

剛棒・バネ一体型要素を用いた2次元複合非線形骨組構造解析

佐野 翔太郎・井嶋 克志・帯屋 洋之・川崎 徳明

Nonlinear Analysis of Plane Frame Structures with an Element Model Composed by Rigid Bars and Springs

By

Shotaro SANO, Katsushi IJIMA, Hiroyuki OBIYA, Noriaki KAWASAKI

Abstract: There are many different element models that treat material nonlinearity for example fiber model, rigid bar model, etc. However all of these models have accuracy problems in elastic stage. This accuracy problem is mainly caused by errors in strain energy formulation. Our laboratory is purposing on new nonelastic element model composed by rigid bars and springs. The strain energy of this element in elastic stage is equal to elastic beam. In our research work, the nonlinear/static two-dimensional analysis is conducted on different frame structures by using the proposed nonlinear element.

Key Words: Materially nonlinear analysis, Geometrically nonlinear analysis, rigid bar and spring model.

1. はじめに

現在、骨組構造物の非弾性解析では、要素内曲率一定とするファイバー要素や、剛棒・2点バネ要素^{1,2}、剛体バネモデル要素³など、様々な非弾性性状を示すモデルが使用されている。しかし、これらのモデルは塑性ヒンジ発生までの弾性時に精度上の問題を有し、これが最終的に必要な塑性ヒンジ発生後の解に影響していると考えられる。そこで本研究では、ひずみエネルギーが弾性梁と等価となる非弾性要素として、剛棒・4点バネ一体型要素を開発した。これは、要素両端と内部2カ所に回転バネを有し、これらのバネによって剛棒要素を結合した要素である。本要素は複数のバネを一要素内に配置するため、既存の非弾性解析モデルに比べ複雑に見えるが、数値計算の結果、非弾性挙動に幾何学的非線形までも加えた複合非線形解析についても安定かつ速やかな反復収束計算可能であることが判明した。

2. 本研究の解析概念

本研究で用いる解析手法は変位法である。以下に、エネルギー原理を用いて、その解析概念を述べる。

要素のひずみエネルギーを V_e 、節点変位を \mathbf{u} 、節点力を \mathbf{U} とすると全ポテンシャルエネルギー Π は次式で表される。

$$\Pi = \sum_e V_e - \mathbf{u}^T \mathbf{U} \quad (1)$$

全ポテンシャルエネルギー停留の原理より、構造物が平衡状態にあるとき、次式が成り立つ。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}} = \sum_e \frac{\partial V_e}{\partial \mathbf{u}} - \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (2)$$

ここまでは有限要素法と同じであるが、変位法ではここから一要素を取り出し、それに静的な支点条件を与え互いに独立な要素端力を得る。これにより、節点変位と要素端力との関係を容易に表現することができる。この要素端力 \mathbf{S}_e とその仕事の対となる要素端変形 \mathbf{s}_e を用いて一要素について次式のように

全ポテンシャルエネルギーは与えられる。

$$\Pi_e = V_e - \mathbf{s}_e^T \mathbf{S}_e \quad (3)$$

式(3)にも同様に全ポテンシャルエネルギー停留の原理を適用する。

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial \mathbf{s}_e} = \frac{\partial V_e}{\partial \mathbf{s}_e} - \mathbf{S}_e = \mathbf{0} \quad (4)$$

式(4)を用いると式(2)は次式のように書き換えられ、これを本解析手法の平衡条件式として用いる。

$$\mathbf{U} - \sum_e \frac{\partial \mathbf{s}_e^T}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{S}_e = \mathbf{0} \quad (5)$$

以上が本研究の基本的な解析概念となる。

3. 非弾性要素のひずみエネルギーの誤差

静的な支点条件を与えた一要素では、互いに独立な要素端力は軸力 N 、両端のモーメント M_i 、 M_j の3つとなる。

今回は曲げによる変形のみ考慮するため、弾性梁のひずみエネルギー V_e は曲げ剛性を EI 、要素長を l とすると次式となる。

$$V_e = \frac{l}{6EI} (M_i^2 - M_i M_j + M_j^2) \quad (6)$$

また、弾性梁の曲率分布図を図1に示す。

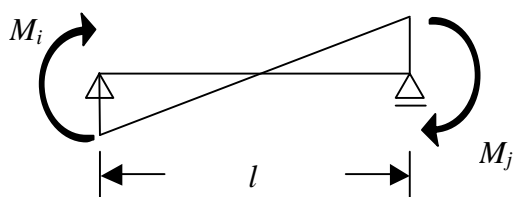


図1 弾性梁の曲率分布図

非弾性要素を用いて解析を行う際に、要素端力とその仕事の対となる要素端変形によるひずみエネルギーを式(6)と等しくすることにより、精度良い解析が可能となると考えられる。

次に、代表的な非弾性要素のひずみエネルギーと弾性梁のひずみエネルギーを比較し考察してみる。はじめに、耐震計算などにおいて曲げ降伏する箇所の塑性ヒンジ長に当たる区間を曲率一定とするファイバー要素について試みる。ファイバー要素の曲率分布図は図2のように要素内一様となる。

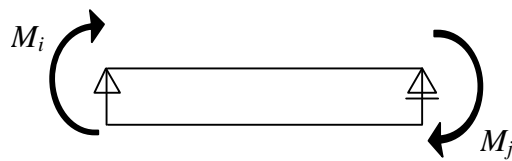


図2 ファイバー要素の曲率分布図

この要素は両端の端モーメントが等しくなるため本手法の変位法には使用できないが、ひずみエネルギーについては比較することが可能である。要素両端のたわみ角をそれぞれ θ_i 、 θ_j とし、ファイバー要素のひずみエネルギー V_f と弾性梁のひずみエネルギー V_e の差は、次式となる。

$$V_f - V_e = -\frac{3EI}{2l} (\theta_i + \theta_j)^2 \quad (7)$$

式(7)より、ファイバー要素のひずみエネルギーは弾性梁のそれより小さな値を示しており、弾性時には同一の節点力に対しては弾性梁よりも小さな変位を与えることとなる。

次に、塑性ヒンジは要素端に発生するとして、要素両端にバネを配置し要素半区間を曲率一定区間とする、図3に示す剛棒・2点バネ要素についてである。この要素では、曲率分布による変形が両端のバネの変形に集約されることとなる。

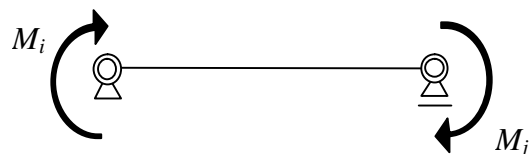


図3 剛棒・2点バネ要素

この要素では、要素両端のバネにおいては端モーメント M_i 、 M_j と端たわみ角 θ_i 、 θ_j との間に関係を与える。

$$M_i = k_i \theta_i \quad (8)$$

$$M_j = k_j \theta_j \quad (9)$$

ここで k_i 、 k_j はバネ定数である。このバネ定数は、部材の曲げ剛性を EI 、要素長を l とすると次式で与えられる。

$$k_i = k_j = \frac{2EI}{l} \quad (10)$$

剛棒・2点バネ要素と、弾性梁のひずみエネルギーの差を式(11)に示す。ここで、 V_{s2} は剛棒・2点バネ要素のひずみエネルギーである。

$$V_{s2} - V_e = \frac{l}{12EI} (M_i + M_j)^2 \quad (11)$$

式(11)より、剛棒・2点バネ要素のひずみエネルギーは弾性梁のそれより大きな値を示していることがわかり、この要素では同一の節点力に対して、弾性梁よりも大きな変位を与えることとなる。

このように、現在非弾性解析において使用されている要素は、ひずみエネルギーの観点から見ると弾性時の解析精度に問題を有していると考えられる。

4. 剛棒・4点バネ一体型要素

第3節で述べた解析精度に関する問題に対して、本研究では要素両端に2箇所、要素内部に2箇所の計4つのバネを一要素内に配置することにより、ひずみエネルギーを弾性梁と等価とする下図4に示す剛棒・4点バネ一体型要素を開発した。

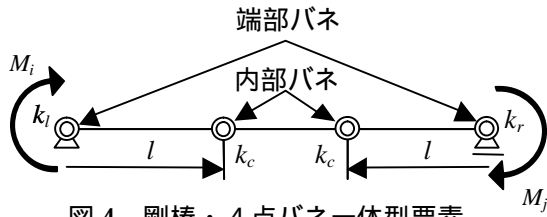


図4 剛棒・4点バネ一体型要素

図5に、剛棒・4点バネ要素の曲率分布図を示す。この要素においては、それぞれの曲率一定区間の変形を、それぞれのバネに集約させることとなる。

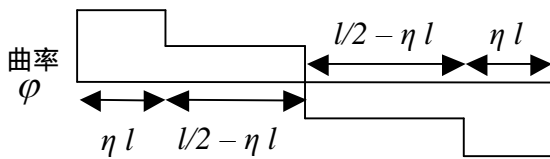


図5 剛棒4点バネ要素の曲率分布図

ここで、 ηl は塑性ヒンジ長、 λl は内部バネ位置、 k_l, k_c, k_r はそれぞれのバネのバネ定数である。この要素の利点として、塑性ヒンジを任意に入力できるという点がある。この塑性ヒンジ長より、弾性梁とのひずみエネルギー等価条件を用いて内部バネ位置を決定する。剛棒・4点バネ要素のひずみエネルギーは次式となる。

$$V_{s4} = \frac{M_i^2}{2k_l} + \frac{1}{2k_c} \left\{ (1-\lambda)M_i + \lambda M_j \right\}^2 + \frac{1}{2k_c} \left\{ \lambda M_i + (1-\lambda)M_j \right\}^2 + \frac{M_j^2}{2k_r} \quad (12)$$

式(12)が、式(6)で示す弾性梁のひずみエネルギー V_e と等価となるように内部バネのバネ定数 k_c を求めると k_c は、

$$k_c = \frac{12\lambda(1-\lambda)EI}{l} \quad (13)$$

で与えられる。また、要素バネ両端のバネ定数 k_l, k_r は

$$k_l = k_r = \frac{EI}{\eta l} \quad (14)$$

となる。このバネ定数を用いて、 λ の値を求めると、次式を得る。

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-6\eta}{3(1-2\eta)}} = \frac{1}{2} (1 \pm \xi) \quad (15)$$

次に、剛棒・4点バネ要素を用いたときの要素端力式を誘導する。要素内のバネはそれぞれ直列バネの関係を有しており、内部バネの左右の回転角をそれぞれ θ_{cl}, θ_{cr} とし、互いのバネ間での幾何学的な関係を式で示すと、

$$\theta_i = \theta_l + (1-\lambda)\theta_{cl} + \lambda\theta_{cr} \quad (16)$$

$$\theta_j = \lambda\theta_{cl} + (1-\lambda)\theta_{cr} + \theta_r \quad (17)$$

となる。また、各々のバネの回転角を式(18) (21)に示す。

$$\theta_l = \frac{M_i}{k_l} \quad (18)$$

$$\theta_{cl} = \frac{1}{k_c} \left\{ (1-\lambda)M_i + \lambda M_j \right\} \quad (19)$$

$$\theta_{cr} = \frac{1}{k_c} \left\{ \lambda M_i + (1-\lambda)M_j \right\} \quad (20)$$

$$\theta_r = \frac{M_j}{k_r} \quad (21)$$

式(18) (21)を用いて要素端力式を求めると、次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{k_c}{2k_c^2 + (1+\xi^2)(k_l+k_r)k_c + 2\xi^2 k_l k_r} \times \begin{bmatrix} 2k_l k_c + (1+\xi^2)k_l k_r & -(1-\xi^2)k_l k_r \\ -(1-\xi^2)k_l k_r & 2k_r k_c + (1+\xi^2)k_l k_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (22)$$

式(22)の要素端力式を使用して計算を行う。

5. 複合非線形解析アルゴリズム

一要素一定曲率を用いるファイバー要素による材料非線形解析では、既知先行状態と変位後の状態から定まる割線剛性を用いた場合、荷重増分幅により解が変動する。一方、本4点バネ・剛棒要素を使用した場合、荷重増分の大きさに関わらず常に同一の解を得ることができる。この利点より、本論の複合非線形解析では割線剛性を用いることとする。

材料非線形とともにもう一つの非線形要因である幾何学的非線形については、文献5)が示す3次元骨組構造物に対する接線剛性法を2次元問題に直して用いるものとする。これにより材料非線形として使用する要素座標系と接線剛性法に用いる要素座標系が同一のものとなり、複合非線形解析のアルゴリズムが一貫したものとなる。

複合非線形解析のアルゴリズムは、2点バネ・剛棒要素を使用した文献1)に示されている。まず、一定の割線剛性を用いた幾何学的非線形解析により、節点変位 → 要素端変形 → 要素端力 → 節点不平衡力のループの反復により収束解を求める。次に、この収束解について厳密な非弾性履歴特性を用いた不平衡力の算定と収束評価を行う2段の反復手法を用いれば、安定な複合非線形解析を行うことができる。このフローチャートを図6に示している。

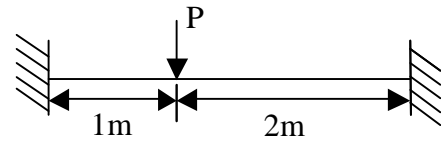


図7 解析に用いる両端固定梁

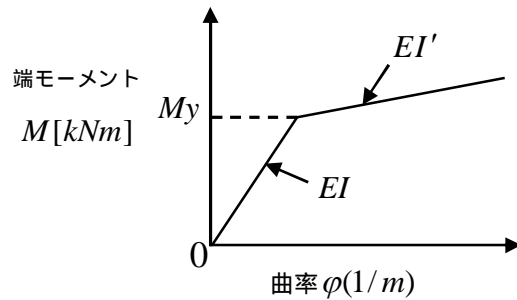


図8 M - φ 関係

6. 2次元複合非線形解析例1(両端固定梁)

ここでは、図7に示す両端固定梁を用いて数値計算を行う。なお、要素両端のバネには図8のようなバイリニアの非弾性性状を与える。材料特性値は、伸び剛性 $EA = 1000kN$ 、 $EI = 1000kNm^2$ 、降伏後曲げ剛性 $EI' = 100kNm^2$ 、 $\eta l = 0.1m$ 、降伏モーメント $M_y = 300kNm$ とする。

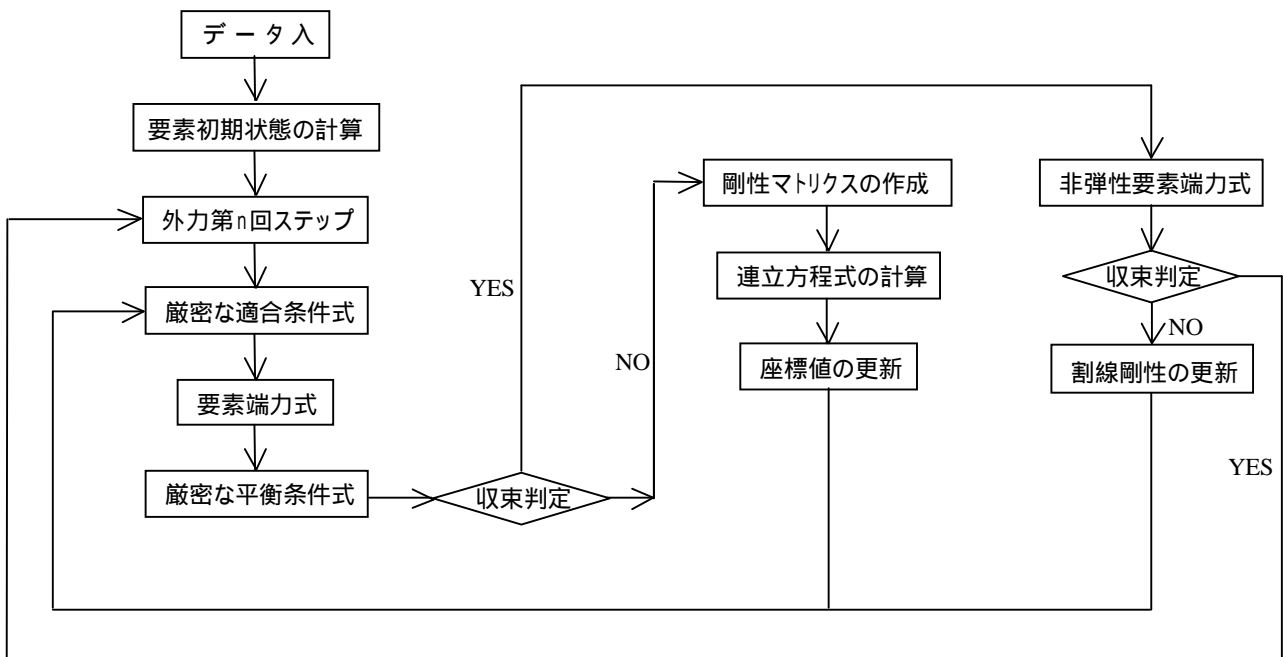


図6 複合非線形解析フローチャート

はじめに、 $P = 200kN$ 荷重時の、荷重荷点の $P - y$ 関係を、弾性梁による幾何学的非線形解析と、剛棒4点バネ要素を用いた複合非線形解析とで比較してみる。図9にその $P - y$ 曲線を示す。

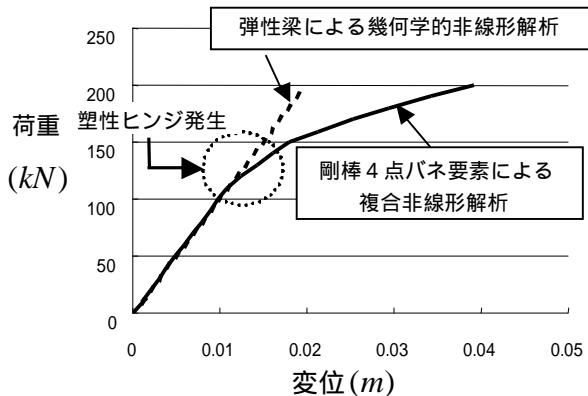


図9 $P - y$ 曲線

図9を見ると、塑性ヒンジ発生点までは剛棒・4点バネ要素による複合非線形解析の曲線は、弾性梁による幾何学的非線形解析の曲線と完全に一致していることがわかり、剛棒・4点バネ要素の弾性時における精度の良さを表している。

次に、同じ条件で $P = 1000kN$ という比較的大きな荷重荷点時の $P - y$ 曲線を図9に示す。このとき、要素長 $1m, 2m$ の2要素とした場合と、一要素長 $0.5m$ で6要素とした場合で、剛棒4点バネ要素を用いて複合非線形解析を行った結果の比較も同時に図10に示す。

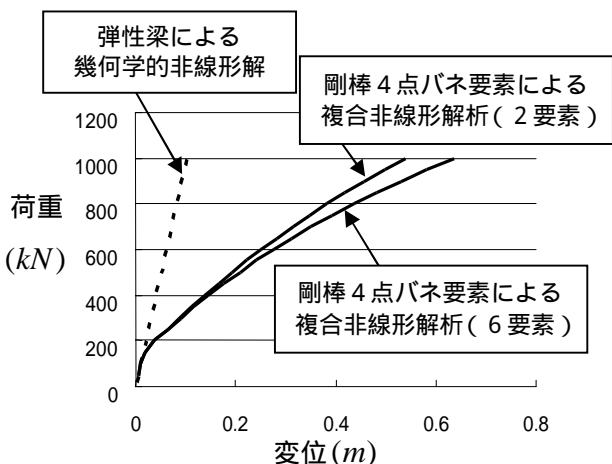


図10 $P - y$ 曲線

図10では、 $P = 1000kN$ 荷重時の弾性梁による幾何学的非線形解析での荷重荷点の変位は $0.103m$ であるのに対し、剛棒・4点バネ要素によ

る複合非線形解析(2要素)では $0.540m$ と5倍もの大きな変位となっている。このように荷重荷点が大きくなるにつれて、材料非線形性の影響が大きくなるのがわかる。

2要素と6要素での要素分割数による比較では、 $P = 1000kN$ 荷重時の変位は6要素では $0.635m$ と、荷重が大きくなるにつれて要素分割数の影響が出ていることがわかる。これは、幾何学的非線形性を考慮しているためで、要素分割数を大きくするにつれて、精度の良い解析が行えると考えられる。

最後に、 $P = 10000kN$ という非常に大きな荷重を一括荷重したときの複合非線形解析での収束過程を図11に示す。なお今回の収束判定においては、 10^{-6} を許容不平衡力としている。幾何学的非線形解析での収束過程を実線で、非弾性要素力式により算定した結果を用いた収束判定の経過を点線で示している。

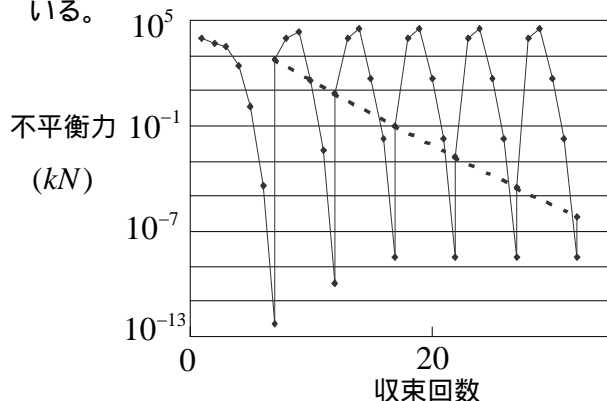


図11 収束過程

図11を見ると、速やかに収束解を得ていることがわかり、複合非線形解析を行う際にも安定に解を得られることがわかる。今回は、32回という収束回数で収束解を得ることができた。

7. 二次元複合非線形解析例2 (円管)

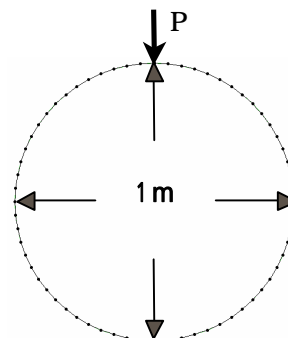


図12 解析に用いる円管

ここでは、図 12 に示す円管を用いて剛棒 4 点バネ要素による複合非線形解析を行う。円管を 64 節点、64 部材に切り、要素両端のバネの非弾性性状はバイリニアとし各材料特性値は $EA = 5.000 \times 10^5 kN$ 、 $EI = 1.041 \times 10^2 kNm^2$ 、 $EI' = 1.041 kNm^2$ 、 $\eta l = 0.025m$ 、 $My = 4.583 kNm$ として解析を行う。また、円管の最頂点に荷重を載荷し、最下点は固定端とする。図 13 に $P = 40kN$ 、 $P = 60kN$ 、 $P = 80kN$ 載荷時の変形図を示す。

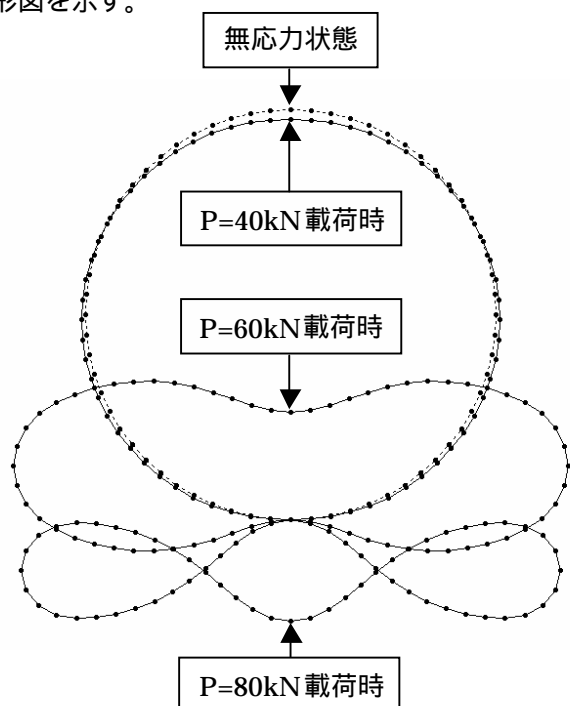


図 13 円管の変形図

図 13 で示すように、多節点多部材の構造系に対しての大変位解析においても確実に収束解を得ることができる。 $P = 40kN$ 載荷時には塑性ヒンジ発生箇所が要素の荷重載荷点と、下固定端、および要素両端の 4 箇所のみとなっており、変形量は小さい。しかし $P = 40kN$ を超えると塑性ヒンジ領域は次第に広がり、 $P = 60kN$ および $P = 80kN$ 載荷時には大きな変形が生じている。

また、幾何学的非線形解析のみの結果と比較すると、複合非線形での $P = 80kN$ 載荷時と同様の変位を得るには、 $P = 4400kN$ もの荷重が必要となり、材料非線形性を考慮するか否かで非常に大きな差異が出ることとなる。

8. 結論

非弾性要素として剛棒 4 点バネ一体型要素を用いると以下のような利点がある。

1. 剛棒 4 点バネ一体型要素のひずみエネルギーを弾性梁と等価とすることにより、高精度な解析が可能となる。
2. 塑性ヒンジ長を任意に設定でき、一要素長に依存することなく解析が行える。
3. 一貫したアルゴリズムのもとに複合非線形解析をすることができる。
4. 大きな荷重を載荷したときにも、安定した計算のもとに速やかに、かつ荷重増分幅に依存しない収束解を得る。

これにより、骨組構造解析において剛棒 4 点バネ一体型要素を用いて複合非線形解析を行うことは非常に有用であり、より実現象に近い解析が可能となる。

参考文献

- (1)Katsushi Ijima, Toshiyuki Harada, Hiroyuki Obiye and Shin-ichi Iguchi : A Study on Iterative Algorithm in Nonlinear Analysis of Frame Structures with static Indeterminacy, Stability and Ductility of Steel Structures (SDSS 2002) M.Iv anyi, editor 2002, Akademiai Kiado, Budapest.
- (2)Katsushi Ijima, Hiroyuki Obiye, Toshiyuki Harada and Shin-ichi Iguchi : A study on Geometrically and Materially Nonlinear Analysis of Space Frame Structures, The Second International Conference on Advances in Structural Engineering and Mechanics, Budan, Korea, August 21-23, 2002.
- (3) 生出佳、中島章典、斉木功：剛体バネモデルを用いた橋脚の三次元弾塑性地震応答解析、土木学会論文集 No.654/I-52、2000.7
- (4)川井忠彦：離散化極限解析法概論、コンピュータによる極限解析法シリーズ 1、培風館、1991.7.
- (5)K.Ijima, H.Obiye, S.Iguchi and S.Goto: Element Coordinates and the Utility in Large Displacement Analysis of a Space Frame, CMES, vol.4, no.2, 2003.