

有限要素法による有明海の潮流解析

加藤 治・田中 明*・瀬口 昌洋**
長 裕幸・戸原 義男***・森 健***

(生産情報科学講座)

平成元年 5月31日受理

Analysis of Tidal Current of the Ariake Sea by using the Finite Element Method

Osamu KATO, Akira TANAKA, Masahiro SEGUCHI, Hiroyuki CHO,
Yoshio TOHARA and Ken MORI
(Laboratory of Irrigation and Drainage Engineering)

Received May 31, 1989

Summary

Tidal current of the Ariake Sea was analyzed on the basis of the solution of the shallow water wave equation and continuity equation by using the Galerkin's method on finite elements.

In this method, the irregular flow regions and coastline are treated and boundary conditions are introduced easily.

In these points, the finite element method is superior to the finite difference method.

Sea level obtained from the calculation are almost consistent with the observed data in the Ariake Sea.

A little discrepancies between the observed velocity vector plots and the calculated results are due to the neglect of the frictional term in the fundamental equation.

The results indicate that the finite element method can be an useful tool for shallow water problems.

Key words: finite element method, tidal current, Ariake Sea.

緒 言

有明海はわが国最大の潮差をもち、湾奥の住之江における大潮差は約6 mに及んでいる。湾奥部では、諫早湾や佐賀・筑後平野地先に広大な干潟が発達し、その面積は大潮時で約240 km²、小潮時でも約110 km²に達する。

最近、この地域の水質悪化が問題となり、その原因と浄化を考える場合、有明海のより正確な流れ解析が必要となっている。

本研究は、有限要素法を用いて有明海の潮流を解析したものである。この方法は、解析領域

*生産環境工学講座

**浅海干潟総合実験施設

***九州大学農学部

を任意の形状で与えることができ、境界条件もより多くの条件を扱うことができるようにしたものである。さらに、この方法は領域が異なった場合でも入力データを変えるだけで解析でき、プログラムを作り替える必要もない。このため、有明海のように複雑な海岸線をもつ潮汐流の解析には非常に有意なものと考えられる。

ここでは、摩擦を無視した浅水方程式を有限要素法で解析する¹⁾²⁾。

基礎方程式

平面 2 次元の浅水方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

連続の方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 g ：重力の加速度、 $H = h + \zeta$ ：水深 (h ：平均水深、 ζ ：潮位、図-1 参照)、 u 、 v ：それぞれ x 、 y 方向の流速である。

境界条件としては、図-2 に示すように陸地境界 Γ_1 と潮位、潮流を与える海上境界 Γ_2 を考える。

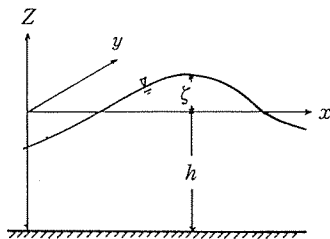


図-1 記号の説明

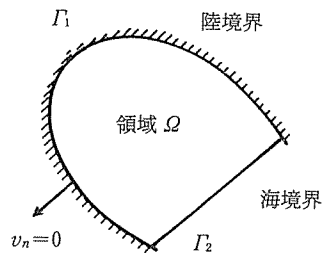


図-2 境界の記号の説明

浅水方程式の離散化

浅水方程式(1)、(2)を Galerkin 法を用いて、離散化する。

(1)、(2)式に δu 、 δv なる重み関数を乗じて領域 Ω で積分する。

$$\int \delta u \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega + \int \delta u \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega = -g \int \delta u \frac{\partial \zeta}{\partial x} d\Omega \dots\dots\dots(4)$$

$$\int \delta v \frac{\partial v}{\partial t} d\Omega + \int \delta v \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega = -g \int \delta v \frac{\partial \zeta}{\partial y} d\Omega \dots\dots\dots(5)$$

また、 $\delta \zeta$ なる重み関数を(3)式に乗じて領域 Ω で積分すると

$$\int \delta \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\Omega + \int \delta \zeta \left(\frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \dots\dots\dots(6)$$

となる。

図-3 に示すように、第 e 番目の要素について、三角形の 3 頂点を、1、2、3 (反時計回

り) で表す. この要素内の流速 u, v , 潮位 ζ 及びそれぞれの重み関数を次のように近似する.

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{p=1}^3 \phi_p u_p & v &= \sum_{p=1}^3 \phi_p v_p & \zeta &= \sum_{p=1}^3 \phi_p \zeta_p \\
 \delta u &= \sum_{p=1}^3 \phi_p \delta u_p & \delta v &= \sum_{p=1}^3 \phi_p \delta v_p & \delta \zeta &= \sum_{p=1}^3 \phi_p \delta \zeta_p \dots\dots\dots(7)
 \end{aligned}$$

ここに,

$$\phi_a = \frac{1}{2\Delta^e} (a_a + b_a x + c_a y)$$

$$a_a = x_b y_c - x_c y_b$$

$$b_a = y_b - y_c$$

$$c_a = x_c - x_b$$

要素 e の三角形の面積は

$$\Delta^e = \{b_a c_b - b_b c_a\} / 2$$

ここで, a, b, c は 1, 2, 3 の整数である.

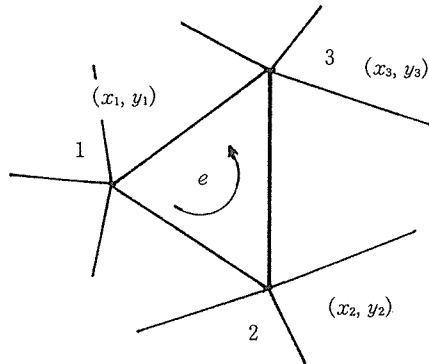


図-3 三角形要素の記号

これら(7)式を(4), (5), (6)式に代入して要素方程式をつくれればよい.

(4)式についてそのアルゴリズムを説明する.

(4)式に(7)式を代入すると,

$$\begin{aligned}
 &\int \sum_{a=1}^3 \phi_a \delta u_a \frac{\partial u}{\partial t} dx dy + \int \sum_{a=1}^3 \phi_a \delta u_a \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \\
 &+ g \int \sum_{a=1}^3 \phi_a \delta u_a \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx dy = 0
 \end{aligned}$$

いま, $a=1$ のみを考える,

$$\begin{aligned}
 &\int \phi_1 \delta u_1 \frac{\partial u}{\partial t} dx dy + \int \phi_1 \delta u_1 u \frac{\partial u}{\partial x} dx dy \\
 &+ \int \phi_1 \delta u_1 v \frac{\partial u}{\partial y} dx dy + g \int \phi_1 \delta u_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx dy = 0 \dots\dots\dots(8)
 \end{aligned}$$

δu_1 は任意の値をとれるから,

$$\begin{aligned}
 &\int \phi_1 \frac{\partial u}{\partial t} dx dy + \int \phi_1 u \frac{\partial u}{\partial x} dx dy + \int \phi_1 v \frac{\partial u}{\partial y} dx dy + g \int \phi_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx dy = 0 \\
 &\quad \quad \quad \{A\} \quad \quad \quad \{B\} \quad \quad \quad \{C\} \quad \quad \quad \{D\}
 \end{aligned}$$

となる. 上式の各項について整理する

{A} は

$$\int \phi_1 \frac{\partial u}{\partial t} dx dy = \sum_{b=1}^3 \int \phi_1 \phi_b \frac{\partial u_b}{\partial t} dx dy = \sum_{b=1}^3 M_{1b} \dot{u}_b \quad \dots\dots\dots(9)$$

ここで, $M_{1b} = \int \phi_1 \phi_b dx dy$

{B} は

$$\begin{aligned} & \int \phi_1 u \frac{\partial u}{\partial x} dx dy \\ &= \sum_{b,c=1}^3 \int \phi_1 \phi_b u_b \frac{\partial}{\partial x} \{ \phi_c u_c \} dx dy = \sum_{b,c=1}^3 X_{1bc} u_b u_c \quad \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

ここに, $X_{1bc} = \int \phi_1 \phi_b \frac{\partial \phi_c}{\partial x} dx dy$

具体的に(10)式は

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^3 \sum_{c=1}^3 X_{1bc} u_b u_c &= X_{111} u_1 u_1 + X_{112} u_1 u_2 + X_{113} u_1 u_3 \\ &+ X_{121} u_2 u_1 + X_{122} u_2 u_2 + X_{123} u_2 u_3 \\ &+ X_{131} u_3 u_1 + X_{132} u_3 u_2 + X_{133} u_3 u_3 \quad \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

となる.

{C} は

$$\begin{aligned} & \int \phi_1 v \frac{\partial u}{\partial y} dx dy \\ &= \sum_{b,c=1}^3 \int \phi_1 \phi_b u_b \frac{\partial}{\partial y} \{ \phi_c u_c \} dx dy = \sum_{b,c=1}^3 Y_{1bc} v_b u_c \quad \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

ここに, $Y_{1bc} = \int \phi_1 \phi_b \frac{\partial \phi_c}{\partial y} dx dy$

具体的に(12)式は

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^3 \sum_{c=1}^3 Y_{1bc} v_b u_c &= Y_{111} v_1 u_1 + Y_{112} v_1 u_2 + Y_{113} v_1 u_3 \\ &+ Y_{121} v_2 u_1 + Y_{122} v_2 u_2 + Y_{123} v_2 u_3 \\ &+ Y_{131} v_3 u_1 + Y_{132} v_3 u_2 + Y_{133} v_3 u_3 \quad \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

となる.

{D} は,

$$g \int \phi_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} dx dy = g \int \phi_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{a=1}^3 \phi_a \xi_a \right) dx dy = g \sum_{b=1}^3 P_{1b} \zeta_b \quad \dots\dots\dots(14)$$

ここに, $P_{1b} = \int \phi_1 \frac{\partial \phi_b}{\partial x} dx dy$

となる.

(8)式に(9), (10), (12)及び(14)式を代入すると,

$a=1$ の場合

$$\begin{aligned} & M_{11} \dot{u}_1 + M_{12} \dot{u}_2 + M_{13} \dot{u}_3 \\ &+ X_{111} u_1 u_1 + X_{112} u_1 u_2 + X_{113} u_1 u_3 + X_{121} u_2 u_1 + X_{122} u_2 u_2 + X_{123} u_2 u_3 \\ &+ X_{131} u_3 u_1 + X_{132} u_3 u_2 + X_{133} u_3 u_3 + Y_{111} v_1 u_1 + Y_{112} v_1 u_2 + Y_{113} v_1 u_3 \\ &+ Y_{121} v_2 u_1 + Y_{122} v_2 u_2 + Y_{123} v_2 u_3 + Y_{131} v_3 u_1 + Y_{132} v_3 u_2 + Y_{133} v_3 u_3 \\ &+ g(P_{11} \zeta_1 + P_{12} \zeta_2 + P_{13} \zeta_3) = 0 \quad \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

をえる.

ここで、 M_{ab} , X_{abc} , Y_{abc} , P_{ab} , Q_{ab} の積分値は

$$\begin{aligned}
 M_{ab} &= \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{12} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
 X_{abc} &= \begin{vmatrix} X_{111} & X_{112} & X_{113} & X_{121} & X_{122} & X_{123} & X_{131} & X_{132} & X_{133} \\ X_{211} & X_{212} & X_{213} & X_{221} & X_{222} & X_{223} & X_{231} & X_{232} & X_{233} \\ X_{311} & X_{312} & X_{313} & X_{321} & X_{322} & X_{323} & X_{331} & X_{332} & X_{333} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{24} \begin{vmatrix} 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 & b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 & 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \end{vmatrix} \\
 Y_{abc} &= \begin{vmatrix} Y_{111} & Y_{112} & Y_{113} & Y_{121} & Y_{122} & Y_{123} & Y_{131} & Y_{132} & Y_{133} \\ Y_{211} & Y_{212} & Y_{213} & Y_{221} & Y_{222} & Y_{223} & Y_{231} & Y_{232} & Y_{233} \\ Y_{311} & Y_{312} & Y_{313} & Y_{321} & Y_{322} & Y_{323} & Y_{331} & Y_{332} & Y_{333} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{24} \begin{vmatrix} 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 & c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 & c_3 & 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix} \\
 P_{ab} &= \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
 Q_{ab} &= \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = b_1 & \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = b_2 & \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial x} = b_3 & \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = c_1 & \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = c_2 & \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial y} = c_3
 \end{aligned}$$

となるのでこれらを(15)式に代入すると、

$$\begin{aligned}
 &M_{11}\dot{u}_1 + M_{12}\dot{u}_2 + M_{13}\dot{u}_3 \\
 &+ (2b_1u_1u_1 + 2b_2u_1u_2 + 2b_3u_1u_3 + b_1u_2u_1 + b_2u_2u_2 + b_3u_2u_3 \\
 &+ b_1u_3u_1 + b_2u_3u_2 + b_3u_3u_3 + 2c_1v_1u_1 + 2c_2v_1u_2 + 2c_3v_1u_3 \\
 &+ c_1v_2u_1 + c_2v_2u_2 + c_3v_2u_3 + c_1v_3u_1 + c_2v_3u_2 + c_3v_3u_3)/24 \\
 &+ g(b_1\zeta_1 + b_2\zeta_2 + b_3\zeta_3)/6 = 0 \dots\dots\dots(16)
 \end{aligned}$$

この式を次のようにまとめる

$$\begin{aligned}
 &M_{11}\dot{u}_1 + M_{12}\dot{u}_2 + M_{13}\dot{u}_3 \\
 &+ BU_{11}u_1 + BU_{12}u_2 + BU_{13}u_3 + CU_{11}v_1 + CU_{12}v_2 + CU_{13}v_3 = FB_1 \dots\dots\dots(17)
 \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 BU_{11} &= 2(b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3)/24 \\
 BU_{12} &= (b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3)/24 \\
 BU_{13} &= (b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3)/24 \\
 CU_{11} &= 2(c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3)/24 \\
 CU_{12} &= (c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3)/24 \\
 CU_{13} &= (c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3)/24 \\
 FB_1 &= -g(b_1\zeta_1 + b_2\zeta_2 + b_3\zeta_3)/6
 \end{aligned}$$

となる。 $a=2, 3$ の場合も同じように計算できる。

y 方向の運動方程式(5)式については(17)式に対応して、

a=1 の場合

$$M_{11}\dot{v}_1 + M_{12}\dot{v}_2 + M_{13}\dot{v}_3 + BV_{11}u_1 + BV_{12}u_2 + BV_{13}u_3 + CV_{11}v_1 + CV_{12}v_2 + CV_{13}v_3 = FC_1 \dots\dots\dots(18)$$

ただし、

$$\begin{aligned} BV_{11} &= 2(b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3)/24 \\ BV_{12} &= (b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3)/24 \\ BV_{13} &= (b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3)/24 \\ CV_{11} &= 2(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3)/24 \\ CV_{12} &= (c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3)/24 \\ CV_{13} &= (c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3)/24 \\ FC_1 &= -g(c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2 + c_3\zeta_3)/6 \end{aligned}$$

となる。

一方、連続の方程式(6)式は

$$\int \delta\zeta \frac{\partial\zeta}{\partial t} dx dy + \int \delta\zeta \left(\frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} \right) dx dy = 0 \dots\dots\dots(19)$$

であるが、a=1 の場合、

$$\int \phi_1 \delta\zeta_1 \frac{\partial\zeta}{\partial t} dx dy + \int \phi_1 \delta\zeta_1 \left(\frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} \right) dx dy = 0 \dots\dots\dots(20)$$

となる。δζ₁ は任意であるから、

$$\sum_{b=1}^3 \int \phi_1 \frac{\partial\phi_b\zeta_b}{\partial t} dx dy + \int \phi_1 \frac{\partial Hu}{\partial x} dx dy + \int \phi_1 \frac{\partial Hv}{\partial y} dx dy = 0$$

{E} {F} {G}

となり、各項を整理すると、

{E} は、

$$\sum_{b=1}^3 \int \phi_1 \frac{\partial\phi_b\zeta_b}{\partial t} dx dy = \sum_{b=1}^3 M_{1b}\dot{\zeta}_b \dots\dots\dots(21)$$

{F} は、

$$\int \phi_1 \frac{\partial Hu}{\partial x} dx dy = \int \phi_1 H \frac{\partial u}{\partial x} dx dy + \int \phi_1 u \frac{\partial H}{\partial x} dx dy$$

{F1} {F2}

に変形できる。

{F1} は

H = h + ζ = φ₁H₁ + φ₂H₂ + φ₃H₃ であるから

$$\int \phi_1 H \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = \sum_{b,c=1}^3 X_{1bc} H_b u_c \dots\dots\dots(22)$$

となる。同様に

{F2} は

$$\int \phi_1 u \frac{\partial H}{\partial x} dx dy = \sum_{b,c=1}^3 X_{1bc} u_b H_c \dots\dots\dots(23)$$

となる。

{G} 項も(22)、(23)式と同様に計算ができる。これらを、(20)式に代入すると、a=1 の場合、

$$M_{11}\dot{\zeta}_1 + M_{12}\dot{\zeta}_2 + M_{13}\dot{\zeta}_3$$

$$\begin{aligned}
 &+BH_{11}u_1+BH_{12}u_2+BH_{13}u_3+CH_{11}v_1+CH_{12}v_2+CH_{13}v_3 \\
 &+(BU_{11}+CV_{11})H_1+(BU_{12}+CV_{12})H_2+(BU_{13}+CV_{13})H_3=0 \dots\dots\dots(24)
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 BH_{11}&=2(b_1H_1+b_2H_2+b_3H_3)/24 \\
 BH_{12}&=(b_1H_1+b_2H_2+b_3H_3)/24 \\
 BH_{13}&=(b_1H_1+b_2H_2+b_3H_3)/24 \\
 CH_{11}&=2(c_1H_1+c_2H_2+c_3H_3)/24 \\
 CH_{12}&=(c_1H_1+c_2H_2+c_3H_3)/24 \\
 CH_{13}&=(c_1H_1+c_2H_2+c_3H_3)/24
 \end{aligned}$$

となる。

次に、境界条件の取り扱いについて考える。

いま、境界 Γ で $V_n = \bar{u}_n$ のとき

$$\int \phi_1 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\Gamma} \phi_1 (V_n - \bar{u}_n) d\Gamma \dots\dots\dots(25)$$

ここで、左辺第一項 () 内の 2 番目の積分は、

$$\int \phi_1 \frac{\partial Hu}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma} \phi_1 H u n_x d\Gamma - \int Hu \frac{\partial \phi_1}{\partial x} dx dy$$

であるから(25)式は

$$\begin{aligned}
 &\int \phi_1 \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx dy - \int Hu \frac{\partial \phi_1}{\partial x} dx dy - \int Hv \frac{\partial \phi_1}{\partial y} dx dy \\
 &- \int_{\Gamma} \phi_1 (H u n_x + H v n_y) d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi_1 (V_n - \bar{u}_n) d\Gamma = 0 \dots\dots\dots(26)
 \end{aligned}$$

また、

$$H u n_x + H v n_y = \bar{u}_n$$

従って(26)式は、

$$\begin{aligned}
 &\int \phi_1 \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx dy - \int Hu \frac{\partial \phi_1}{\partial x} dx dy - \int Hv \frac{\partial \phi_1}{\partial y} dx dy \\
 &\quad \{P\} \quad \quad \quad \{Q\} \quad \quad \quad \{R\} \\
 &+ \int_{\Gamma} \phi_1 V_n d\Gamma = 0 \dots\dots\dots(27)
 \end{aligned}$$

となる。(27)式の各項を変形すると

{P} は

$$\int \phi_1 \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx dy = \int \phi_1 \sum_{b=1}^3 \phi_b \frac{\partial \zeta_b}{\partial t} dx dy = \sum_{b=1}^3 M_{1b} \dot{\zeta}_b$$

{Q} は

$$\int Hu \frac{\partial \phi_1}{\partial x} dx dy = \sum_{b,c=1}^3 \int \phi_b \phi_c \frac{\partial \phi_1}{\partial x} H_b u_c dx dy$$

同様に {R} は、

$$\int Hv \frac{\partial \phi_1}{\partial y} dx dy = \sum_{b,c=1}^3 \int \phi_b \phi_c \frac{\partial \phi_1}{\partial y} H_b v_c dx dy$$

と変形できる。

以上のことから、全体系について重ね合わせると次の方程式を得る。

$$M_{ab} \dot{u}_b + BU_{ab} u_b + CU_{ab} v_b = FB_a$$

$$\begin{aligned}
 M_{ab}\dot{v}_b + BV_{ab}u_b + CV_{ab}v_b &= FC_a \\
 M_{ab}\dot{\zeta}_b + BH_{ab}u_b + CH_{ab}v_b + (BU_{ab} + CV_{ab})_{H_b} &= 0 \dots\dots\dots(28)
 \end{aligned}$$

例えば陽の解法で，集中行列を用いると上式は次のようになる。

$$\bar{M}_{ab}u_b^{n+1} = FB_a\Delta t + M_{ab}u_b^n - (BU_{ab}u_b^n + CU_{ab}v_b^n)\Delta t \dots\dots\dots(29)$$

すなわち，例えば， \bar{M}_{11} に関しては，

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_{11}u_1^{n+1} &= FB_1\Delta t + (M_{11}u_1^n + M_{12}u_2^n + M_{13}u_3^n) \\
 &\quad - (BU_{11}u_1^n + BU_{12}u_2^n + BU_{13}u_3^n \\
 &\quad + CU_{11}v_1^n + CU_{12}v_2^n + CU_{13}v_3^n)\Delta t
 \end{aligned}$$

ここで

\bar{M}_{11} , \bar{M}_{22} , \bar{M}_{33} は集中行列の係数で

$$\bar{M}_{ab} = \begin{vmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} & \bar{M}_{13} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} & \bar{M}_{23} \\ \bar{M}_{31} & \bar{M}_{32} & \bar{M}_{33} \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

となる。

ここでは，2 段階陽の解法を用いた。

ステップ 1 では，

$$M_{ab}u_b^{n+1/2} = FB_a\Delta t/2 + M_{ab}u_b^n - (BU_{ab}u_b^n + CU_{ab}v_b^n)\Delta t/2 \dots\dots\dots(30)$$

ステップ 2 では，

$$M_{ab}u_b^{n+1} = FB_a\Delta t + M_{ab}u_b^n - (BU_{ab}u_b^{n+1/2} + CU_{ab}v_b^{n+1/2})\Delta t \dots\dots\dots(31)$$

として計算を進めることにする。

有海海の潮流

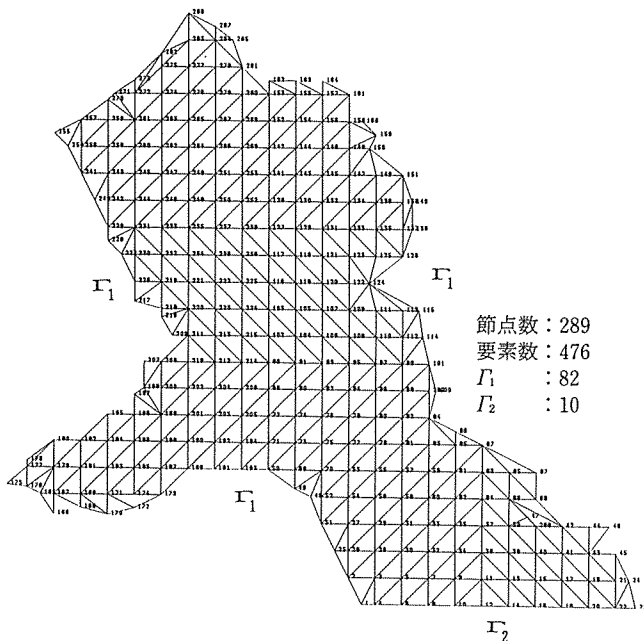


図-4 有明海の計算要素図

1. 計算要素

計算領域を図-4 に示すような三角形要素で分割する。節点数は289，要素数は476である。

境界は陸境界と海境界に分かれる。図-4 の Γ_1 は陸境界を示し， Γ_2 は海境界を示している。今回の計算では，筑後川等の河川流量は無視した（プログラムでは入力可能）。

Δt は80秒で計算した。

2. 水位の境界条件（海境界）

図-4 の海境界 Γ_2 に与える潮位条件は，図-5 に示す，大浦沖(1)，島原沖(4)および三池沖(2)の3点における調和定数をもとに求めた，1973年9月15日（大潮時）の潮位で与えた。使用分潮は主太陰半日周潮(M_2)，主太

陽半日周潮 (S_2)、日月合成周潮 (K_1) および主太陰日周潮 (O_1) の4分潮である。潮位計算に用いた調和定数を表一に示す。ここに、 n_i は角速度、 $U+V_0$ は引数、 H は振幅、そして K は遅角である。

3. 流速の境界条件 (海境界)

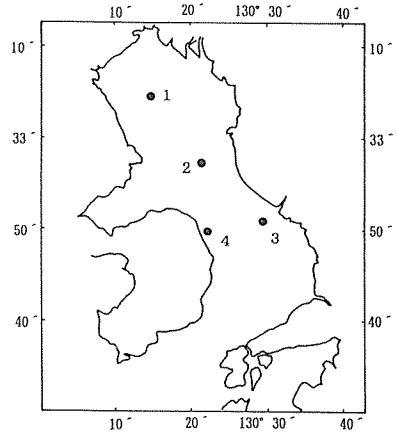
流速の境界条件は図一5の1~4の地点において、1973年8月26日から同9月13日までの実測記録をもとに8分潮の調和定数を求め、この結果から1973年9月15日(大潮)の潮流を推算して与えた。

使用8分潮は潮位で用いた4分潮の他に日月合成半日周潮 (K_2)、主太陰惰率潮 (N_2)、主太陽日周潮 (P_1) および主太陰惰率潮 (Q_1) である。

観測点の潮和定数を表二に示す。

4. 計算結果

有限要素法による計算結果を図一6~図一9に示す。



図一5 潮流及び水位の実測点

結 言

水平2次元の潮流解析を有限要素法を用いて解析した。差分法に比べ、節点数が多いとき、要素の取りかたには相当注意を必要とする。しかし、一度プログラムを完成させておけば、他の水域の計算をする場合でも、入力データを変えるだけでよい。しかも、複雑な海岸線が存在する場合でも、解析が容易である。

計算結果は潮位においては実測値をよく再現しているが潮流については計算結果が実測値より若干大きく現われた。この原因は、今回の計算では摩擦項を省略したが、有明海のような浅海域では、底面摩擦が大きく影響するためであろうと思われる。今後の課題はこの摩擦項を入れたときの、有限要素法の解析方法の開発である。

摘 要

浅水方程式と連続の式の解をガラーキン型有限要素法によってもとめ、有明海の潮流を解析した。

この方法では、不規則な形状の流れ領域と海岸線を簡単に処理でき、また境界条件も容易に導入することができる。これらの点において有限要素法は差分法より優れている。

表一1 潮汐の調和定数

分潮	n_i	$U+V_0$	三 池		大 浦		島 原	
			H	K	H	K	H	K
M_2	28.9841	289.0	155.4	259.3	155.5	258.9	135.5	254.9
S_2	30.0	0.0	68.1	295.0	67.6	294.9	62.4	286.2
K_1	15.0411	258.3	29.0	218.7	28.8	219.3	32.2	216.0
O_1	13.9430	26.8	22.0	199.2	21.9	199.4	23.0	194.7

表-2 潮流の調和定数

測点要目	分 潮		M_2	S_2	K_2	N_2	K_1	O_1	P_1	Q_1
	$U+V_0$		289.0	0.0	336.8	184.6	258.3	26.8	110.4	282.4
測点1 観測期間 S 48. 8.26- 9.12 位置 33.04.18N 130.14.54E	北方分速	V	0.539	0.251	0.068	0.066	0.075	0.039	0.025	0.089
		K	180	209	209	230	133	258	133	359
	東方分速	V	0.230	0.078	0.021	0.133	0.019	0.050	0.006	0.039
		K	319	345	345	334	255	6	265	85
	主方向 341°	V	0.568	0.256	0.070	0.085	0.075	0.044	0.025	0.084
		K	175	205	205	200	130	238	130	350
測点2 観測期間 S 48. 8.26- 9.12 位置 32.56.54N 130.22.42E	北方分速	V	0.469	0.311	0.085	0.180	0.020	0.125	0.006	0.078
		K	180	196	196	313	170	103	170	135
	東方分速	V	0.163	0.055	0.015	0.040	0.007	0.040	0.002	0.024
		K	338	344	344	341	69	64	69	80
	主方向 350°	V	0.514	0.314	0.086	0.171	0.019	0.118	0.006	0.074
		K	179	195	195	312	173	105	173	137
測点3 観測期間 S 48. 8.27- 9.13 位置 32.51.12N 130.29.18E	北方分速	V	0.687	0.297	0.081	0.153	0.015	0.035	0.005	0.043
		K	173	197	197	201	79	94	79	295
	東方分速	V	0.195	0.095	0.026	0.044	0.034	0.019	0.011	0.008
		K	331	10	10	349	246	284	246	307
	主方向 342°	V	0.710	0.311	0.085	0.157	0.025	0.039	0.008	0.038
		K	171	197	197	197	73	96	73	295
測点4 観測期間 S 48. 8.27- 9.13 位置 32.48.32N 130.23.24E	北方分速	V	0.415	0.192	0.052	0.048	0.046	0.058	0.015	0.061
		K	166	202	202	313	134	43	134	57
	東方分速	V	0.283	0.126	0.034	0.046	0.041	0.029	0.013	0.038
		K	355	24	24	110	267	188	267	116
	主方向 326°	V	0.501	0.230	0.063	0.064	0.056	0.062	0.019	0.044
		K	169	203	203	304	117	34	117	33

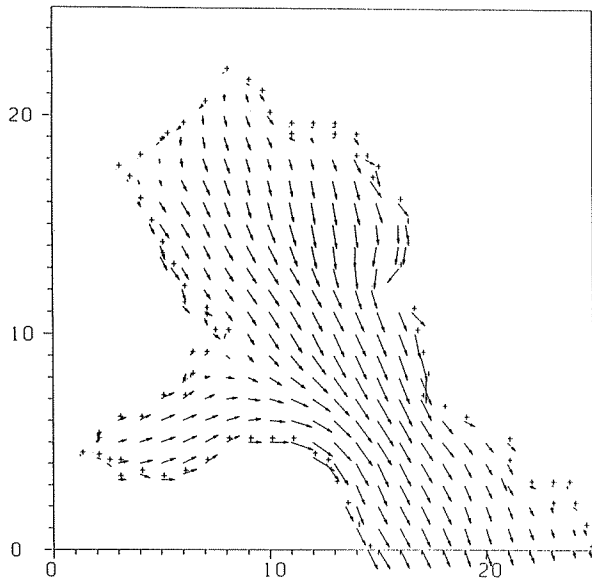


図-6(a) 計算結果ベクトル図
(満潮から3時間後)

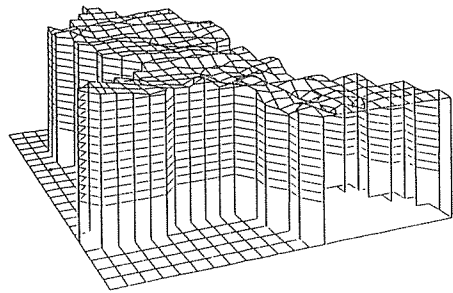


図-6(b) 計算結果鳥瞰図
(満潮から3時間後)

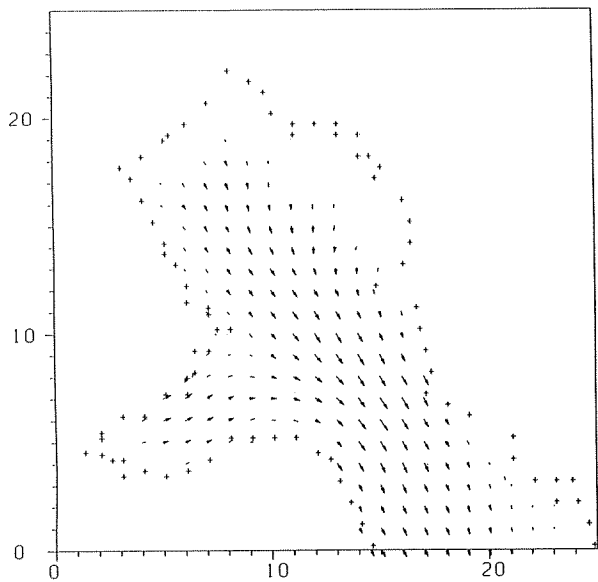


図-7(a) 計算結果ベクトル図
(満潮から5時間後)

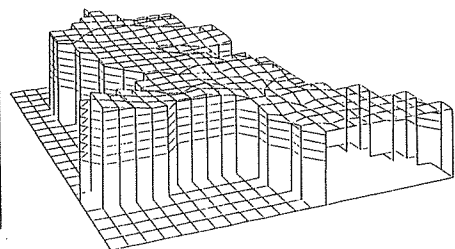
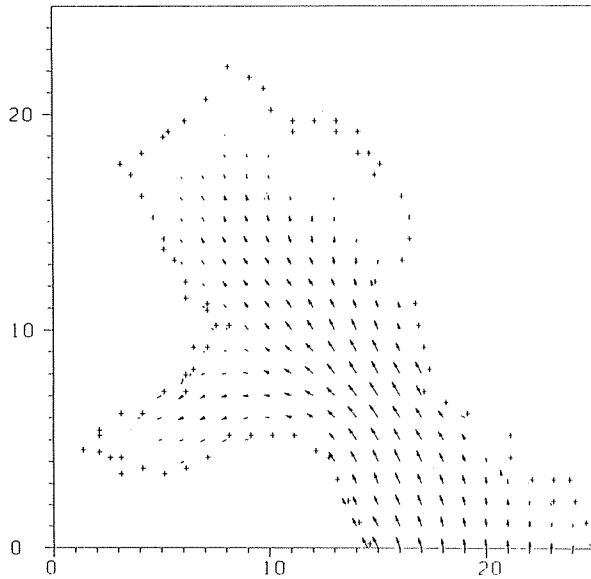
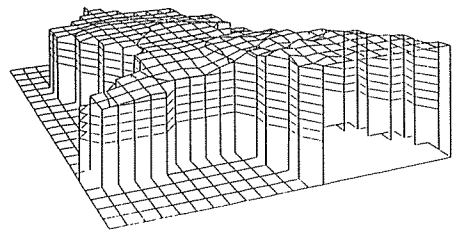


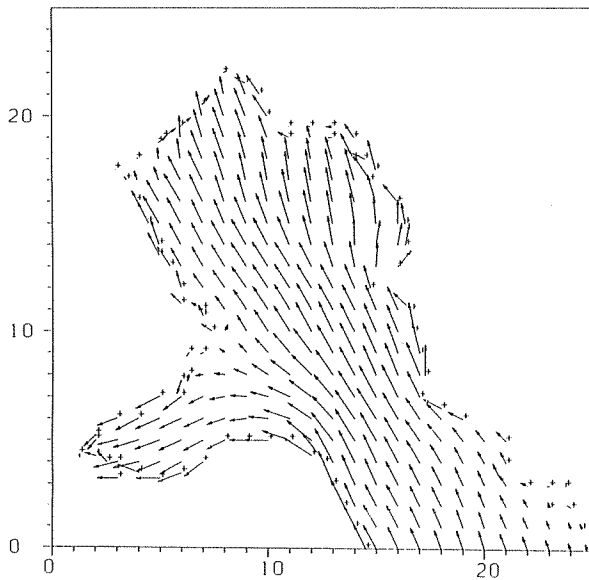
図-7(b) 計算結果鳥瞰図
(満潮から5時間後)



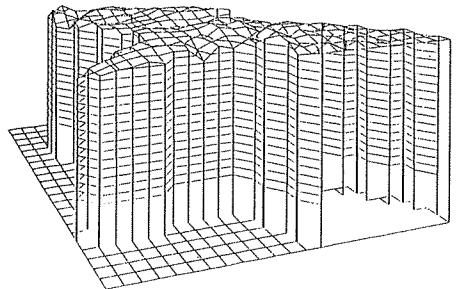
図一8(a) 計算結果ベクトル図
(満潮から8時間後)



図一8(b) 計算結果鳥瞰図
(満潮から8時間後)



図一9(a) 計算結果ベクトル図
(満潮から10時間後)



図一9(b) 計算結果鳥瞰図
(満潮から10時間後)

計算によって得られた潮位は有明海で観測されたデータとほぼ一致した。

また速度ベクトルについては観測値と計算結果との間で若干のずれがみられたが、これは基本式において摩擦項を無視したためである。

概して、これらの結果は有限要素法が浅水における流れの問題に対して有用な手段であることを示している。

引用文献

- 1) 川原陸人, 竹内則雄, 首藤伸夫 (1976). 2段階ラックス・ヴェンドロフ有限要素法による潮流解析. 第23回海岸工学講演会論文集, 498-501.
- 2) 竹内則雄, 吉田隆治, 川原陸人 (1975). 有限要素法による潮汐流の解析. 中央大学理工学部紀要 18, 111-120.