

電流の混合・分割による雑音の発生

佐伯 竜・猿渡 博行・平良 豊・豊島 耕一・遠藤 隆

Generation of Noise by Current Mixing and Partitioning

By

Ryu SAEKI, Hiroyuki SARUWATARI, Yutaka HIRAYOSHI, Kouichi TOYOSHIMA, Takasi ENDO

Abstract: Noise is generated due to mixing and partitioning of two states in which fluctuations of particle numbers are suppressed. We considered theoretically the noise generation and confirmed it by using an electronic circuit.

Key words: shot noise, transistor, constant-current, fano factor

1. はじめに

ローパスフィルターが電流中に挿入されたとき、時間遅延回路として働き、ショットノイズよりも小さいノイズに対しては高周波領域でノイズが発生する⁽¹⁾。そこで並列接続した外部コンデンサを電源の一部と考えることにより、定電圧駆動を実現し、ショットノイズを発生させることが出来る⁽²⁾。本実験では、粒子数の混合と分割により発生すると考えられる雑音を測定した。

2. 粒子数状態の混合と分割による雑音の発生

図1に示すように、一定の粒子数 N を送り出す粒子源が二つあり、粒子数を計数する検出器が二つあるとする。もし粒子源1の粒子が検出器1に、粒子源2の粒子が検出器2に送られるとすると、検出される粒子数に揺らぎはなく、雑音は発生しない。しかし、粒子源1の粒子が確率 p で検出器1に、確率 $q=1-p$ で検出器2に送られ、同様に粒子源2の粒子が、確率 p で検出器2に、確率 q で検出器1に送られるなら、検出される粒子数は揺らぎ、雑音が発生する。

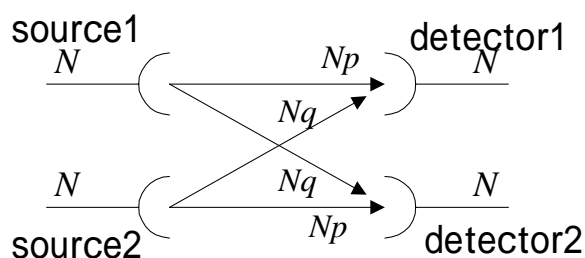


Fig 1 Two sources of particle and detectors

この現象を確率母関数を用いて解析し、検出器1が n 個の粒子を検出する確率 $P(n)$ を求める。粒子源から m 個の粒子を受け取る確率 $P_1(m)$ は成功確率 p の二項分布であるから、

$$P_1(m) = {}_N C_m p^m q^{N-m} \quad (1)$$

となる。また粒子源2から $n-m$ 個の粒子を受け取る確率は成功確率 q の二項分布であるから、

$$P_2(n-m) = {}_N C_{n-m} q^{n-m} p^{N-n+m} \quad (2)$$

となる。この二つの分布を用いると、 $P(n)$ は、

$$P(n) = \sum_{m=0}^n P_1(m) P_2(n-m) \quad (3)$$

平成14年5月1日受理

*理工学部物理科学科

**工学系研究科機能物質化学専攻

©佐賀大学理工学部

によって求めることが出来る。 $P(n)$ を求めるために、

$$f(x) = (px + q)^N (qx + p)^N = \sum_{m=0}^{2N} c_m x^m \quad (4)$$

という確率母関数を考えると、 x の n 次の係数 c_n は、 $P(n)$ に一致する。すなわち

$$f(x) = \sum_{m=0}^{2N} P(m)x^m \quad (5)$$

となる。この多項式から $P(n)$ の平均や分散を求めることが出来る。

まず n の平均 $\langle n \rangle$ は、

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{2N} nP(n) = f'(1) \quad (6)$$

に等しい。そこで $f'(x)$ を求めると、

$$f'(x) = N\{(px + q)(qx + p)\}^{N-1} \cdot \{p(qx + p) + q(px + q)\} \quad (7)$$

となるので

$$\langle n \rangle = f'(1) = N \quad (8)$$

となる。これは直感的にも明らかである。次に2次の階乗積率 $n(n-1)$ の平均 $\langle n(n-1) \rangle$ は、

$$\langle n(n-1) \rangle = \sum n(n-1)P(n) = f''(1) \quad (9)$$

に等しい。そこで $f''(x)$ を求めると、

$$f''(x) = N(N-1)\{(px + q)(qx + p)\}^{N-2} \cdot \{p(qx + p) + q(px + q)\}^2 + N\{(px + q)(qx + p)\}^{N-1} \cdot 2pq \quad (10)$$

となるので

$$\langle n(n-1) \rangle = f''(1) = N(N-1) + 2Npq \quad (11)$$

となる。これから分散 $\sigma^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ を求めると、

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= f''(1) + \langle n \rangle - \langle n \rangle^2 \\ &= N(N-1) + 2Npq + N - N^2 \\ &= 2Npq \end{aligned} \quad (12)$$

となる。平均粒子数 N のポアソン分布の分散 σ_0^2 は、

$$\sigma_0^2 = N \quad (13)$$

であるから Fano 因子は

$$F = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = 2pq \quad (14)$$

であり、 $p = q = 1/2$ とおくと、雑音の Fano 因子は、

$$F = 2pq = \frac{1}{2} \quad (15)$$

となる。

3. 電流の混合と分割

混合・分割により発生する雑音について図2のような回路を考えた。

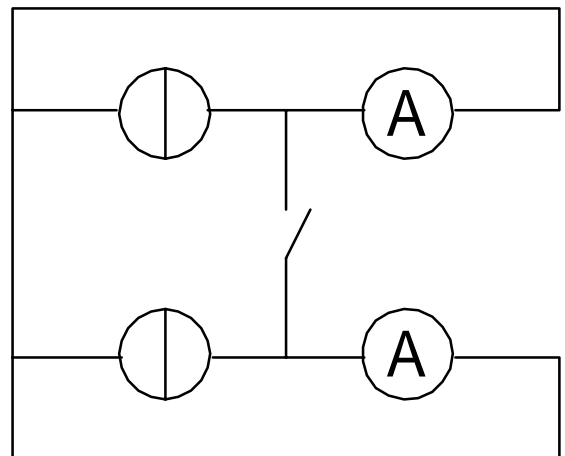


Fig 2 current mixing and partitioning

スイッチが開いている状態は、2つの粒子源が混合・分割されない場合に相当し、電流計に流れる電

流に揺らぎは無い。しかしスイッチが閉じた状態では、前節で述べたように、電子が二つの回路のいずれにも流れることが可能になり、雑音が発生すると考えられる。

ショットノイズ以下に抑制されたノイズはサブショットノイズと呼ばれるが、サブショットノイズは粒子数の揺らぎが抑制された電子の流れである。よってショットノイズ及びサブショットノイズを測定するために、図3の装置を考えた。ここでトランジスタはオシロスコープと共に電流計として用いている。

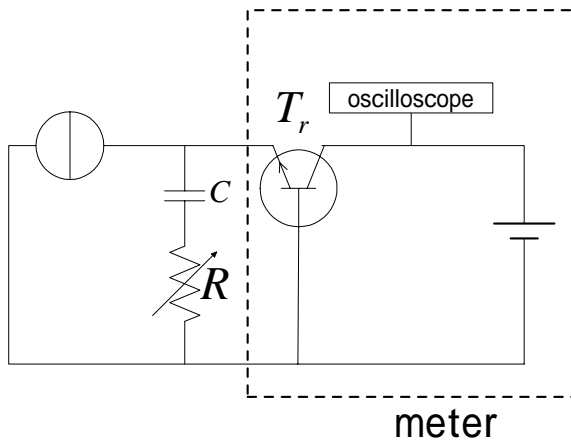


Fig 3 diagrammic illustration of experiment

実際に図2のような電流の混合・分割を行う為に、図3の回路を2つ並べ、図4のような実験回路を作成した。並べた回路の特性を揃えるために二素子複合型トランジスタ 2SC294 ($f_t = 200 \text{ MHz}$) を使用している。

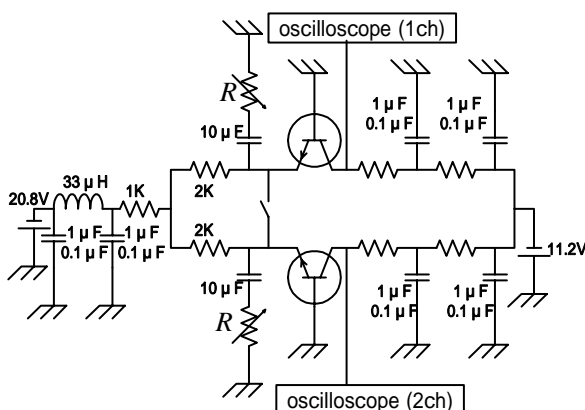


Fig 4 experiment

4. 等価回路

十分大きな C ($C = 10\mu\text{F}$) を用いたので、交流成分に対しては、 C のインピーダンスは抵抗 R に比べて無視できる。このことから図4の回路の交流成分に関する等価回路は図5のようになる。

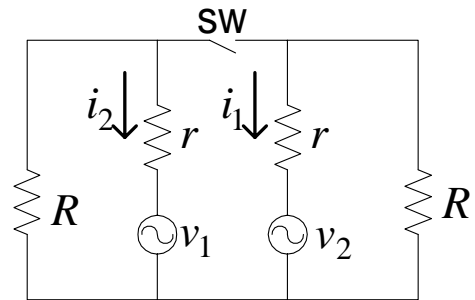


Fig 5 equivalent circuit

r は電流計の内部抵抗(実際にはトランジスタのエミッタ-ベース間の微分抵抗), R は C に対して直列接続した外部抵抗である。また等価散弾雑音源の電圧を v_1, v_2 とした。

スイッチが開いている場合、それぞれの内部抵抗 r に流れる電流 i_1, i_2 は

$$i_1 = \frac{v_1}{r+R} \quad (16a)$$

$$i_2 = \frac{v_2}{r+R} \quad (16b)$$

となる。したがって電流雑音の大きさは、

$$\langle |i_1|^2 \rangle = \frac{\langle |v_1|^2 \rangle}{r^2 + R^2} \quad (17a)$$

$$\langle |i_2|^2 \rangle = \frac{\langle |v_2|^2 \rangle}{r^2 + R^2} \quad (17b)$$

となる。 $r \ll R$ の領域では $\langle |i_1|^2 \rangle = 0, \langle |i_2|^2 \rangle = 0$ となるのが分かる。逆に $r \gg R$ の領域では、

$$\langle |i_1|^2 \rangle = \frac{\langle |v_1|^2 \rangle}{r^2} \quad (18a)$$

$$\langle |i_2|^2 \rangle = \frac{\langle |v_2|^2 \rangle}{r^2} \quad (18b)$$

となり、これが完全散弾雑音の大きさである。この完全散弾雑音と電流雑音との比を取ると、次のよ

うに Fano 因子を r と R の関数として求めることができる。

$$F = \left(\frac{r}{r+R} \right)^2 \quad (19)$$

図 5 でスイッチを閉じた場合を考えると、

$$v_1 = ri_1 + R \frac{i_1 + i_2}{2} \quad (20a)$$

$$v_2 = ri_2 + R \frac{i_1 + i_2}{2} \quad (20b)$$

となる。ここで

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad (21a)$$

$$\Delta v = \frac{v_2 - v_1}{2} \quad (21b)$$

$$z = r + R \quad (21c)$$

$$\langle |v_1|^2 \rangle = \langle |v_2|^2 \rangle \quad (21d)$$

$$\langle v_1^* v_2 \rangle = \langle v_2^* v_1 \rangle = 0 \quad (21e)$$

とおくことにより、

$$i_1 = -\frac{\Delta v}{r} + \frac{v}{z} \quad (22a)$$

$$i_2 = \frac{\Delta v}{r} + \frac{v}{z} \quad (22b)$$

を得る。スイッチを開いた場合と同様に Fano 因子を求めると、

$$F = \frac{r^2 + rR + \frac{R^2}{2}}{r^2 + 2rR + R^2} \quad (23)$$

となり、やはり $r \ll R$ で $F = 1/2$ となっている。これは 2 で考慮した結果と一致している。

5. 実験結果

スイッチを開閉し、2つの電流回路が結合、または非結合の状態、それぞれ抵抗値 R を変化させ、ノイズを測定した。オシロスコープで測定したデータをフーリエ変換し、各周波数のスペクトル密度をプロットしたのが図 6 及び図 7 である。

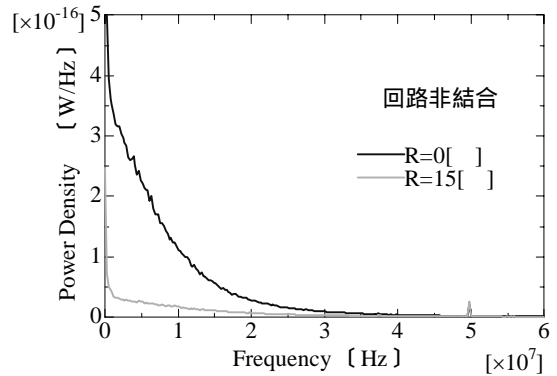


Fig 6 Noise spectrum (non connected)

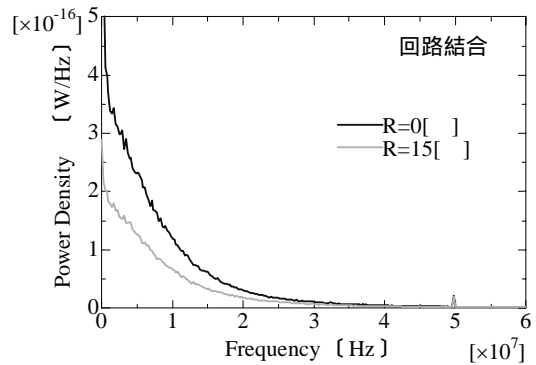


Fig 7 Noise spectrum (connected)

R が増加すると、ノイズが抑制されることがわかる。 $R = 0$ のときのノイズスペクトルはショットノイズを与えるが、回路が非結合の場合には抵抗値をあげることにより、ノイズはショットノイズの 1% 程度まで抑制された。それに対し、非結合の場合には抵抗値をあげても、ショットノイズの 50% までしかノイズは抑制されなかった。これは理論が予測する値とよく一致している。 $R = 0$ のノイズで他のノイズを規格化し、Fano 因子を求めた。図 8 及び図 9 にその結果を示している。

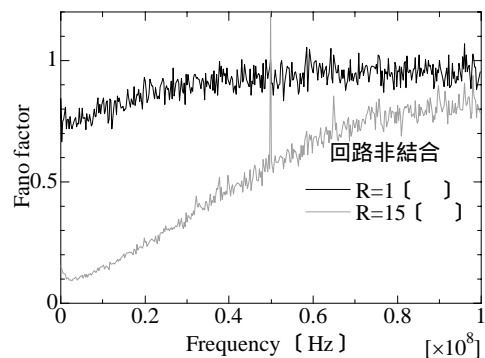


Fig 8 Fano Factor (non connected)

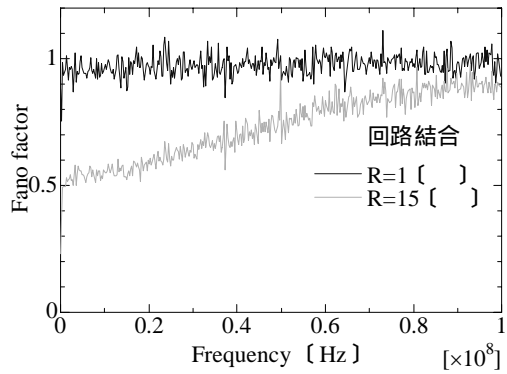


Fig 9 Fano Factor (connected)

(19)式及び(23)式を用いて、周波数0の極限でのFano因子を解析し、パラメータ r を最小二乗法で求めた(図10, 図11)。回路を結合した場合は $r=4.9(\Omega)$ 、非結合の場合は $r=5.6(\Omega)$ であり、これらの値は静的な $V-I$ 特性及び、振幅10mVの交流を用いた測定で求めた微分抵抗 $r=5.0(\Omega)$ にほぼ一致した。

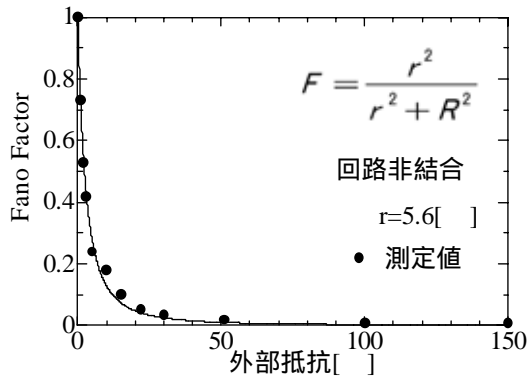


Fig 10 Fano Factor at frequency zero (non connected)

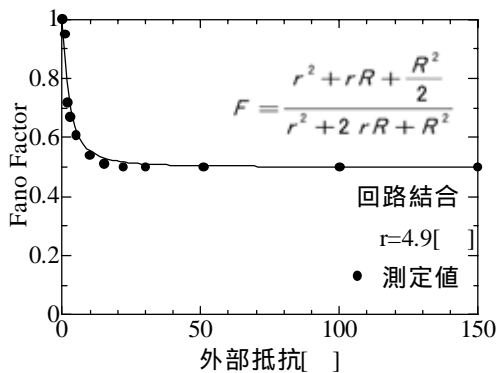


Fig 11 Fano Factor at frequency zero (connected)

6.まとめ

粒子数の揺らぎを抑えた状態を混合し、分割することで発生する雑音を用いて測定した。また測定結果を等価回路を用いて解析することができた。理論と実験はよく一致した。

参考文献

- (1) 森本栄太郎, 平良豊, 豊島耕一, 遠藤隆: 「定電流分割による電流雑音の反相関」, 佐賀大学理工学部集報, 第27巻, 1~8 (1998)
- (2) Takasi Endo, Kouichi Toyoshima and Yutaka Hirayoshi "Noise Generation due to Time Delay Circuits", Journal of the Physical Society of Japan Vol.70, No.7, July, 2001, pp. 2068-2071.