Rep. Fac. Sci. Engrg.
Saga Univ.
34-1 (2005)

Reports of the Faculty of Science and Engineering,
Saga University, Vol. 34, No.1, 2005

離散量子系の電気回路モデル

遠藤　隆*，豊島耕一*，平良　豊*

Electric Circuit Model for a Discrete Quantum System

By
Takasi ENDO, Kouichi TOYOSHIMA, Yutaka HIRAYOSHI

Abstract: Unitary transformations in discrete quantum systems can be simulated in terms of LC circuits. We show that Rabi oscillations in a two-level quantum system are simulated by capacitively coupled lumped constant transmission lines.

Key words: quantum-like system, two-level system, Rabi oscillation

1．は　じ　め　に

以前，伝送線路で離散量子系のシュレディンガー方程式のシミュレーションが実現できることを示した [1)]。これは集中定数回路を分布定数回路の近似として用いたものである。シュレディンガー方程式は，連続的な，すなわち無限小の時間間隔に対する時間発展を記述するものであるが，集中定数回路では各段の出力が離散化された時間間隔に対応しており，1段当たりの変化を小さくしない限り粗い近似になる。

そこで，今回は，離散量子系のユニタリー変換が電気回路でシミュレーションできることを示す。この場合は，有限の時間間隔に対するユニタリー変換をシミュレーションすることになるので，電気回路の各段の出力が離散化された時間に対応していても正しい結果を与える。

一般に，離散量子系のユニタリー変換は，ビームスプリッタのユニタリー変換と位相シフトの組み合わせで実現可能である [2)]。ビームスプリッタは縮退二準位系のユニタリー変換と等価であり，位相シフトは信号の遅延と等価であるので，縮退二準位系のユニタリー変換の等価回路が実現できれば，任意のユニタリー変換もシミュレーションすることが原理的に可能になる。

そこで，本論では縮退二準位量子系のユニタリー変換を 2 チャンネルの結合集中定数伝送線路でシミュレーションする方法を具体的に示す。

2．量　子　系　の　ユ　ニ　タ　リ　ー　変　換

量子系の状態の一般的な動力学（時間変化）は，次のようなユニタリー変換によって表される。

$$\left|\psi'\right\rangle = \hat{U}\left|\psi\right\rangle \tag{1}$$

ここで $\hat{U}$ はユニタリー変換を表す演算子で，量子系を支配するハミルトニアン $\hat{H}$ とは，次の様な関係がある。

$$\hat{U} = \exp\left(-\mathrm{i}\hat{H}t/\eta\right) \tag{2}$$

ただし，t は，変換前と変換後の時間間隔である。

量子状態は，適当な基底 $\left\{\left|k\right\rangle\right\}$ を指定すれば，

$$\left|\psi\right\rangle = \sum_k c_k \left|k\right\rangle \tag{3}$$

平成 17 年 5 月 1 日受理
*理工学部物理科学科

と表すことができる。ここで係数c_kは一般に複素数である。ただし$\sum |c_k|^2 = 1$である。

特に二準位系では，ユニタリー変換後の係数は，

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

と表すことができるが，

$$\hat{U} = e^{\mathrm{i}\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\psi/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ \sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\Phi/2} \end{pmatrix} \tag{5}$$

の形に限られる。ここでΛ, Ψ, Φは任意の位相パラメータである。

３．電　気　信　号　と　波　動　関　数

電気信号によって波動関数を表現する方法を示す。

周波数$f = \omega/2\pi$の交流電気信号は，複素数を用いて，

$$V = \psi \exp(\mathrm{i}\omega t) \tag{6}$$

と表すことができる。ψは，一般に複素数である。特に受動素子から成る回路においては，駆動する周波数が固定されていれば，回路中の任意の電位や電流は，駆動周波数と同一の周波数の信号に限られるので，搬送波信号$\exp(\mathrm{i}\omega t)$に対する変調波の緩慢に変動する複素振幅だけを用いて議論することが可能である。

今，複数のチャンネルから成る伝送線路があるとして，各チャンネルの電圧信号の複素振幅をまとめて

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |k\rangle \tag{7}$$

と表すことにする。ここで，$|k\rangle$は，第kチャンネルに（規格化された）搬送波が伝搬している状態を表すものとする。この表式は，量子系のものと同一であるから，Nチャンネルの伝送線路の電気信号は，N準位系の量子系と等価になる。各チャンネルの信号のパワーと入力信号のパワーの比は，その状態に発見される確率に対応する。（なお式(6)の時間tは，電気回路系の時間であり，シミュレーションされる量子系の時間とは無関係である。量子系の時間変化は，あくまでも$|\Psi\rangle$，言い換えればc_kの変化によって記述される。）

電気回路の入力と出力の関係は，

$$|\psi'\rangle = \hat{U} |\psi\rangle \tag{8}$$

と表すことができる。$\hat{U}$がユニタリー演算子となるような回路であれば，量子系のモデルとして利用することができる。

４．二　準　位　系　の　等　価　回　路

図１のように電気容量Dで結合している２チャンネルの伝送線路を考える。ただし図では，１段だけの回路を示している。各チャンネルの伝送線路は，1段につきインダクタンスL，容量Cであり，他方の伝送線路との間に結合容量としてDがあるとする。（便宜上，結合容量は$2D$の容量のコンデンサ２個の直列接続で表している。）

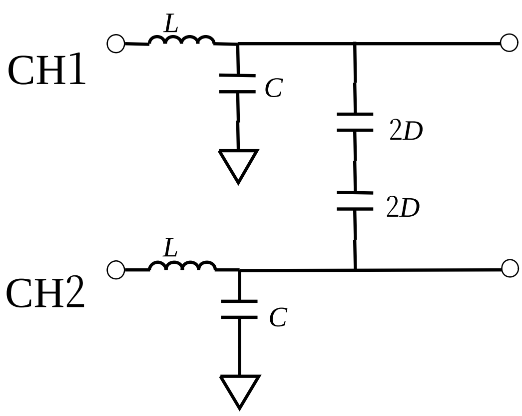

Fig.1 Coupled transmission lines

この伝送線路の特性を知るためには，二つの固有モードに対する特性を知ればよい。二つの固有モードとは，二つのチャンネルに対称な信号（偶モード信号）を入力した場合と反対称の信号（奇モード信号）を入力した場合の伝送波である。$\{|1\rangle, |2\rangle\}$を基底として偶モード$|+\rangle$と奇モード$|-\rangle$を表現する

と，それぞれ

$$\left|+\right\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \left|-\right\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{9}$$

となる。

偶モード信号に対しては，図１の伝送線路は，結合容量の電位差が常に０であることから，図２のように，それを取り除いた回路と等価になる。このような回路の特性インピーダンスと１段当たりの位相シフト量は，

$$Z_+ = \mathrm{i}\frac{\omega L}{2} + \sqrt{\frac{L}{C} - \left(\frac{\omega L}{2}\right)^2} \tag{10.1}$$

$$\alpha_+ = 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{n^2}{4-n^2}} \tag{10.2}$$

で与えられる。ただし，$n = \omega\sqrt{LC}$ と定義した。周波数が
$\omega \le 2/\sqrt{LC}$ の条件を満たさなければ信号は伝搬しないので，$n \le 2$ である。

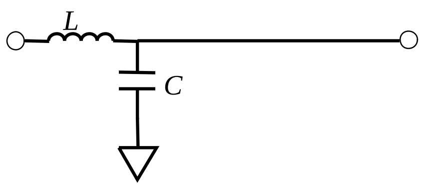

Fig.2 Equivalent circuit for the even mode

次に，奇モード信号に対しては，直列に接続した容量$2D$のコンデンサの接続点の電位が常に０となるので, これを接地しても同じである。そうすると，図１の回路は，図３のようにインダクタンスLと容量$C+2D$から成る伝送線路と等価になる。これは偶モードと比べると，Cを$C+2D$に置き換えた場合に等しい。

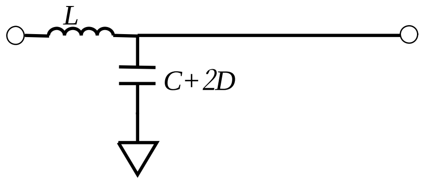

Fig.3 Equivalent circuit for the odd mode

したがって，特性インピーダンスと位相シフトは，

$$Z_- = \mathrm{i}\frac{\omega L}{2} + \sqrt{\frac{L}{C(1+\kappa)} - \left(\frac{\omega L}{2}\right)^2} \tag{11.1}$$

$$\alpha_- = 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{n^2(1+\kappa)}{4-n^2(1+\kappa)}} \tag{11.2}$$

となる。ただし，

$$\kappa = \frac{2D}{C} \tag{12}$$

と置いた。この場合$\omega \le 2/\sqrt{LC(1+\kappa)}$という条件を満たさなければ信号は伝搬しないので，$n \le 2/\sqrt{(1+\kappa)}$という条件も満たさなければならない。$\kappa > 0$であるから，この奇モード信号の伝搬条件の方が，偶モード信号の伝搬条件$n < 2$よりも強い。

この電気回路がシミュレートするユニタリー変化を調べる。

固有モードに対しては，

$$\hat{U}\left|\pm\right\rangle = e^{\mathrm{i}\alpha_\pm}\left|\pm\right\rangle \tag{13}$$

であるから，

$$\hat{U}\left|1\right\rangle = \hat{U}\left(\frac{\left|+\right\rangle + \left|-\right\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \frac{e^{\mathrm{i}\alpha_+} + e^{\mathrm{i}\alpha_-}}{2}\left|1\right\rangle + \frac{e^{\mathrm{i}\alpha_+} - e^{\mathrm{i}\alpha_-}}{2}\left|2\right\rangle \tag{14.1}$$

$$\hat{U}\left|2\right\rangle=\hat{U}\left(\frac{\left|+\right\rangle-\left|-\right\rangle}{\sqrt{2}}\right)=\frac{e^{i\alpha_+}-e^{i\alpha_-}}{2}\left|1\right\rangle+\frac{e^{i\alpha_+}+e^{i\alpha_-}}{2}\left|2\right\rangle \tag{14.2}$$

が得られる。したがって，

$$\hat{U}=\begin{pmatrix}\frac{e^{i\alpha_+}+e^{i\alpha_-}}{2} & \frac{e^{i\alpha_+}-e^{i\alpha_-}}{2}\\ \frac{e^{i\alpha_+}-e^{i\alpha_-}}{2} & \frac{e^{i\alpha_+}+e^{i\alpha_-}}{2}\end{pmatrix} \tag{15}$$

となる。

そこで，$\Lambda=\alpha_++\alpha_-$，$\Theta=\alpha_--\alpha_+$，$\Psi=-\pi/2$，$\Phi=\pi/2$ と置いてやると，ユニタリー変換の表式(5)と一致していることがわかる。

5．終　端　回　路

伝送線路によって量子系をシミュレーションする場合，終端回路によって反射波を抑制する必要がある。縮退二準位系の等価回路の場合，図４のような回路で終端すると，偶モードに対しても奇モードに対してもインピーダンス整合が得られるので，それらの重ね合わせで表される任意の信号に対しても整合していることになる。

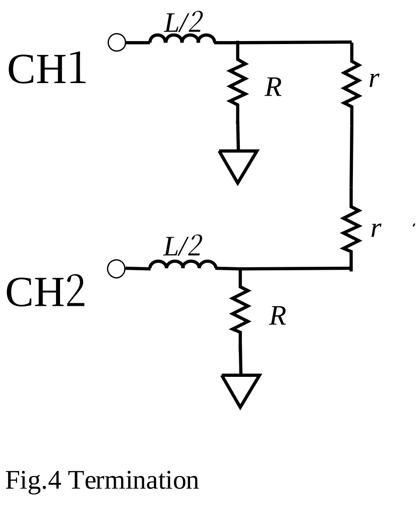

Fig.4 Termination

この終端回路は，偶モードに対しては，抵抗 $2r$ には電流が流れず存在しないのと同じなので，

$$Z_+=i\omega\frac{L}{2}+R \tag{16}$$

となる。

奇モードに対しては，二つの抵抗 r の直列接続している接続点の電位が 0 となるので，この点を接地しても同じになる。したがって，R と r を並列に接続した回路と同じになるので，

$$Z_-=i\omega\frac{L}{2}+\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)^{-1} \tag{17}$$

となる。これらがインピーダンスの式(10.1)と(11.1)に一致するためには，

$$R=\sqrt{\frac{L}{C}-\left(\frac{\omega L}{2}\right)^2} \tag{18.1}$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{\frac{L}{C(1+\kappa)}-\left(\frac{\omega L}{2}\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{\frac{L}{C}-\left(\frac{\omega L}{2}\right)^2}} \tag{18.2}$$

と置いてやればよいことがわかる。

6．ラ　ビ　振　動

縮退二準位系のラビ振動は，次のユニタリー変換で表現できる。

$$\hat{U}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\Omega t}{2} & -i\sin\frac{\Omega t}{2}\\ -i\sin\frac{\Omega t}{2} & \cos\frac{\Omega t}{2}\end{pmatrix} \tag{19}$$

そこで，$\Theta=\Omega t$，すなわち $\alpha_--\alpha_+=\Omega t$ と置いてやれば，結合伝送線路のユニタリー変換と同じ形になることがわかる。

高松は，実際に電気回路でラビ振動のユニタリー変換をシミュレーションした[3)]。例として，$n=1$，$\kappa=2$ の場合の回路を作製した。（回路定数は，L=1mH，C=0.1μFとした。したがって，ω=100kHz＝15.9kHz×2πであった。）入力信号源として発振器を用い，各段の電圧は交流電圧計を用いて測定した。

一段当たりの偶モードと奇モードの位相シフトは，式(10.2)と(11.2)から，

$$\alpha_+ = 2\tan^{-1}\left(1/\sqrt{3}\right) = \pi/3 \tag{20.1}$$
$$\alpha_- = 2\tan^{-1}\sqrt{3} = 2\pi/3 \tag{20.2}$$

となり，１段当たりの相対的位相シフトは，$\Theta = \left|\alpha_+ - \alpha_-\right| = \pi/3$ となるので，周期は，$N = 2\pi/\Theta = 6$ となる。

高松の実験結果は, 明瞭なラビ振動を示しており, 回路素子に損失があることや誤差があることを考慮すると，周期は理論と一致している。

７．おわりに

簡単な電気回路によって縮退した二準位系のユニタリー変換をシミュレーションすることができることがわかった。集中定数回路を用いると，低周波であっても実験装置を小型化することができる。

電気回路によって縮退していない量子系のユニタリー変換をシミュレーションするためには，各チャンネルに位相遅延回路を挿入する必要がある。しかし低周波の搬送波を用いた場合，波長程度の長い遅延線が必要になる。遅延線以外の回路で時間遅延を実現することもできるが，インピーダンス整合や損失などが複雑になるであろう。

遅延回路を用いない場合，シミュレーションできるのはビームスプリッタおよびそれと等価な量子系に限定されるが，それでも様々な量子現象を扱うことができるであろう。

参　考　文　献

(1) 遠藤隆，高松力，森健一，豊島耕一，平良豊，『結合集中伝送線路における Rabi 振動』佐賀大学理工学部集報第 32 巻第 1 号 1-9.

(2) M.Reck and A.Zeilinger, ”Experimental Realization of Any Discrete Operator”, Phys. Rev. Lett. 73(1994)58-61.

(3) 高松力，修士論文「伝送線路による量子現象のシミュレーション」（平成 16 年度佐賀大学大学院工学系研究科物理科学専攻）.