

$$r = \sqrt{2}R \tag{15}$$

とすればよい。

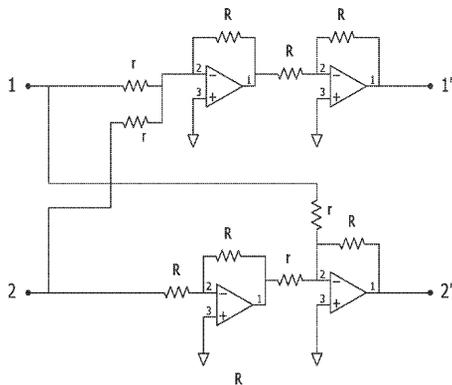


Fig.3 Two-channel summing amplifiers

逆変換である $R^{-1}(\pi/4) = R(-\pi/4)$ は, $R(2\pi - \pi/4) = R(7\pi/4)$ であるから, $\pi/4$ 回転回路を 7 段接続することで得られるが, その場合は, $\pi/4$ 回転回路 1 段とチャンネル 1 とチャンネル 2 を交換する方が簡単である。

一般に, チャンネル交換を,

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

とすると,

$$\hat{X}\hat{R}(\theta)\hat{X} = \hat{R}(-\theta) \tag{17}$$

となるので, 図4の回路で逆回転が実現できる。

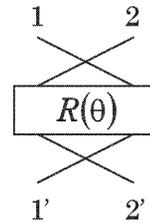


Fig.4 Reverse rotation circuit

\hat{X} もユニタリー変換であるから, 次のように基本回路ユニットに還元できる。

$$\hat{P}(0, \pi)\hat{R}\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{R}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \hat{X} \tag{18}$$

もちろん, 実際には, 単なる結線の入れ替えですむことを, 多数の演算増幅器で作る必要はない。

原理的には, 図1の位相シフト回路と, 図3の $\pi/4$ 回転回路だけで, 一般のユニタリー変換の等価回路を実現できるが, 実際には, 反転増幅回路 (π 位相シフト) やチャンネル交換回路などを組み合わせて, 回路規模を小さくすることができる。

6. ラ ビ 振 動

スピン系のような二準位系を共鳴電磁波で駆動すると, いわゆるラビ振動という現象が起きる。特に,

スピンの反転することをラビ反転と言う。

ラビ反転と等価な変換回路は、図5のように、図3の回転回路を二段接続することで得られる。これは、結局のところ、

$$R(\pi/4)R(\pi/4) = R(\pi/2) \quad (19)$$

なので、 $\pi/2$ 回転回路と同じである。

図5の回路のチャンネル1に振幅1の信号、チャンネル2には0の信号を入力すると、チャンネル1の出力振幅は0、チャンネル2は1になり、反転が得られる。(ただし、振幅の大きさだけに注目すると反転しているが、符号も反転している。)

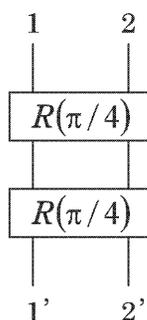


Fig.5 Rabi flip circuit

同様に、4段接続にすると、元に戻るはずだが、出力信号の符号が反転しているはずである。8段で2回転するが、それで符号も含めて元に戻ることになる。これは、スピン系のスピノール性に対応している。スピノール性が正しく再現されていることは、この等価回路が位相を含めて量子系のダイナミクスを正しくシミュレートしていることの結果である。

7. 干渉計

図6は、Mach-Zehnder型干渉計の等価回路である。中間の位相シフト回路の位相シフト量を変化させることで、チャンネル1とチャンネル2の出力比を変えることができる。図5の回路に相当するユニタリー変換は、

$$\hat{P}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \hat{R}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \hat{P}(\theta, -\theta) \hat{R}\left(\frac{\pi}{4}\right) \hat{P}\left(0, -\frac{\pi}{2}\right) = \hat{R}(\theta) \quad (20)$$

となり、 $\hat{R}(\theta)$ に一致する。

このような回路で、チャンネル1に入力した電気

信号のパワーは $\cos^2 \theta$ と $\sin^2 \theta$ の比率で出力チャンネルに分配される。なお、この点に関しては、最初と最後の位相シフトは省略しても同じである。

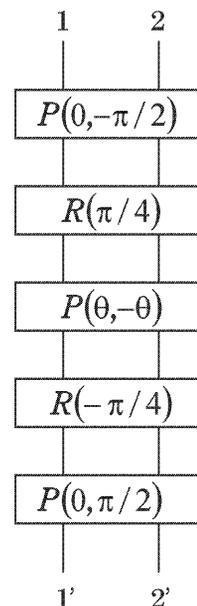


Fig.6 Mach-Zehnder interferometer circuit

8. おわりに

電子回路による回転回路と位相シフト回路の組み合わせによって、任意の量子系のダイナミクスをシミュレーションすることができる。したがって、電子回路で任意の離散量子系のダイナミクスをシミュレーションすることも可能になるはずである。ただし、回路を構成するユニット数を減らすためには、基本回路ユニット以外の回路を適宜採用した方がいいだろう。

この論文で示した等価回路は、任意のユニタリー変換をシミュレーションすることができるわけだが、量子力学特有の現象である「波束の収縮」については、当然のことながら、等価回路では実現できない。波束の収縮は本質的にランダムな現象であり、決定論的な動作をする回路では、実現不可能である。ただし、量子現象を理解する上で、本当に波束の収縮が必要なかどうかは議論の余地がある。波束の収縮を導入しないで量子力学を構成することも可能だからである。

また、複数の量子系のエンタングルメントを電子回路でシミュレーションする場合は、チャンネル数が指数関数的に増大するため、エンタングルする量子系の個数が多い場合は、シミュレーションは極め

て困難になるであろう。

この論文で提案する電子回路によっても量子計算機のシミュレーションは可能であるが、量子計算機のメリットは、エンタングルメントを利用して、チャンネル数の爆発的増大を押さえる点にあるので、電子回路に置き換えることができても、メリットは無いと言うべきである。

以上のような欠点を持つてはいるが、様々な量子現象を電子回路でシミュレーションすることができることは興味深い。また、量子力学の現象をなじみ深い回路の言葉で表現できるという点も興味深い。更に、演算増幅器を用いた回路は、一種のアナログ計算機であるから、量子現象の高速計算に使うとメリットがあるかもしれない。

参 考 文 献

- (1) 遠藤隆, 高松力, 森健一, 豊島耕一, 平良豊, 『結合集中伝送線路における Rabi 振動』佐賀大学理工学部集報第 32 巻第 1 号 1-9 頁, (2003).
- (2) 高松力, 修士論文「伝送線路による量子現象のシミュレーション」(平成 16 年度佐賀大学大学院工学系研究科物理科学専攻)
- (3) 古澤明『量子光学と量子情報科学』(数理工学社, 2005 年) 31 頁
- (4) 遠藤隆, 豊島耕一, 平良豊, 『離散量子系の電気回路モデル』佐賀大学理工学部集報第 34 巻第 1 号 1-5 頁, (2005)
- (5) M.Reck and A.Zeilinger, "Experimental Realization of Any Discrete Operator", Phys. Rev. Lett. **73**, pp.58-61 (1994).