

非平衡凝縮を伴う流れ場の解明と
その有効利用に関する研究

2003年 9月

佐賀大学大学院工学系研究科
生体機能システム制御工学専攻

島本 克己

目次

主な記号	5
第1章 序論	7
1.1 凝縮現象研究の歴史と現状	7
1.2 パッシブコントロールの歴史と現状	8
1.3 本研究の背景と目的	9
1.3.1 キャビティ付多孔壁を有するラバルノズル流れにおける凝縮衝撃波のパッシブコントロール	9
1.3.2 スロツェッドノズルを有するラバルノズル流れにおける凝縮衝撃波のパッシブコントロール	9
1.3.3 遷音速流れ場に及ぼす非平衡凝縮の影響とキャビティ付多孔壁を用いた衝撃波の制御	10
1.4 本論文の構成	10
第2章 凝縮現象と理論	11
2.1 概要	11
2.2 超音速ノズル内の凝縮現象	11
2.3 状態量の定義式	12
2.4 凝縮衝撃波	14
2.4.1 凝縮衝撃波の発生	14
2.4.2 非定常凝縮衝撃波による流れ場の振動	15
2.4.3 凝縮の問題点	17
2.5 凝縮の熱力学	19
2.6 均一核生成	21
2.6.1 クラスタ生成	22
2.6.2 臨界クラスター	24
2.6.3 Frenkelの核生成速度式	24
2.7 凝縮粒子の成長	26
2.7.1 クラスタの成長速度式	26
2.7.2 凝縮速度式	28
2.8 凝縮によるエントロピの変化	29
第3章 基礎方程式	34
3.1 2次元方程式	34
3.2 有次元保存形表示方程式	36
3.2.1 有次元方程式	36
3.2.2 ベクトル表示	38
3.3 無次元保存形表示方程式	41
3.3.1 無次元体系	41

3.3.2	無次元方程式	47
3.3.3	ベクトル表示	48
3.3.4	補足関係式の無次元化	49
3.4	座標変換	51
3.4.1	チェイン・ルール	51
3.4.2	一般座標変換 (凝縮無の場合)	53
3.4.3	一般座標変換 (凝縮有の場合)	62
3.5	圧縮性乱流モデルの基礎式	65
3.5.1	レイノルズ平均	65
3.5.2	ファールブル平均	66
3.5.3	基礎方程式の平均化	67
3.5.4	平均化された基礎方程式	72
第4章	数値解法	74
4.1	TVD スキーム	74
4.1.1	スカラー問題	75
4.1.2	システム方程式への拡張	76
4.2	Riemann 問題	83
4.2.1	Riemann 解法	83
4.2.2	Roe の近似 Riemann 解法	84
4.3	Jacobian 行列と固有ベクトル	86
4.3.1	凝縮無の場合	86
4.3.2	凝縮有の場合	88
第5章	乱流モデル	91
5.1	渦粘性モデル	92
5.2	Baldwin-Lomax モデル	96
5.2.1	壁法則 (壁関数)	96
5.2.2	渦粘性係数 (乱流粘性係数) の導出	97
5.2.3	基礎方程式の変形	98
5.3	$k-\epsilon$ モデル	100
5.3.1	低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデル	100
5.3.2	輸送方程式	100
5.3.3	式の最終形	107
5.3.4	固有値と固有ベクトル列	108
5.3.5	初期条件・境界条件	110
第6章	時間積分と計算条件	111
6.1	時間分割法	111
6.2	Δt の計算	112
6.3	境界条件	112
6.4	物性値 (定数)	114
6.5	物性値関係式	117
6.5.1	キャピティ付多孔壁を有するラバルノズル流れ, 及び非平衡凝縮が遷音速流れ場に及ぼす影響の場合	117
6.5.2	スロティッドノズルを有するラバルノズル流れの場合	120
6.5.3	キャピティ付多孔壁を有する遷音速バンプ流れの場合	123

6.6	フローチャートの説明	127
第7章	キャビティ付多孔壁を有するラバルノズル流れに及ぼす非平衡凝縮の影響	129
7.1	定常凝縮衝撃波のパッシブコントロール	129
7.1.1	実験装置と計算条件	129
7.1.2	実験結果との比較	129
7.1.3	凝縮が生じない場合の流れに及ぼす多孔壁の影響	130
7.1.4	パッシブコントロールによる物理量の変化	130
7.1.5	パッシブコントロールの効果	131
7.1.6	衝撃波の強さの変化	131
7.1.7	結論	132
7.2	非定常凝縮衝撃波のパッシブコントロール	133
7.2.1	計算条件	133
7.2.2	実験結果との比較	133
7.2.3	キャビティ付多孔壁の効果	133
7.2.4	パッシブコントロールによる物理量の変化	133
7.2.5	孔の個数が振動に及ぼす影響	134
7.2.6	結論	135
第8章	スロットィッドノズルを有するラバルノズル流れに及ぼす非平衡凝縮の影響	158
8.1	定常凝縮衝撃波のパッシブコントロール	158
8.1.1	実験装置と計算条件	158
8.1.2	実験結果との比較	158
8.1.3	スロット長さの効果	158
8.1.4	物理量の変化	159
8.1.5	スロットィッドノズルの効果を示す模式図	159
8.1.6	結論	159
8.2	非定常凝縮衝撃波のパッシブコントロール	160
8.2.1	計算条件	160
8.2.2	実験結果との比較	160
8.2.3	スロット長さの効果	160
8.2.4	スロット位置の効果	161
8.2.5	物理量の変化	161
8.2.6	全圧損失と乱流エネルギーの変化	162
8.2.7	結論	162
第9章	非平衡凝縮を伴う遷音速バンブ流れ	174
9.1	非平衡凝縮が遷音速流れ場に及ぼす影響	174
9.1.1	実験装置と計算条件	174
9.1.2	流れの可視化と圧力計測	174
9.1.3	壁面上の圧力変動に及ぼす効果	175
9.1.4	衝撃波背後の圧力変動に及ぼす効果	175
9.1.5	数値計算結果と流れ場の全圧損失	176
9.1.6	結論	176
9.2	キャビティ付多孔壁を有する遷音速流れ場における衝撃波の制御	177
9.2.1	計算条件	177
9.2.2	キャビティ位置の影響	177

9.2.3	全圧損失の変化	178
9.2.4	結論	178
第 10 章 結 論		195
謝辞		196
参考文献		197
付 録 A		i
A.1	リーマン境界条件	i
付 録 B		iii
B.1	凝縮に関する諸式	iii
B.1.1	従来 of 式	iii
B.1.2	Schnerr らが使用した式	v
付 録 C		ix
C.1	ウェーブレット解析	ix
C.1.1	ウェーブレット解析 of 応用	ix
C.1.2	ウェーブレット解析 of 特徴	ix
C.1.3	ウェーブレット	x
C.1.4	ウェーブレット変換 of 定義式	x
参考文献 (付録)		xiii

主な記号

変数

- E, F : 数値流束ベクトル (numerical flux)
- E_s : 単位体積当たりの全エネルギー (total energy per unit volume) [J/m³]
- I : 核生成率 (nucleation rate) [1/(m³ · s)]
- I_F : Frenkel 核生成率 (nucleation rate of Frenkel) [1/(m³ · s)]
- J : ヤコビアン (Jacobian)
- L : 潜熱 (latent heat) [J/kg], 代表長さ (characteristic length) [m]
- M : 分子量 (molecular weight) [kg/kmol], マッハ数 (Mach number) [-]
- N_A : アボガドロ数 (Avogadro's number) [1/mol]
- Pr : プラントル数 (Prandtl number) [-]
- Q : SOURCE 項 (source term)
- \Re : ガス定数 (gas constants) [J/(kg · K)]
- R : 曲率半径 (radius of wall curvature) [m]
- Re : レイノルズ数 (Reynolds number) [-]
- R, S : 粘性数値流束ベクトル (viscous term)
- S : 過飽和度 (supersaturation) [-]
- T : 温度 (temperature) [K]
- U : 保存量ベクトル (conservation mass term)
- U, V : 反変速度 (contravariant velocity)
- X : 絶対湿度 (absolute humidity) [%]
- a : 音速 (speed of sound) [m/s]
- c_p : 定圧比熱 (specific heat at constant pressure) [J/(kg · K)]
- c_v : 定容比熱 (specific heat at constant volume) [J/(kg · K)]
- e : 単位体積当たり内部エネルギー (internal energy per unit volume) [J/m³]
- e_s : 単位質量あたりの全エネルギー (total energy per unit mass) [J/kg]
- f : 振動数 (frequency) [Hz]
- g : 凝縮量 (condensate mass fraction) [-]
- h : 比エンタルピー (specific enthalpy) [J/kg]
- k : ボルツマン定数 (Boltzmann constant) [J/K]
- m : 分子 1 個当たりの質量 (mass per molecule)[kg], 質量流量 (mass flow)[kg/s]
- p : 圧力 (pressure) [Pa]
- r : 液滴半径 (droplet radius) [m]
- r_c : 臨界液滴半径 (critical droplet radius) [m]

t	: 時間 (time) [s]
u, v	: Cartesian 座標系速度分布 (Cartesian velocity components) [m/s]
x, y	: Cartesian 座標系 (Cartesian coordinates) [m]
ρ	: 密度 (density) [kg/m ³]
Γ	: 核生成係数 (accommodation coefficient for nucleation)
γ	: 比熱比 (ratio of specific heats) [-]
ω	: 渦度 (vorticity) [/s]
ζ	: 表面張力係数 (coefficient of surface tension)
μ	: 粘性係数 (dynamic viscosity) [Pa · s]
ν	: 動粘性係数 (kinematic viscosity) [(N · s)/kg]
ϕ	: 相对湿度 (specific humidity) [%]
ξ, η	: 一般曲座標系 (general coordinates)
ξ_c	: 凝縮係数 (coefficient of condensation)
λ	: 第2粘性係数 (coefficient of second-viscosity) [Pa · s]
σ	: 表面張力 (surface tension) [N/m]
τ	: せん断応力 (shear stress) [Pa], 特性時間 (characteristic time) [s]

添字

01	: よどみ点 (stagnation point)
0	: 局所 (local point)
a	: 乾き空気 (air)
f	: 凍結 (frozen)
l	: 液相 (liquid)
m	: 混合 (mixed)
v	: 水蒸気 (vapour)
s	: 飽和 (saturation)
w	: 壁面 (wall)
∞	: 無限平面 (plane surface)
—	: 有次元 (dimensional)
*	: 無次元 (non-dimensional)
l	: 層流 (laminar)
t	: 乱流 (turbulence)

以上，本論文で使用する主な記号を示した。その他の記号については本文中で説明する。

第1章 序論

1.1 凝縮現象研究の歴史と現状

湿り空気や水蒸気等の凝縮成分を含む混合気体は、温度が低下すると蒸気の中に小さな液滴が形成される。この現象に対して、これまでに多くの実験的および理論的研究がなされている。ここでは、これら従来の凝縮現象に関する研究を紹介する。

蒸気の凝縮に関する初めての記述は、1887年 Helmholtz に始まると言われている。この凝縮現象が工学的立場から最初に報告されたのは1920年代で Stodola が行った蒸気タービン内の過飽和蒸気の凝縮を伴う流れの実験である⁽¹⁾。

1940年代前後には、工業的な超音速風洞やノズル、蒸気タービンなどの応用が拡大するにしたがって、その中で発生する凝縮現象の研究が本格的に展開され、数多くの実験的、理論的研究がなされた^{(2)~(4)}。その頃、空気力学における流れの高速化に伴い超音速風洞が制作されると、ラバルノズルにより高マッハ数の流れが実現され、始動衝撃波とは別の衝撃波（凝縮衝撃波）が観察された。1942年に、Hermannはこの衝撃波の発生原因が湿り空気中に含まれる水蒸気の凝縮によることを明らかにした⁽⁵⁾。流れの中で凝縮が起こる場合の理論的な取り扱いについては Heybey が加熱を伴う超音速流れの熱力学的扱いを凝縮現象に適用したのが最初であると言われており⁽⁶⁾、凝縮を伴う流れ場の内部構造の詳細については Wegener ら⁽⁷⁾ や Pouring⁽⁸⁾ によるラバルノズル内の湿り空気の凝縮に関する実験によって初めて明らかにされた。

ところで、凝縮核生成率に関する研究の代表的なものとしては、Volmer⁽⁹⁾ や Frenkel⁽¹⁰⁾ による研究があり、核生成過程の理論的研究については、Abraham らによる熱力学的方法で微小クラスターの運動を取り扱った研究がある⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。彼らの行った一連の研究は、現在では古典凝縮理論と呼ばれ、これら早期の凝縮研究のほとんどは、霧箱の中で発生する水蒸気の凝縮に対するものであったが、その後、研究の対象となる凝縮成分も水蒸気から窒素 (N_2)、二酸化炭素 (CO_2) 及びベンゼン (C_6H_6)、クロロホルム ($CHCl_3$)、フロン 11 (CCl_3F)、エタノール (C_2H_5OH) 等の多原子気体に広がっていった⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。

凝縮衝撃波は、定在する定常凝縮衝撃波と、1962年に Schmit によって発見された⁽¹⁵⁾ 時間的位置が変化する非定常凝縮衝撃波に大別され、非定常凝縮衝撃波については超音速風洞やルトピーク管を用いた多くの実験的研究がなされた^{(16)~(19)}。理論的研究では、Barschdorff らの周波数近似計算法⁽²⁰⁾ や、1975年の Saltanov と Tkalenko による一次元基礎方程式の差分法による初めての数値解析等があり⁽²¹⁾、1993年には、White と Young によって初めての二次元計算が行われて大きな飛躍となった⁽²²⁾。それらラバルノズル内の非定常凝縮衝撃波には、末広ノズル領域で発生した凝縮衝撃波が (1) 上流へ伝播しスロートを越え消える形態 (Mode 1) と、(2) スロート近傍で消滅し流れ場が周期的に振動する形態 (Mode 2) に加え、(3) 末広ノズル領域内の狭い領域で衝撃波が消滅せずに振動する形態 (Mode 3) もあり、振動には全部で三形態あることが報告された⁽²³⁾。しかし、ノズル形状やノズル入口状態が、振動の発生範囲、周波数、振幅に及ぼす影響などについてはまだまだ不明な点が多い。

近年では、凝縮現象を解明するための有力な手段としてさまざまな数値シミュレーション手法が開発されている。中でも Schnerr や Young らは、超音速ノズルの中で発生する凝縮現象を検討し^{(24)~(27)}、凝縮衝撃波についても数多くの研究がなされてきている^{(28)~(31)}。

1.2 パッシブコントロールの歴史と現状

近年、大型旅客機やヘリコプターは高速化が進み、それらの翼面上は衝撃波を伴う遷音速流れ場となっている。そのため、これらの遷音速翼の特性に関して、衝撃波による翼面境界層のはく離 (shock induced separation) に起因する全圧損失や衝撃波の振動に伴う翼性能の不安定化などの問題が生じている。

このような衝撃波に関連する諸問題を解決するには、翼面境界層の制御や特殊な翼形の開発が必要であると考えられる。前者の翼面境界層の制御については、(a) 境界層の吸い込み、(b) 境界層への吹き出し、(c) ボルテックスジェネレータ (vortex generator) などを利用する方法が一般的であるが、これらの方法は、境界層のはく離を遅らせることで翼で生ずる全圧損失の低減化をある程度実現することは出来るが、吸い込みや吹き出しではそれを行うのにポンプなどのパワーが必要であり、新たに付加抵抗を生じる。また、ボルテックスジェネレータでは、衝撃波と境界層の干渉に関して新たな問題が生じる。また、特殊な翼形の開発に関しては、遷音速流れ場で衝撃波が発生しない翼形の設計が考えられている。近年のコンピュータおよび数値流体力学解析法の発達によって、現在では衝撃波を伴わない遷音速翼が数多く提案されており、それらは超臨界翼 (supercritical airfoil) と呼ばれている。しかし、超臨界翼においても、その翼形は設計飛行状態に対してのみ適切な形状を与えるもので、オフデザイン状態では通常の遷音速翼と同様な問題を生じる。したがって、今後の超臨界翼には、オフデザイン状態で特別なパワーを要することのない境界層や衝撃波に対する制御法の開発が望まれている。

衝撃波を伴う流れ場の制御法として、アクティブコントロールとパッシブコントロールに大別できる。前者のアクティブコントロールは、前述した、例えばポンプなどを用いるような新たなパワーを必要とするコントロール法である。アクティブコントロールでは、新たな抵抗を生ずるばかりでなく、生産コストの増加や、場合によってはその周辺環境に悪影響を与えることもあり、最良の方法とは言えない場合が多い。後者のパッシブコントロールは、流れ場自体の特性を利用するコントロール法である。例えば、衝撃波の前後では圧力が急激に変化するが、その圧力差を利用して境界層の吸い込みや、境界層への吹き出しを行う方法である。アクティブコントロールと比較して、その効果はやや劣るが、生産コストや環境への配慮を考えると、デメリットよりもメリットの方が多いため制御法といえる。

衝撃波のパッシブコントロール研究は、航空機の高速化に伴ない、遷音速翼上で発生する衝撃波を制御する方法として、航空燃料の高騰が動機となり 1979 年に NASA Langley Reserch Center の D.Bushnell と R.Whithcomb によって提案された。最初の系統的研究は、1980 年から Rensseler Polytechnic Isnstitutue(RPI) で行われた⁽³²⁾⁽³³⁾。これらの技術は NASA と RPI の特許となっており、その後の研究は主としてアメリカ、ドイツ、イギリスで行われている。現在までに遷音速翼に関する研究は、数多く報告されており、研究の主体はモデル実験である⁽³⁴⁾⁽³⁵⁾⁽³⁹⁾。また、二次元翼、三次元翼を用いた実験的研究も行われている^{(36)~(38)}。

このような衝撃波の流れ場へ及ぼす影響を低減するための制御法として、キャビティ付多孔壁やダブルスロットを用いたパッシブコントロールが提案されている⁽³⁹⁾⁽⁴⁰⁾。これらは、衝撃波の発生する位置の壁面にキャビティ付多孔壁やダブルスロットを付けることで、多孔壁やダブルスロット近傍の流動場が変化することを利用し、衝撃波による流れ場への影響を小さくしようとするものである。

最近では、衝撃波と境界層が干渉する流れ場に対していくつかの技術を併用する手法も提案され、衝撃波の圧力勾配の制御等に有効となる可能性があることが示されている⁽⁴²⁾⁽⁴³⁾ (第 9.2 節参照)

また、この衝撃波のパッシブコントロールは、遷音速翼以外で衝撃波を伴う流れ場への適用も研究^{(44)~(46)}されており、本論文でも、超音速流れ場における凝縮衝撃波の制御についての研究結果を含めて述べる。

1.3 本研究の背景と目的

超音速流れ場で水蒸気の凝縮が起こり凝縮衝撃波が発生すると、過飽和度が低い場合には定在するが、過飽和度が高くなると流れ場の振動が発生する。一般に凝縮衝撃波が発生すると流れ場が乱されることになり、適切な超音速ノズル流れを実現する観点および装置の安全性の観点からは好ましくない。しかし、遷音速流れ場に断熱衝撃波が存在する場合には、上流域で凝縮を発生させることによって流れのはく離を抑制し流れ場をコントロールできる可能性がある。

以下に、それぞれの制御方法についてその背景と目的を述べる。

1.3.1 キャビティ付多孔壁を有するラバルノズル流れにおける凝縮衝撃波のパッシブコントロール

衝撃波が流れ場へ及ぼす影響を小さくするための制御法の一つである、キャビティ付多孔壁を用いたパッシブコントロール⁽³⁹⁾⁽⁴⁰⁾は、衝撃波の発生する位置の壁面にキャビティ付多孔壁を設けることで、多孔壁近傍の流動場を変化させ、衝撃波の影響を小さくしようとするものである。

これまで、キャビティ付多孔壁を用いたパッシブコントロールは、主として遷音速翼面上流れ場における衝撃波の制御に利用されているが、凝縮衝撃波に対してはほとんどないのが現状である⁽⁵⁰⁾⁽⁵¹⁾。また、この方法による凝縮衝撃波の制御機構の詳細は不明であり、最適なコントロールを行うためには流れ場の詳細な解明が必要である。

よって本論文では、流れ場で生ずる凝縮衝撃波の強さや全圧損失の低減化のための基礎研究として、キャビティ付多孔壁を用いるパッシブコントロールを円弧ハーフノズル内で生ずる凝縮衝撃波に適用し、凝縮衝撃波特性に及ぼすスリット壁の長さやスリットの個数の影響を数値的に調べ、凝縮衝撃波の強さの変化に及ぼす本コントロール法の効果を明らかにすることを目的とし、凝縮衝撃波がスロート下流域に定在する場合について第 7.1 節で述べる。

次に、ノズル内で非平衡凝縮（水蒸気や湿り空気など比較的潜熱量の大きい凝縮性気体がラバルノズルで急激に加速膨張する場合、流れは過飽和状態になり非平衡凝縮が発生する）が起こると凝縮による潜熱放出の影響で流れの状態が変化し、この潜熱放出量が大きくなるとノズル内に非定常凝縮衝撃波による流れ場の振動が発生する⁽⁶⁾⁽¹⁶⁾⁽¹⁹⁾⁽²⁵⁾⁽²⁶⁾⁽⁴⁹⁾。このような振動現象については、従来多くの実験的・理論的研究がなされている。近年、Schnerrらは、初期過飽和度に対する非定常凝縮衝撃波による流れ場の振動現象は、第 1.1 節で述べた Mode 1 ~ Mode 3 の三つの形態が存在することを明らかにしている⁽²⁴⁾。このような現象は、蒸気タービンの膨張流れなどに関連して問題となっているが、従来は特に Mode 1 についてのみ詳細な研究がなされており^{(17)~(19)}、キャビティ付多孔壁を用いたパッシブコントロールを用いた非定常凝縮衝撃波の制御機構の詳細はほとんど不明である⁽⁵⁵⁾。

よって本論文では、キャビティ付多孔壁を用いるパッシブコントロールを円弧ハーフノズル内で生ずる非定常凝縮衝撃波に適用し、その衝撃波特性に及ぼすキャビティ長さや多孔壁の孔の個数の影響を数値的に示すことで、流れ場の変化の様子を明らかにする。つまり、Mode 1 ~ Mode 3 の非定常凝縮衝撃波を対象として、キャビティ付多孔壁の設置が非定常凝縮衝撃波に及ぼす効果を明らかにするとともに、Mode 1 の場合について孔の個数が流れ場に及ぼす影響について第 7.2 節で考察する。なお、非定常凝縮衝撃波による流れ場の振動に関するメカニズムについては、第 2.4.2 節を参照のこと。

1.3.2 スロット付ノズルを有するラバルノズル流れにおける凝縮衝撃波のパッシブコントロール

凝縮衝撃波の制御機構から、キャビティ付多孔壁以外でもその制御は可能であると考えられ、例えばダブルスロットも有効な手段になりうると思われる。本論文では、円弧ハーフノズルのスロート下流域に凝縮衝撃波が定在する流れ（定常凝縮衝撃波）を対象とし、ノズル壁面上に取り付けたダブル

スロット(以後、スロットィッドノズルと呼ぶ)が凝縮衝撃波特性に及ぼす影響を実験および数値的に調べ、その効果を明らかにすることを目的として、第 8.1 節で述べる。

また、一様流中に置かれた翼面上での衝撃波を伴う遷音速流れ場で生ずる凝縮現象に関しては、最近、Schnerrら⁽²⁶⁾や入屋ら⁽⁶⁵⁾が、凝縮が翼の抵抗や揚力に及ぼす影響や衝撃波の強さに及ぼす影響を数値的に明らかにしている。しかしながら、凝縮現象が壁面上の衝撃波や衝撃波背後の乱れに及ぼす影響については、翼面上でのバフエットによる振動現象などと関連性があるにも関わらず、これらに関する研究はほとんどなされていないのが現状である。

そこで、円弧ハーフノズルのスロート下流域で発生した凝縮衝撃波がスロートを経て上流へ伝播し周期的に流れ場が振動する流れを対象として、ノズル壁面上に取り付けたスロットィッドノズルが非定常凝縮衝撃波特性にどのような影響を及ぼすかを数値的に調べ、その効果を明らかにすることを目的に第 8.2 節で述べる。

1.3.3 遷音速流れ場に及ぼす非平衡凝縮の影響とキャビティ付多孔壁を用いた衝撃波の制御

本論文で対象とする現象は、衝撃波の上流域で非平衡凝縮を発生させ、その効果により衝撃波への流入マッハ数を減少させることで境界層のはく離を抑制するとともに、凝縮により発生する微小液滴により流れ場の振動現象を抑制しようとするものである。凝縮が生ずると全圧損失⁽⁶⁾が生じ新たな流体抗力となる可能性はあるが、現在までに本現象に関する詳細な研究はなされていない。

よって、湿り空気が円弧バンプモデルで膨張した場合に生ずる遷音速流れ場に関し、モデル曲面壁上に局所的に発生する衝撃波の特性に及ぼす非平衡凝縮の影響を、実験と数値計算により明らかにすることを目的に第 9.1 節で述べる。

また、バンプモデル上で局所的に発生する衝撃波に対し、キャビティ付多孔壁を利用したパッシブコントロールと衝撃波上流の超音速領域で発生させる非平衡凝縮とを併用することで、衝撃波を含む遷音速流れ場の制御の可能性を明らかにすることを目的として第 9.2 節で述べる。なお、本研究では実験を行う際の予備的研究として、本手法が衝撃波と境界層の干渉場に及ぼす影響を数値的に検討した。

1.4 本論文の構成

本論文は、第 1 章から第 10 章までの各章で構成されている。

第 1 章は、序論として本論文の目的等を述べる。

第 2 章では、凝縮現象について説明する。

第 3 章から第 5 章までは、数値計算について説明する。

第 5 章の乱流モデルでは、Baldwin-Lomax モデル、 $k-\epsilon$ モデルを説明する。

第 6 章では計算条件を示している。

本論文における凝縮に関する計算式は、改良に伴い複数のパターンを採用しているため、計算対象ごとに分けてまとめた。

第 7 章から第 9 章には、それぞれのケースごとに研究の結果と考察を示す。

第 10 章では、結論として、第 7 章から第 9 章の結果をまとめた形で述べる。

図は、各章ごとに章末に掲載した。

第2章 凝縮現象と理論

2.1 概要

本章では、凝縮性気体が、超音速ノズルで急速に加速膨張する際に生ずる凝縮現象の概略と、古典凝縮理論に基づく均一核生成理論および凝縮粒子の成長論について述べる。また、今回の研究で用いた水蒸気と空気の物性値とその混合気体の物性値の導出方法について示す。本論文で用いた物性値等については、各ケースによって異なる値を採用したため、それぞれについて分けた形で示した。

核生成理論に関しては、古典凝縮理論に基づく、もっとも代表的な式の一つである Frenkel の式⁽¹⁰⁾について詳しく述べる。

2.2 超音速ノズル内の凝縮現象

本節では、超音速ノズル内で生じる凝縮現象⁽⁷⁵⁾について概説する。

Fig.2.1(a) に凝縮過程をあらわす $p-v$ 線図を、同じく Fig.2.1(b) に $T-s$ 線図を示す。(a) の横軸は比体積 v を縦軸は圧力 p を表わし、(b) の横軸は比エントロピー s を縦軸は温度 T を表わしている。さらに、Fig.2.2 に超音速ノズル内の凝縮過程を表わす概略図を示す。下図の横軸はノズル軸上における位置、縦軸は圧力 p を表わしている。なお、この Fig.2.1, Fig.2.2 の二つの図中における表記は共通である。

過熱蒸気がノズルなどで膨張冷却される場合を考える。Fig.2.1, Fig.2.2 の初期状態 a において圧力 p_{01} 、温度 T_{01} の過熱蒸気は、断熱膨張され飽和圧力 p_s 、飽和温度 T_s まで、曲線 $abcd$ (等エントロピー膨張線) に沿って膨張する。もし膨張に伴う冷却速度が極めて緩やかならば、気体は、点 b において凝縮を始め、平衡凝縮過程を表わす曲線 be (飽和状態で凝縮が進行する状態で、熱力学的平衡が保たれる等エントロピー膨張線) に沿って膨張する。平衡凝縮過程は、初期状態である点 a において、流れの中にイオン、チリなどの固体微粒子、あるいは他成分の液滴などの不純物が非常に多く存在し、これを核として凝縮が進行していく場合では、冷却速度が速くても起こる場合がある。このような凝縮は非均一凝縮 (heterogeneous condensation) と呼ばれている。液滴や二酸化炭素を含んだ窒素ガスや空気の極超音速風洞での凝縮過程は、上述したような凝縮とよく一致していることが示されている。

しかしながら、超音速ノズルを用いた膨張流れのように冷却速度が極めて速く、流れの局所熱力学状態に対応した凝縮現象を起こすのに要する時間が流れの特性時間に比べて長い場合は、点 b 間で膨張した気体そのまましばらくは、凝縮を生じることなく、曲線 bd (凝縮が起こらない場合の等エントロピー膨張線) に沿って進行する。すなわち、相変化を起こすことなく、液相あるいは固相領域に入ることになる。この状態が過飽和状態 (superstaturated state) (過冷却状態ともいう) である。

過飽和状態にある気体は、極めて不安定な状態にあるので、流れ場に、チリのような微粒子が存在する場合には、それを核として凝縮し (非均一凝縮)、より安定な状態へ遷移する。

一方、流れ場に、そのような微粒子が存在しない場合では、僅かな擾乱により凝縮が発生する。この場合、膨張過程で過飽和度がある点 (点 c) に達した時、気体分子自身の衝突合体によって生じるクラスター (液相分子集合体) を凝縮核 (condensation nucleus) として、その周りに蒸気分子が凝縮することによって凝縮が進行する。このような凝縮を均一凝縮 (homogeneous condensation) あるいは

は自己凝縮 (spontaneous condensation) という。この凝縮はエントロピーの増加を伴う熱力学的平衡が保たれない非平衡凝縮である。したがって、均一凝縮の始まりとともに、流れは、等エントロピー膨張 (abcd) より離れ始め、曲線 cg に沿って変化する。このことは、凝縮潜熱の放出によって、超音速ノズル内の圧力・温度が等エントロピー膨張線から上昇することを意味する。その後、非平衡凝縮が終了すると、凝縮核の成長により凝縮は進行するが、エントロピーは一定に保たれ先に説明した等エントロピー膨張線とは、別の等エントロピー膨張線 (初期状態よりも大きなエントロピーを持つ平衡凝縮過程を表わす等エントロピー膨張線) に沿って、再び膨張し始める。上述の均一凝縮は、一般的に Willson の霧箱や超音速風洞、液体金属 MHD 発電機および蒸気タービン内の流れなど、人工的に実現される湿り空気や水蒸気などの凝縮現象において観察される。

また、自然界で起こる多くの凝縮現象、例えば窓ガラスに付着する水滴や雲の発生などは、上述の膨張冷却によるものではなく、緩やかに等圧冷却され飽和状態に達した際 (飽和蒸気線上に達した際) に凝縮する場合に相当する。

2.3 状態量の定義式

本研究では、凝縮性気体として湿り空気 (乾き空気と水蒸気の混合気体) を用いている。湿り空気が膨張冷却される際に、凝縮が起こるのは含まれている水蒸気である。そこで本節では、水蒸気に対する用語をはじめこの作動気体の凝縮現象を論じる場合に良く用いる用語、及び状態量の定義式⁽⁷⁵⁾ について、Fig.2.3 に示す水蒸気の $p - T$ 線図を参考にして以下に説明する。

Fig.2.3 の横軸は温度 T 、縦軸は圧力 p を示しており、点 1, 3 を通る曲線 C_2 は、蒸気圧曲線、点 01, 1, 2 を通る曲線 C_1 は等エントロピー膨張線を示している。なお、曲線 C_2 の右側の領域は蒸気 (気相、水蒸気)、左側の領域は液体 (液相、水) の状態を示す。

初期状態である点 01 における湿り空気の状態を示すパラメータとして、相対湿度 (relative humidity) ϕ_{01} が用いられる。これは、水蒸気の分圧 p_{v01} と、そのときの温度 T_{01} における水蒸気の飽和蒸気圧 $p_{s01}(T_{01})$ の比を示しており、次式のように表される。

$$\phi_{01} = \frac{p_{v01}}{p_{s01}(T_{01})} \times 100(\%) \quad (2.1)$$

したがって、湿り空気の圧力 p_{01} は、乾き空気の分圧を p_{a01} とすれば、

$$p_{01} = p_{a01} + p_{v01} = p_{a01} + \phi_{01} p_{s01} \quad (2.2)$$

また、湿り空気の任意の体積中に含まれる蒸気の量を表すパラメータとして、絶対湿度 (absolute humidity) X と比湿 (specific humidity) ω がある。そこで、絶対湿度 X は水蒸気の質量流量 m_v と乾き空気の質量流量 m_a の比であり、比湿 ω は、水蒸気の質量流量 m_v と、乾き空気と水蒸気の質量流量の和、との比で次式のようになる。

$$X = \frac{m_v}{m_a} \quad (2.3)$$

$$\omega = \frac{m_v}{m_v + m_a} \quad (2.4)$$

通常、湿り空気の場合には、初期状態の比湿 ω_{01} は、1 より小さくなる。

膨張冷却が、初期状態の点 01 から曲線 C_1 に沿って進行すると、流れは飽和蒸気圧曲線を越え過飽和の状態になる。この状態を、すなわち過飽和の程度を表す物理量として、過飽和度 S (degree of supersaturation, supersaturation) と過冷却度 ΔT_c (supercooling, degree of supercooling) がある。そ

ここで、曲線 C_1 上の過飽和状態である点 2 での過飽和度 S_2 は、その点の蒸気圧 p_{v2} とそのときの温度 T_2 における飽和蒸気圧 p_{s2} との比となり、次式のようになる。

$$S_2 = \frac{p_{v2}}{p_{s2}(T_2)} \quad (2.5)$$

一般に過飽和度は、過飽和状態 (Fig.2.3 の $b \sim c$) では 1 より大きく、飽和蒸気線、及び飽和状態の等エントロピ曲線 (Fig.2.3 の $g \sim h$) 上では 1 に等しい。本論文では、湿り空気の場合の初期状態を表す量として、初期過飽和度 $S_{01} = p_{v01}/p_{s01} (= \phi_{01}/100)$ を用いている。これは、過飽和度という用語が、湿り空気の場合、一般的に用いられているということ considering して使用した。

また、点 2 での過冷却度は、蒸気圧 p_{v2} に対する飽和温度 T_{s3} とその点での温度 T_2 との差となり次式のようになる。

$$\Delta T_c = T_{s3} - T_2 \quad (2.6)$$

湿り空気の状態量を表す量として、相対湿度を示したが、作動気体が水蒸気のみの場合の初期状態を表す量として過熱度 ΔT (degree of superheat) があり、次式のようになる。

$$\Delta T = T_{01} - T_{s01} \quad (2.7)$$

一方、点 3 で凝縮が起こると、液相が形成されその質量流量が増加していくが、そのときの液相の割合を表すものとして、液相の質量比 (凝縮量, Condensate mass fraction) g がある。ここで、液相の質量流量を m_l 、全質量流量を m とすると、凝縮量 g は次式のようになる。ここで全質量流量 m とは、密度 ρ の流体が、速度 u である断面積 A を通過する単位時間当たりの質量 ($\rho u A$) で、作動気体が凝縮を伴う湿り空気より、乾き空気 $m_a = \rho_a u_a A$ と水蒸気 $m_v = \rho_v u_v A$ と液滴 $m_l = \rho_l u_l A$ の混合流体の全質量流量 ($m = m_a + m_v + m_l$) となる。

$$g = \frac{m_l}{m} \quad (2.8)$$

また、この凝縮量は初期状態に液相が全くない場合 ($m_{l01} = 0$) では、凝縮がどんなに進行しても初期比湿 ω_{01} を越える事はありえない。

$$g \leq \omega_{01} = \frac{m_{v01}}{m_{01}}$$

2.4 凝縮衝撃波

2.4.1 凝縮衝撃波の発生

前節で述べた様に超音速ノズル内で凝縮が発生した際の、静圧分布を簡単に示すと Fig2.2 のようになる。Fig2.2 の縦軸は静圧 p を示し、横軸はノズルの距離 x を示す。超音速ノズルで凝縮性気体が急激に膨張冷却され静圧は、等エントロピー線に沿って変化する。通常、スロートを越え少し下流の末広ノズル部の c 点で凝縮が開始される。この点を凝縮開始点 (Onset of condensation) という。一般に、蒸気の過飽和の限界点は、ウィルソン点 (Wilson point) とよばれる。凝縮が始まると潜熱 (latent heat) の放出により気体は過熱され等エントロピー線から逸れ静圧が上昇する。点 g で極大となり、この点で非平衡凝縮が終了する。この c ~ g の区間を凝縮領域¹ (condensation zone) と呼ぶ。その下流では、凝縮核の生成は行われぬが、上流で生成された凝縮核や液滴に蒸気分子が凝縮し、飽和状態で平衡凝縮しつつ膨張を続ける。

ここで、凝縮によって生じた液相の質量は気相の質量に比べて十分に小さく、液相と気相の速度差や温度差がないと仮定し、凝縮の効果として放出される潜熱のみを考えると、凝縮は燃焼による過熱流れとまったく同様に取り扱う事が出来る。更に、凝縮領域の流れ方向の長さは比較的短いので、この間の断面積変化を無視し凝縮領域を一種の不連続面 (凝縮面) と考えると凝縮による状態変化は断面積一定の加熱流れ、つまり、加熱のレイリー流れ (Reyleigh flow) が適応できる。この加熱のレイリー流れによる物理量の変化は以下の Table 2.1 で示される。

Table.2.1 Reyleigh flow

Parameter		Heating	
		Subsonic $Ma < 1$	Supersonic $Ma > 1$
Velocity	u	increase	decrease
Mach number	Ma	increase	decrease
Static pressure	p	decrease	increase
Density	ρ	decrease	increase
Static temperature	T	$\left\{ \begin{array}{l} M < \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{ increase} \\ M > \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{ decrease} \end{array} \right.$	increase
Total pressure	p_0	decrease	decrease
Total temperature	T_0	increase	increase

この表から分かるように、超音速流れでの加熱現象は、圧力増加や速度低下を起こす。この圧力増加や速度低下の大きさは加熱量に関する。Fig.2.4 は凝縮による潜熱放出を伴う次元超音速ノズル内流れの模式的なマッハ数分布を示す。縦軸はマッハ数 Ma を示し、横軸はノズルの距離 x を示す。図中の Q と Q_{cr} は、それぞれ凝縮による潜熱放出量と流れのサーマルチョ - キング² (thermal choking, 熱閉そく) に必要な熱量を示す。なお、 Q_{cr} は一定でなく、マッハ数が小さいほど Q_{cr} は小さくなる。

まず、凝縮が全く起こらない等エントロピー膨張の場合、曲線 af に沿って変化する。ノズル入口の過飽和度を徐々に大きくする (相対湿度を徐々に大きくする) と、凝縮がノズルスロート a 点を越え

¹ 凝縮領域 … 一般に (理論計算では) 過飽和度の最大となる点を凝縮開始点とし、核生成率が 0 となる点を非平衡凝縮の終了点とする。しかしながら、この凝縮領域と静圧変化からの凝縮領域がほぼ一致する事から本文のようにも定義が行われる。⁽⁷⁹⁾

² サーマルチョ - キング … 亜音速流れでも超音速流れでも、加熱されるとマッハ数は 1 に近づき、加熱量が多いと $Ma = 1$ の臨界状態になることを言う。加熱によるチョ - キング (choking due to heating)。

た下流で発生する。凝縮領域内で流路面積の拡大によるマッハ数の増加より潜熱放出によるマッハ数の減少の効果が大きくなると、Fig.2.4の曲線 aepg に示す様にマッハ数が減少する。しかし $Q < Q_{cr}$ では、サーマルチョーキングは起こらない。このような場合は、凝縮による発生した弱い擾乱が流れ場に見られる。さらにノズル入口の過飽和度が徐々に大きくなると、凝縮開始点はスロートへ近づき、ある過飽和度のとき $Q = Q_{cr}$ となる。この場合のマッハ数分布は曲線 adoh で示される。すなわち、点 o でサーマルチョーキングが起こり、この点で臨界状態となる。過飽和度がさらに大きくなり、 $Q > Q_{cr}$ では、流れの調整のため凝縮領域内に衝撃波 mn が形成され、マッハ数分布は曲線 acmni のようになる。この衝撃波のすぐ下流では亜音速であるが、潜熱放出によるマッハ数の増加の効果が流路面積の拡大によるマッハ数の減少の効果より大きいため、マッハ数は増加し、流れは再び超音速となる。このように凝縮により発生する衝撃波を凝縮衝撃波⁽¹⁹⁾⁽⁷⁵⁾⁽⁷⁶⁾(condensation shock wave)と呼ぶ。

ここで、“凝縮衝撃波，condensation shock”という言葉は、凝縮現象を取り扱う論文などにおいて用いられているが、上述の意味と必ずしも同一ではない。これと類似の内容を意味する言葉として、英語では condensation jump, condensation discontinuity, condensation wave 等があり、日本語でも凝縮衝撃(波)、復水衝撃(波)等がある。さらに意味も著書あるいは論文において必ずしも同一ではない。凝縮衝撃波を伴わない凝縮による圧力上昇が、通常のラバルノズルにおいて衝撃波が存在するときの衝撃波による圧力上昇の分布と良く似ているという理由からこの圧力上昇を(衝撃波は見られない場合に関わらず)凝縮衝撃波と呼んでいる論文がかなり見られる。しかし、衝撃波を伴う凝縮の場合の衝撃波のみを凝縮衝撃波と呼ぶ論文もかなり多くある。本論文においては後者の定義が最も妥当であると考えられるため、この定義に従って凝縮衝撃波との言葉を使用する。

Fig.2.4の曲線 acmni に示すように、衝撃波が形成される位置(点 m)におけるマッハ数勾配 (dMa/dx) が負の場合、潜熱放出による加熱の効果が増加しても、より強い衝撃波が形成され、流れ場が調整される。しかし、過飽和度がかなり大きくなり、曲線 abklj に示す様にマッハ数勾配 dMa/dx が 0 となる点 k に衝撃波が形成される場合には、それ以上加熱の効果が大きくなると、より強い衝撃波が凝縮領域内に安定して存在する位置はない。したがって、 $dMa/dx = 0$ となる点に衝撃波が形成される場合を境として、それ以上 Q が増加すると、流れの調整のため衝撃波が上流側に伝播し、ノズル内に振動が発生する。

2.4.2 非定常凝縮衝撃波による流れ場の振動

前節で述べたようなノズル内に振動が起こる場合を考える。かなりノズル入口の過飽和度が大きい場合、潜熱の放出量が大きく、凝縮衝撃波が凝縮領域内に安定して存在できる位置が無い。そこで凝縮衝撃波(圧縮波)は上流側に伝播を開始する。衝撃波の下流では衝撃波により温度が上げられて下流で発生した圧縮波が加速され、その合体により衝撃波が増す。この衝撃波が上流側へ伝播することで、その下流では凝縮しにくくなる。このため凝縮領域内は潜熱放出量が減少し、下流域での放出熱量の時間変化 dQ/dt が負となる。その結果、下流域で膨張波が発生する。一方、上流へ伝播する衝撃波はこの膨張波と干渉し減速され、更に、スロート上流へ伝播すると流路面積の拡大効果により減衰する。減速され弱まった衝撃波と膨張波の影響で下流域では、温度が下がり再び凝縮しやすくなり、 dQ/dt が正となる。その結果圧縮波が発生し、この圧縮波の合体により衝撃波が形成され、上流へ伝播する。

このように衝撃波と膨張波の発生と上流側への伝播が交互に繰り返され、ノズル内の流れが振動⁽¹⁹⁾する。この振動の1サイクルをまとめると、Fig. 2.5 のようになり、1サイクルは次の四つの過程より成立つと考えられる。

- (1) 凝縮に伴う潜熱放出量の増加
- (2) 衝撃波の発生と上流側への伝播

- (3) 凝縮に伴う潜熱放出量の減少
- (4) 膨張波の発生と上流側への伝播

これまでは、最も単純な一次元の超音速ノズルにおける凝縮衝撃波の振動について説明を行った。二次元の超音速ノズルの場合では、凝縮衝撃波に二次元性の影響が現れる。序論で述べたように、現在、主に振動形態には次の三通りあることが分かっている。⁽²³⁾

Mode 1： 下流で生じた凝縮衝撃波がスロートを越え上流側へ伝ばし、流れが周期的に振動する場合。

Mode 2： スロート下流域で発生した凝縮衝撃波が上流側へ伝ばしスロート近傍で消滅し、流れが周期的に振動する場合。

Mode 3： 凝縮衝撃波がスロート下流の狭い領域で周期的に振動する場合。

定常な凝縮衝撃波が存在する場合の初期過飽和度から、初期過飽和度を徐々に高くするとまず、初めに Mode 3 の振動が開始される。定常から非定常な衝撃波に変化した直後の振動は、垂直な衝撃波がかなり狭い領域で前後に振動する形態となる（完全なる Mode 3）。初期過飽和度を徐々に高くすると、振動の周波数が減少し始め、振動する領域が広がっていく。上流側に減衰しながら伝播し下流側で衝撃波が発生する。しかし、上流側へ伝播した衝撃波（圧縮波の状態）が完全に消滅せず下流側へ伝播し強さを強める。下流側で発生した衝撃波は消滅する。再び上流側へ伝播し現象を繰り返す（Mode 3 から Mode 2 の過渡現象）。さらに初期過飽和度を高くすると、上流へ伝播した衝撃波が完全に消滅し、下流で発生した衝撃波が上流側へ伝播する。このように発生・消滅が流れ場に現れ、周期的に振動する。ただし、衝撃波の上流側への伝播はスロートを越えず、物理量が変化する領域も末広ノズル部のみとなる（Mode 2）。さらに初期過飽和度を高めると、衝撃波の上流側への伝播がスロート越え先細ノズルに及ぶ。従って物理量が変化する領域がノズル全体となる（Mode 1）。振動周波数は Mode 1 の場合、初期過飽和度の増加に比例する。つまり、Mode 2 から Mode 1 に変化する時の周波数が最も最小の周波数となる。

また、実際に使用される三次元ノズル（翼列）での振動形態では更に複雑になることが予想され、今後の研究が必要であろう。

2.4.3 凝縮の問題点

ここでは、凝縮衝撃波による問題点だけでなく、凝縮現象による問題点⁽⁷⁷⁾を述べる。一般に流れ場で凝縮が発生すると、それに起因する多くの問題が生じ、その解明と克服は、工業上重要な課題である。本研究は高速流であり、高速流となる蒸気タービンと超音速風洞における問題点について簡単に述べる。

蒸気タービンにおける問題点

蒸気タービンにおける凝縮問題は、タービン通過路において、一般に湿り損失と呼ばれるエネルギー損失が発生し、タービン性能が低下することと、凝縮の結果生じる水滴によるエロージョンに大別される。

蒸気タービンで凝縮が起こると、その時点で湿り損失が発生する。凝縮開始点近傍では、 $1\mu\text{m}$ 以下の微小水滴が発生し、潜熱放出量が多いと凝縮衝撃波も発生する。その微小水滴は下流に流れるに従いその粒径が増加する。この水滴の大部分は下流の動翼や静翼に衝突しないでタービン外に放出されるが、全体の約20~30%は静翼の腹面側に付着し厚さ $100\mu\text{m}$ オーダーの水膜を形成する。これにより湿り損失は増大する。

静翼に付着した水膜は、蒸气流から受ける力や水膜と翼表面間の摩擦力により移動する。しかし、静翼の後縁でそれらは集積され、最終的には数 $100\sim$ 数 $1,000\mu\text{m}$ の粗大水滴となって下流側へ放出される。この現象は“primary atomization”(第一次霧吹作用)と呼ばれる。この粗大水滴の放出は連続的に行われるのではなく、ある周期をもって間欠的に行われる。後縁より放出された粗大水滴のうち、ある直径以上のものは水滴を球に保持しようとする表面張力が蒸气流の慣性力に抗しきれず、動翼流入前に数 $10\sim$ 数 $100\mu\text{m}$ の水滴に微細化される。この現象を“secondary atomization”(第二次霧吹作用)と呼ぶ。secondary atomizationで微細化された水滴はあまり加速されないまま動翼に入るため動翼上から見た相対速度は周速度と同じ程度の速い速度となる。そのため、水滴は動翼の前縁近傍に衝突して、湿り損失とエロージョン(動翼損傷)の原因となる。なお動翼上でも水膜が形成され、静翼の場合とは異なり遠心力やコリオリ力³の影響を受け湿り損失を増大させる。

湿り損失

蒸気の流れにおいて湿りに起因する損失を湿り損失と称する。これは、主に次のように分類される。

(1) 熱力学的損失：これは蒸気が水滴に凝縮する際に生じるもので、水滴に発生する過程では、水滴と蒸気の間で不可逆的に潜熱の授受が行われるため、エントロピーが増大する。

(2) 加速損失：静翼と動翼より放出された速度の遅い粗大水滴が、飛行中に高速の蒸気相に加速されるため、蒸気自身はこの加速のためにエネルギーを消費する。従って、この損失は、水滴界面に発生する剪断力、すなわち気液二相間の摩擦が原因となる。

(3) 動翼の制動損失：動翼前縁の背面側に水滴が衝突し、動翼が回転方向と逆の制動力を受けるために生ずる損失である。この損失は、上記の加速損失と関連が深い。水滴が加速されれば加速損失は増大するが、動翼に衝突する水滴の相対速度が減少するため制動損失は減少する。このように両損失は相互関係がある。

(4) 動翼の遠心作用による損失：動翼面上の水膜や水滴は遠心力のために翼先端方向へ移動するが、このために動翼が行う仕事が損失となる。

(5) 水膜によるプロファイル損失：翼表面に付着した水膜と翼表面との間の摩擦や水膜表面に発生する波のために蒸気相のエネルギーが消費されることによる損失。

³ コリオリ力…回転運動をしている座標系に対して運動する物体に働く見かけ上の力の一つ。その物体の速度の大きさに比例し、速度の向きに垂直に働く。転向力。

(6) その他の損失：粗大液滴が微細化する際 (secondary atomization) の損失や速度を持った水滴がタービンの静止部に衝突して運動エネルギーを失うことによる損失などがある。

以上の湿り損失により、タービン効率は低下する。湿り度⁴が9%の時では効率が約8%低下すると実験的に報告されている。このことから、湿り損失を小さくする事がいかに重要であるかわかる。

湿り損失を減少させるには、原理的には水滴の発生を抑制したり、発生した水滴をできるだけ除去することが必要である。これにはタービンサイクルとして湿り度を減らす事や、高圧タービン出口にドレンセパレータ及びヒーターを設置する事が考えられる。また、静翼の後縁付近から水膜を吸込むか、あるいは吹出しを行う方法も提案されている。しかし、現時点では、何れの方法も根本的には湿り損失除去の対策とは言い難く、今後の研究が望まれる。

エロージョン

蒸気タービンの最終段動翼では、特にその先端背面前縁部が必ずといって良い程侵食される。侵食された表面はザラザラした状態で、翼先端部が破損することもある。これは凝縮により発生・成長した液滴が動翼に衝突するため発生するものである。このようなエロージョンの程度は、一般にタービン出口の湿り度が大きい程、また動翼の周速度が高いほど著しい。

エロージョン防止の方法としては、動翼前縁部を焼き入れ硬化したり、前縁部にステライトなどの耐侵食性に優れた材料を溶接あるいは溶射する方法がある。これが現在最も広く用いられており、この方法で侵食量がかなり減少される。また、水滴を除去するため、前述したように、静翼後縁付近で吸い込みを行うことで大きな水滴の発生を防いだり、ドレンキャッチャーをケーシングに設け、これを低圧側と接続する(吸い込み)方法がある。

以上述べた方法の他にもエロージョン対策として数々の方法が提案・実用化されている、実機では、更にそれらを併用して使用しているが、いずれも完全な方法ではなく、今後の研究が望まれる。

超音速風洞おける問題点

超音速風洞で、作動気体に湿分が含まれている場合凝縮が発生する。そのため測定部の流れが一様でなくなる。また、流れの全圧損失も生じる。潜熱放出量が多いと凝縮衝撃波も発生し、衝撃波との干渉で境界層が剥離することもあり、損失は増大する。また、凝縮衝撃波が振動する事による騒音、振動問題も起こる。これら凝縮衝撃波の問題は、蒸気タービンにおいても発生しうる。

凝縮を起こさせない為には、シリカゲルなど乾燥剤を用いて作動気体の水分を極力減少させたり、よどみ温度を高くし、気体温度が作動中に凝縮開始点まで低下しないようにする方法がある。その他、ヨウ化銀 (AgI) など無機煙を流れに添加して凝縮開始点を遅らせる方法や、超音速ノズル部の上流側に補助ノズルを設け、そこで凝縮を先に起こさせる方法などがある。

⁴ 湿り度 … 湿り蒸気に対する飽和液の質量比。 $m_l / (m_v + m_l)$ 。

2.5 凝縮の熱力学

凝縮性気体の凝縮現象において重要な特徴は、凝縮による凝縮潜熱の放出であり、それによる状態量の変化である。そこで、本節では、作動気体として湿り空気のような凝縮性気体を使用する場合の状態方程式などの基本的な関係式⁽⁷⁸⁾について説明する。

ここで、式の説明にあたり以下の仮定を用いる。

- (1) 粘性や熱伝導および拡散の原因となる分子輸送⁵の効果は無視される。
- (2) 空気や水蒸気の各成分気体は、熱的⁶に熱量的⁷に完全である。
- (3) 凝縮によって発生する液滴の体積は、全体の体積に比べ極めて小さく無視できる。
- (4) 液相(液滴)と気相の間に速度差はない。

[混合気体・凝縮なし]

まず、混合気体(湿り空気)の圧力を考える！混合気体の圧力(全圧)は、その各成分気体の圧力(分圧)の和に等しい」とのダルトンの法則(Dalton's law)より、

$$p = p_a + p_v \quad (2.9)$$

ここで各分圧は、検査体積 V に含まれる乾き空気、および水蒸気(気相)の質量は m_a, m_v であるから、各気体の分圧に対する状態方程式は次のようになる。

$$p_a = \frac{m_a}{V} \frac{\mathfrak{R}_{\text{uni}}}{M_a} T, \quad p_v = \frac{m_v}{V} \frac{\mathfrak{R}_{\text{uni}}}{M_v} T$$

よって、

$$p = \left(\frac{m_a/V}{M_a} + \frac{m_v/V}{M_v} \right) \mathfrak{R}_{\text{uni}} T \quad (2.10)$$

ここで、 $\mathfrak{R}_{\text{uni}}$ は一般ガス定数である。

次に混合気体の分子量 M_m を導入し、混合気体の状態方程式を考える。気体の状態方程式のため、ここでは気相のみを考え液相を考えない。ゆえに混合気体の質量が $m = m_a + m_v$ となる。

$$p = \frac{m}{V} \frac{\mathfrak{R}_{\text{uni}}}{M_m} T = \left(\frac{m_a}{V} + \frac{m_v}{V} \right) \frac{\mathfrak{R}_{\text{uni}}}{M_m} T \quad (2.11)$$

Eq(2.10)とEq(2.11)より、 $1/M_m$ は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_a}{V} + \frac{m_v}{V} \right) \frac{1}{M_m} &= \frac{m_a/V}{M_a} + \frac{m_v/V}{M_v} \\ (m_a + m_v) \frac{1}{M_m} &= \frac{m_a}{M_a} + \frac{m_v}{M_v} \\ \frac{1}{M_m} &= \frac{m_a}{m_a + m_v} \frac{1}{M_a} + \frac{m_v}{m_a + m_v} \frac{1}{M_v} \end{aligned} \quad (2.12)$$

これより混合気体の圧力を求める。比湿Eq(2.4)を用いるとEq(2.12)は、

$$\frac{1}{M_m} = \left(1 - \frac{m_v}{m_a + m_v} \right) \frac{1}{M_a} + \frac{m_v}{m_a + v} \frac{1}{M_v}$$

⁵ 分子輸送 (Molecular transport)・・・分子の運動を考え、分子の運動量輸送から粘性、エネルギー輸送から熱伝導、質量輸送から拡散を求めることができる。

⁶ 熱的完全気体 (thermally perfect gas)・・・気体の状態方程式が成立

⁷ 熱量的完全気体 (calorically perfect gas)・・・比熱 c_p, c_v が常に一定である

$$\frac{1}{M_m} = (1 - \omega) \frac{1}{M_a} + \omega \frac{1}{M_v}$$

したがって、これを Eq(2.11) 代入し、混合気体の圧力求める。

$$p = \rho_m \left((1 - \omega) \frac{1}{M_a} + \omega \frac{1}{M_v} \right) \mathfrak{R}_{\text{uni}} T \quad (2.13)$$

これが、混合気体の状態方程式となる。

また、本研究ではマッハ数を求める際の音速として、次式で示す等エントロピ (平衡流れ) の関係式より音速 a を求める。ここで理想気体を考え、 c_p は一定の $c_p = c_{p01}$ となりこの関係を用いる。ここで \mathfrak{R} は、混合気体のガス定数であり、 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{\text{uni}}/M_m$ となる。

$$a = \left(\gamma \frac{p}{\rho_m} \right)^{1/2} = \left(\frac{c_{p01}}{c_{p01} - \mathfrak{R}} \frac{p}{\rho_m} \right)^{1/2} = \left(\frac{c_{p01}}{c_{p01} - \frac{\mathfrak{R}_{\text{uni}}}{M_m}} \frac{p}{\rho_m} \right)^{1/2} \quad (2.14)$$

よって流れのマッハ数 M は、次式で定義される。

$$M = \frac{u}{a} \quad (2.15)$$

[混合気体・凝縮あり]

では次に、凝縮が発生し液滴 (液相) が存在する場合の式を考えて行く。したがって液滴を含む混合気体 (混合流体) の質量 m は、

$$m = m_a + m_v + m_l \quad (2.16)$$

よって、Eq(2.8) は、

$$g = \frac{m_l}{m} = \frac{m_l}{m_a + m_v + m_l} \quad (2.17)$$

液滴 (液相) と水蒸気 (気相) の質量流量の和は常に一定 ($m_v + m_l = m_{v01}$) であり、

$$\frac{m_v + m_l}{m} = \frac{m_{v01}}{m} = \omega_{01} \quad (2.18)$$

上式の関係と Eq(2.8) および Eq(2.17) を考慮に入れると、Eq(2.12) より液滴を含む混合気体 (混合流体) の分子量 m は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_m} &= \frac{m - m_{v01}}{m - m_l} \frac{1}{M_a} + \frac{m_{v01} - m_l}{m - m_l} \frac{1}{M_v} \\ \frac{1}{M_m} &= \frac{1 - \omega_{01}}{1 - g} \frac{1}{M_a} + \frac{\omega_{01} - g}{1 - g} \frac{1}{M_v} \end{aligned} \quad (2.19)$$

ここで、検査体積 V に含まれる液滴の質量は m_l であるから、Eq(2.11) は次式のようになる。

$$\begin{aligned} p &= \left(\frac{m - m_l}{V} \right) \frac{\mathfrak{R}_{\text{uni}} T}{M_m} = \left(\rho_m - \frac{m_l}{V} \right) \frac{\mathfrak{R}_{\text{uni}} T}{M_m} \\ &= \rho_m \left(1 - \frac{m_l}{V \rho_m} \right) \frac{\mathfrak{R}_{\text{uni}} T}{M_m} = \rho_m \left(1 - \frac{m_l}{m} \right) \frac{\mathfrak{R}_{\text{uni}} T}{M_m} \end{aligned} \quad (2.20)$$

なお、Eq(2.8) を考慮すると Eq(2.20) は、

$$p = \rho_m (1 - g) \frac{\mathfrak{R}_{\text{uni}} T}{M_m} \quad (2.21)$$

となる．よって，Eq(2.21) に Eq(2.19) を代入すると、液滴を含む混合気体の圧力は，

$$p = \left(\frac{1 - \omega_{01}}{M_a} + \frac{\omega_{01} - g}{M_v} \right) \rho_m \mathfrak{R}_{\text{uni}} T \quad (2.22)$$

つまりこれが、液滴を含む混合気体の状態方程式となる．

また，本研究ではマッハ数を求める際の音速として，次式で示す凍結音速 $a_f^{(79)}$ を用いた．これは，凝縮領域内の非平衡流れにおける音速である．したがって，等エントロピーの音速式からは導出することは，当然できない．

$$a_f = \left(- \frac{\partial h / \partial p}{\partial h / \partial p - 1 / \rho} \right)^{1/2} = \left(\frac{c_{p01}}{c_{p01} - (1 - g) \frac{\mathfrak{R}_{\text{uni}}}{M_m} \rho_m} \frac{p}{\rho_m} \right)^{1/2} \quad (2.23)$$

よって流れの凍結マッハ数 M_f は，次式で定義される．

$$M_f = \frac{u}{a_f} \quad (2.24)$$

また，混合気体のよどみの物理量を求める際，「理想気体⁸ の混合物では，各成分気体は互いに干渉することなく，あたかも混合室内に単独に存在するかの性質をしめす．」とのギブス-ダルトンの法則（広義のダルトンの法則）がある．それによると，混合気体の定圧比熱 c_{p01} は次式で示される．ここでは，よどみ状態を考えるので $g = 0$ ．

$$c_{p01} = \frac{m_a}{m} c_{pa01} + \frac{m_v}{m} c_{pv01}$$

よって，比湿 ω_{01} を用いて示すと，

$$c_{p01} = (1 - \omega_{01}) c_{pa01} + \omega_{01} c_{pv01} \quad (2.25)$$

また，本節では使用していないが，後に出てくる混合気体の分子 1 個の質量 m_{01} ，粘性係数 μ_{01} ，プラントル数 Pr_{01} も同様な方法で示すことができる．

$$m_{01} = (1 - \omega_{01}) m_{a01} + \omega_{01} m_{v01} \quad (2.26)$$

$$\mu_{01} = (1 - \omega_{01}) \mu_{a01} + \omega_{01} \mu_{v01} \quad (2.27)$$

$$Pr_{01} = (1 - \omega_{01}) Pr_{a01} + \omega_{01} Pr_{v01} \quad (2.28)$$

2.6 均一核生成

凝縮過程は凝縮核の生成とそれに続く気体分子の凝縮核への凝縮（凝縮核の成長）からなると考えられる．まず始めに，凝縮核の生成について説明する．第 2.2 節で述べた，非均一凝縮と均一凝縮では凝縮核生成過程が異なり，それぞれ非均一核生成と均一核生成（homogeneous nucleation）と呼ばれる核生成が行われる．

⁸ 理想気体 (ideal gas) … 分子間力や分子の大きさを無視できる．
つまり「気体の状態方程式」が成立し、比熱 c_p, c_v が一定．完全気体．熱的かつ熱量的完全気体．

前者の非均一核生成は、気体中にすでに異種の核（塵やイオン）が存在し蒸気がその固体微粒子上で核生成する場合である。一般に大気や市販気体においては除去困難な不純物が含まれていると考えられる。そこで電的に中性、化学的に不活性なマイクロメーター以下の適当な粒径を持つエトケン微粒子と言われる固体微粒子の存在を仮定する。その固体微粒子の表面上での核生成過程を考えると、過飽和状態の気体分子が直接表面上に凝縮するものと、固体表面に凝着した気体分子が固体表面上を拡散移動して凝縮するものが考えられる。このようにして気体分子が集まりクラスターが生成される。そして後述する均一核生成と同様に臨界クラスターより大きくなると凝縮クラスターとなり、固体表面上で凝縮していく。

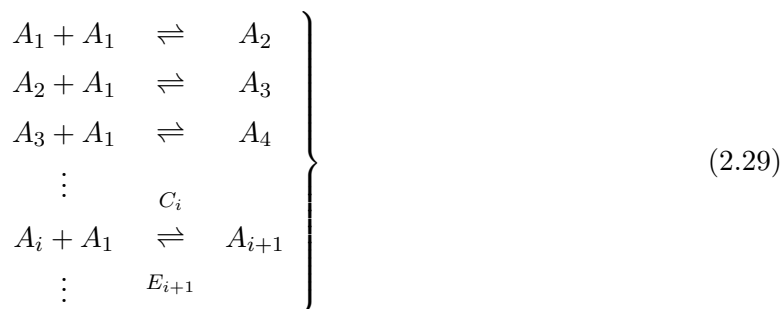
後者の均一核生成は、蒸気中に不純物を含まない場合の核生成である。ノズルなどで急激に膨張すると、凝縮現象が急激な流れの状態に追従できず、過飽和状態に至る。ある程度の過飽和状態に達した実在気体は、気体どうしの衝突によって合体し、クラスター（液相分子集合体）を形成する。しかしながら、実際には同時に、クラスターの分解も行われるため、生成したクラスターが、衝突を繰り返しながら凝縮クラスターとして成長するとは限らず、衝突による分解で蒸発してしまう場合もある。古典凝縮理論によれば、生成されるクラスターを1個の球体と仮定し、そのクラスターが成長するか、あるいは、衝突による分解で蒸発してしまうかを、クラスターの大きさで判断することが出来る。この基準となるサイズのクラスターを臨界クラスターと呼んでいる。古典凝縮理論⁹における核生成速度は、この臨界クラスターの生成速度をもとに計算を行っている。したがって、この場合の凝縮とは、臨界クラスターより大きなクラスターが生成され、それが成長していく現象であると言える。この核生成速度は、臨界クラスターのわずかな誤差で、数オーダーの誤差を生じるため、臨界クラスターのサイズの評価は重要な問題である。本研究では、この均一核生成を考える。

本節では、本研究で用い、従来より一般に用いられている Gibbs の capillary 近似による液滴モデルを用いた Frenkel の式について説明する。

2.6.1 クラスター生成

多くの場合、クラスターの生成⁽⁸⁰⁾は、 A_1 、つまり monomer(単分子)が多いため、以下のような生成・分解が支配的である。よって、ここでは monomer の結合・分解のみを考える。

A_i が i -mer(i 量体分子)¹⁰を表すものとする、monomer に関係する結合・分解は、



の関係が成り立つ。ここで、 A_i の単位時間当たりの生成割合は、

$$\text{生成割合} = \text{発生 (結合) 割合} - \text{消滅 (分解) 割合}$$

⁹ 古典凝縮理論…考える系において、各クラスターの数が反応進行中に一定に保たれるという、定常状態を仮定した凝縮理論。

¹⁰ 次のように呼称される。

A_1 : 単分子…モノマー (monomer)
 A_2 : 2量体分子…ダイマー (dimer)
 A_3 : 3量体分子…トリマー (trimer)

$$\frac{dn_i}{dt} = (C_{i-1}n_{i-1} + E_{i+1}n_{i+1}) - (C_i n_i + E_i n_i) \quad (2.30)$$

ここで, n_i は A_i の数 (数密度), C_i, E_i はそれぞれ, A_i が monomer を結合 (凝縮), 分解 (蒸発) する割合を示している. A_i が A_{i+1} になる速度を I_i (単位時間・単位体積当たりの i -mer の核生成速度) とすると,

$$I_i = C_i n_i - E_{i+1} n_{i+1} \quad (2.31)$$

生成速度 = 進行 (結合) 速度 - 後退 (分解) 速度

よって

$$\frac{dn_i}{dt} = I_{i-1} - I_i \quad (2.32)$$

となる.

また, 非平衡性があまりつよくない核凝縮などでは, 次のような方法でクラスター生成 (核生成) を取り扱う.

Eq(2.31) より,

$$I_1 + \frac{E_2}{C_2} I_2 + \frac{E_2 E_3}{C_2 C_3} I_3 + \cdots + \frac{E_2 E_2 \cdots E_m}{C_2 C_3 \cdots C_m} I_m = C_1 n_1 - \frac{E_2 E_2 \cdots E_m}{C_2 C_3 \cdots C_m} E_{m+1} n_{m+1} \quad (2.33)$$

ここで, 単位時間・単位体積当たりに生成される i -mer の核生成速度が一定 ($I_1 = I_2 = \cdots = I_m = I$), つまりクラスターの個数 n_i は時間変化しない定常状態 ($dn_i/dt = 0$) と仮定すると, Eq(2.33) は次のように展開できる.

$$I = (C_1 n_1 - \frac{E_2 E_2 \cdots E_m}{C_2 C_3 \cdots C_m} E_{m+1} n_{m+1}) \left\{ 1 + \frac{E_2}{C_2} + \frac{E_2 E_3}{C_2 C_3} + \cdots + \frac{E_2 E_2 \cdots E_m}{C_2 C_3 \cdots C_m} \right\}^{-1} \quad (2.34)$$

十分大きいクラスター A_{m+1} の個数は, かなり少ないと考えられるため, $n_{m+1} = 0$ とすると,

$$I = C_1 n_1 \left\{ 1 + \frac{E_2}{C_2} + \frac{E_2 E_3}{C_2 C_3} + \cdots + \frac{E_2 E_2 \cdots E_m}{C_2 C_3 \cdots C_m} \right\}^{-1} \quad (2.35)$$

さらに, 各サイズのクラスターの結合・分解が平衡している状態 ($I_i^e = 0$), すなわち, 結合と分解が同じ割合で起こっている状態 ($C_i n_i^e - E_{i+1} n_{i+1}^e = 0$) を考慮する. Eq(2.35) に $E_{i+1} = (C_i n_i^e)/n_{i+1}^e$ を代入すると,

$$\begin{aligned} I &= C_1 n_1 \left\{ 1 + \frac{1}{C_2} \frac{C_1 n_1^e}{n_2^e} + \frac{1}{C_2 C_3} \frac{C_1 C_2 n_1^e n_2^e}{n_2^e n_3^e} + \cdots + \frac{1}{C_2 C_3 \cdots C_m} \frac{C_1 C_2 \cdots C_{m-1} n_1^e n_2^e \cdots n_{m-1}^e}{n_1^e n_2^e \cdots n_m^e} \right\}^{-1} \\ I &= C_1 n_1 \left\{ 1 + \frac{C_1 n_1^e}{C_2 n_2^e} + \frac{C_1 n_1^e}{C_3 n_3^e} + \cdots + \frac{C_1 n_1^e}{C_m n_m^e} \right\}^{-1} \\ I &= \frac{n_1}{n_1^e} \left\{ \frac{1}{C_1 n_1^e} + \frac{1}{C_2 n_2^e} + \frac{1}{C_3 n_3^e} + \cdots + \frac{1}{C_m n_m^e} \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (2.36)$$

ここで, I は, $A_1 \rightarrow A_2, A_2 \rightarrow A_3, \cdots$ とクラスター化する速度を示す. このクラスター化を凝縮の核生成とみれば, I は生成速度を表すことになる.

一般化された核生成速度式を示す.

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi kT} \frac{\partial^2 \Delta G_i}{\partial i^2} \Big|_{i=i^*}} \cdot C_{i^*} \cdot \rho_{i^*}^{eq} \quad (2.37)$$

ここで, k はボルツマン定数, T は水蒸気温度である. ΔG_i は bulk 液相の i 個の分子から, i -mer を可逆的に生成するのに必要な Gibbs の自由エネルギー, i^* は臨界クラスターを構成するのに必要な分子数である.

C_{i^*} は, 臨界クラスターの表面に捕らえられる monomer の割合を示し,

$$C_{i^*} = \frac{p_v}{\sqrt{2\pi m_v kT}} \cdot s_{i^*} \quad (2.38)$$

である. ここに, p_v は水蒸気分圧, s_{i^*} は臨界クラスターの表面積であり, m_v は水蒸気分子 1 個の平均質量である. $\rho_{i^*}^{eq}$ を単位体積当たりの i -mer の数密度を表すものとすれば, 平衡状態のクラスターの分布は Maxwell-Boltzmann 分布に従うものとして与えられ,

$$\rho_{i^*}^{eq} = \frac{n_{i,eq}}{V} = \frac{1}{V} \exp\left(-\frac{\Delta G_i}{kT}\right) \quad (2.39)$$

ただし,

$$\Delta G_i = (F_i - i f_\infty) - i(\mu_v - \mu_{v,coex}) \quad (2.40)$$

となる. F_i, f_∞ は, それぞれ i -mer の Helmholtz の自由エネルギーと, bulk 液相の 1 分子当たりの Helmholtz の自由エネルギー, μ_v は, 水蒸気 (気相) の monomer の化学ポテンシャルである. $\mu_{v,coex}$ は気液共存領域中の monomer の化学ポテンシャルで $\mu_{v,coex} = f_\infty$ とする. ここで, 温度のみの関数 $h(T)$ を用いると, μ_v は,

$$\mu_v = kT \ln p_v + h(T) \quad (2.41)$$

と表せるので, Eq(2.40) は,

$$\Delta G_i = (F_i - i f_\infty) - ikT \ln \frac{p_v}{p_s} \quad (2.42)$$

となる. ここに, p_s は飽和蒸気圧である.

2.6.2 臨界クラスター

飽和蒸気圧以下において Gibbs の自由エネルギーは, 単調に増加する (Eq(2.42)). 一方, 過飽和状態においては, $\ln(p_v/p_s) > 0$ となるため, ΔG_i は最大値をもつ場合がある (Fig.2.6). その時のクラスターは臨界クラスターと呼ばれ,

$$\left. \frac{\partial \Delta G_i}{\partial i} \right|_{i=i^*} = 0 \quad (2.43)$$

と定義される. ここで, monomer とクラスターの衝突が起こった場合を考えると, クラスターは, よりエネルギーレベルの安定な方向, すなわち, Gibbs の自由エネルギーが減少する方向に変化する. したがって, monomer が, 臨界クラスターよりも小さいサイズのクラスターと衝突すると, クラスターの分解 (蒸発) が起き, クラスターサイズが減少する. 逆に臨界クラスターよりも大きいクラスターと衝突すると, クラスターの結合 (凝縮) が起き, より大きなクラスターへと成長する (Fig.2.6).

2.6.3 Frenkel の核生成速度式

核生成速度式 (Eq(2.37)) を具体化するために, Eq(2.42) における F_i を評価することによって, クラスターの Gibbs の自由エネルギーを評価する必要がある. そこで, この F_i を計算する方法として, 古典凝縮論においては, 液滴モデルを用いた方法が使われる. この方法は i -mer を 1 個の球状 bulk と

みなすものである．もっとも単純な液滴モデルは，Gibbs の capillary 近似である．このモデルにおいて，サイズ i のクラスターは巨視的な液滴とみなされる．この時， F_i は，

$$F_i = if_\infty + \sigma s_1 i^{2/3} + \text{const} \quad (2.44)$$

となる． σ は，巨視的な表面張力であり，第 2 項はサイズ i のクラスター生成に必要な表面エネルギーを表す項である．第 3 項は heuristic な方法で， $-kT \ln n_1^{eq}$ が選ばれる．したがって，Eq(2.42) と Eq(2.44) より，Eq(2.39) の ρ_i^{eq} は，

$$\rho_i^{eq} = \rho_1^{eq} \exp\left(-\frac{\sigma s_1}{kT} i^{2/3} + i \ln(p_v/p_{s\infty})\right) \quad (2.45)$$

となる．結局，Eq(2.37)，Eq(2.38) および Eq(2.45) より，古典的な核生成速度式 I_{class} は，

$$I_{\text{class}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \frac{p_v s_1}{\sqrt{2\pi m_v kT}} \frac{p_v}{kT} \exp\left(-\frac{4}{27} \theta^3 \frac{1}{\ln^2(p_v/p_s)}\right) \quad (2.46)$$

ただし，

$$\theta = \frac{\sigma s_1}{kT} \quad (2.47)$$

である．ここで，臨界クラスターの半径 r_c を導入し，Eq(2.46) を変形すると，

$$I_F = \frac{1}{\rho_l} \sqrt{\frac{2m_v \sigma}{\pi}} \left(\frac{p_v}{kT}\right)^2 \exp\left\{\frac{-4\pi r_c^2 \sigma}{3kT}\right\} \quad (2.48)$$

この I_F を Frenkel の核生成速度 (核生成率) と呼び，Eq(2.48) を Frenkel の核生成速度式と呼ぶ．ただし， r_c は，Eq(2.43) の定義にしたがって求めると，

$$r_c = \frac{2\sigma}{\rho_l \Re_v T \ln(p_v/p_{s\infty})} \quad (2.49)$$

となる． ρ_l は凝縮粒子の密度， \Re_v は水蒸気的气体定数である．この核生成速度式に対し，凝縮を伴うノズル流れにおける静圧分布の実験と理論の間の違いを補正するための核生成係数 $\Gamma^{(83)}$ を導入する．したがって Eq(2.48) は，

$$I = \Gamma \cdot I_F \quad (2.50)$$

となる．これを本研究では単に核生成速度式と呼び， I を核生成率と呼ぶ．本研究では $\Gamma = 10^6$ とし計算を行った．

古典的な核生成速度式は，本研究で用いた Frenkel の式⁽¹⁰⁾ の他にも，クラスターの並進，回転，振動および内部自由度を考慮した様々な式 (例えば，Abraham⁽⁸¹⁾) が提案されている．しかし，これらの式において共通の問題となる因子がある．それは，凝縮粒子の表面張力である．この凝縮粒子の表面張力に関しては，Tolman⁽⁸²⁾ など，いくつかの計算式が提案されている．それらは，表面張力の凝縮粒子に対するサイズ依存性を考慮したもので，一般に，べき級数を用いて，

$$\sigma = \frac{\sigma_\infty}{1 + \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}} \quad [a, b = \text{const}] \quad (2.51)$$

の様に表される．ここで， r は，凝縮粒子の半径， σ_∞ は，無限平面における表面張力である．しかしながら，このような式を用いた場合でも，十分満足の行く結果が得られているとは言い難い．また，より簡単な方法として，表面張力のサイズ依存性は考慮せず，あるパラメーター ζ (表面張力係数)^{(31) (84) (85)} を用いて，

$$\sigma = \zeta \sigma_\infty \quad (2.52)$$

の様に表し，実験により得られた結果と合うように， ζ の値を決定する方法もある．また，無限平面における表面張力の式として，様々な実験より経験的に得られたものがあり，例えば論文⁽⁹⁶⁾では

$$\sigma_{\infty}(T) = \begin{cases} \{76.1 + 0.155 \times (273.15 - T)\} \times 10^{-3} & (T \geq 249.39[K]) \\ \{(1.1313 - 3.7091 \times 10^{-3} \times T) \times 10^{-4} - 5.6464\} \times 10^{-6} & (T < 249.39[K]) \end{cases} \quad (2.53)$$

という温度を関数とした式を用いている．そしてこの無限平面における液滴の表面張力 $\sigma_{\infty}(T)$ を用い，Eq(2.49) の σ に代入することで，表面張力係数を用いることなく，実験と比較的一致する結果を出している．本研究においては，係数を用いた式と Schnerr らが使用した式の両方を採用しているが，詳細については後述する．

2.7 凝縮粒子の成長

本節では，クラスターの成長速度式と全凝縮量の変化割合を表す凝縮速度式について述べる．

2.7.1 クラスターの成長速度式

クラスターの成長については，既に述べたが，ここでは，生成されるクラスターの成長速度式について詳しく述べる．

Eq(2.38) において，臨界クラスターの表面に捕らえられる monomer の割合をすでに表している．この式は，クラスターサイズが，気体の平均自由行程よりも十分小さい場合に，気体分子運動論から得られ，クラスターの分布が，Maxwell-Boltzmann の速度分布則に従うものとして計算されている．同様な方法で，クラスターサイズが i の場合について考える．水蒸気（気相）の分圧を p_v ，温度を T とすると，クラスターに単位時間・単位体積当たりには捕らえられる monomer の割合 C_i は，

$$C_i = \frac{p_v}{\sqrt{2\pi m_v k T}} \quad (2.54)$$

である．一方，凝縮相の圧力として飽和蒸気圧 p_s ，その時の温度を T_s とすると，クラスターから単位時間・単位体積当たり分解（蒸発）される monomer の割合 E_i は，

$$E_i = \frac{p_s}{\sqrt{2\pi m_v k T_s}} \quad (2.55)$$

となる．したがって，クラスターが単位時間・単位体積当たりには捕らえられる monomer の正味の質量割合は，

$$\begin{aligned} \dot{m} &= 4\pi r^2 \xi_c (C_i - E_i) \\ &= 4\pi r^2 \xi_c \left(\frac{p_v}{\sqrt{2\pi m_v k T}} - \frac{p_s}{\sqrt{2\pi m_v k T_s}} \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

となる． r はクラスター半径を表している．また， ξ_c は凝縮係数^{(86) (87)} と呼ばれ，クラスターに monomer が衝突した際に，それが結合・分解する割合を示している．この式は，一般に Hertz-Knudsen の式として知られている．さらに，ここで，クラスターと気相は局所平衡 ($T = T_s$) にあると仮定し，Eq(2.56) をクラスター半径の変化割合で表すと，次のクラスターの成長速度式を得る．

$$\frac{dr}{dt} = \xi_c \frac{p_s \left(\frac{p_v}{p_s} - 1 \right)}{\rho_l \sqrt{2\pi \mathcal{R}_v T}} \quad (2.57)$$

凝縮係数については，温度の関数として与えられる場合や（例えば，Young⁽⁹⁴⁾），温度依存性のない定数として与える場合がある．また，論文⁽⁹⁶⁾ではクラスターの成長速度式として，液滴半径 r の飽和蒸気圧 $p_{s,r}$ を用いた式，

$$\frac{dr}{dt} = \xi_c \frac{p_v - p_{s,r}}{\rho_l \sqrt{2\pi} \mathcal{R}_v T} \quad (2.58)$$

ここで，

$$p_{s,r} = p_{s,\infty} \exp\left(\frac{2\sigma_\infty}{\rho_l \mathcal{R}_v T r}\right) \quad (2.59)$$

が使われている．論文⁽⁹⁶⁾によると，これらの式を用いることにより凝縮係数 $\xi_c = 1.0$ ，つまり凝縮係数を使わなくても実験と比較的合うことが報告されている．

(補足)

ここで，凝縮に関する諸係数（表面張力係数，凝縮係数，核生成係数）と凝縮開始点との関係について簡単に述べる⁽⁷⁹⁾．

- 表面張力係数の影響

表面張力係数に関しては，係数を小さくしていくと凝縮開始点はノズルスロートに近づく傾向になる．これは，Eq(2.49) と Eq(2.51) から分かるように，表面張力が小さいほど，凝縮核の臨界半径が小さくなるため，蒸気分子自身の衝突合体で生ずる分子集合体が凝縮核になりやすく，低い過飽和度で凝縮が始まるためである．

- 凝縮係数の影響

凝縮係数に関しては，係数を大きくしていくと凝縮開始点はノズルスロートに近づく傾向になる．また，係数が大きいほど凝縮開始点における核生成率の値とその最大値は小さくなる．これは，凝縮係数が大きいほど，液滴に衝突し，それに捕獲される蒸気分子の割合が多くなるため，液滴の成長速度が速くなり，凝縮開始に必要な凝縮核の個数が少なくなるためである．

- 核生成係数の影響

核生成係数に関しては，係数を大きくしていくと凝縮開始点はノズルスロートに近づく傾向になる．これは，核生成係数が大きいほど単位時間・単位体積あたりに過飽和蒸気中に発生する凝縮核の個数（割合）が多くなり，結果として凝縮による液相質量比の増加割合も大きくなるためである．

以上の結果まとめると Table 2.2 のようになる．

Table 2.2 Influence of coefficient for onset of condensation

	To throat	To downstream
Coefficient of surface tension	Smaller	Larger
Coefficient of condensation	Larger	Smaller
Accommodation coefficient for nucleation	Larger	Smaller

2.7.2 凝縮速度式

凝縮クラスターと周囲の気相との間に速度スリップは存在しないものとする、ある時刻 t における、流線に沿った凝縮量の変化を表す凝縮速度式は、Sislian⁽⁸⁸⁾ に従い、次の様に定式化される。

ある時刻 τ に生成された臨界クラスターは流線に沿って成長し、時刻 t において、

$$r_c(\tau) + \int_{\tau}^t \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot d\theta \quad (2.60)$$

となる。ある時刻 τ に、単位時間・単位体積当たり生成される、このようなクラスター数は、 ρ_m を混相流の密度とすると、 $I(\tau)/\rho_m(\tau)$ である。したがって、ある時刻 t における、これら全てのクラスターの凝縮速度は、

$$\left[\frac{I(\tau)}{\rho_m(\tau)} \rho_l 4\pi \left(r_c(\tau) + \int_{\tau}^t \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot d\theta \right)^2 \right] \frac{d\bar{r}}{dt} \Big|_t \quad (2.61)$$

となる。また、時刻 t において、新たに生成される凝縮クラスターによる凝縮量の変化は、

$$\frac{I(t)}{\rho_m(t)} \cdot \frac{4\pi r_c^3(t)}{3} \rho_l \quad (2.62)$$

である。よって、求める凝縮速度式は、Eq(2.61) を流線に沿って、初期の時刻 t_i から時刻 τ まで、時刻 τ に関して積分したものと、Eq(2.61) の和をとったものになる。すなわち、

$$\frac{dg}{dt} = 4\pi \rho_l \left[\frac{I(t)}{\rho_m(t)} \frac{r_c^3(t)}{3} + \frac{d\bar{r}}{dt} \int_{t_i}^t \left\{ \frac{I(\tau)}{\rho_m(\tau)} \left(r_c(\tau) + \int_{\tau}^t \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot d\theta \right)^2 \right\} d\tau \right] \quad (2.63)$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\rho_l}{\rho_m} \left\{ \frac{4\pi}{3} r_c^3 I + \rho_m D_1 \frac{d\bar{r}}{dt} \right\} \quad (2.64)$$

$$\frac{dD_1}{dt} = \frac{4\pi r_c^2 I}{\rho_m} + D_2 \frac{d\bar{r}}{dt} \quad (2.65)$$

$$\frac{dD_2}{dt} = \frac{8\pi r_c I}{\rho_m} + D_3 \frac{d\bar{r}}{dt} \quad (2.66)$$

$$\frac{dD_3}{dt} = \frac{8\pi I}{\rho_m} \quad (2.67)$$

ただし、 \bar{r} は液滴の平均半径と呼ばれるもので、次式で定義され、さらに Eq(2.59) における r はこの半径を用いる⁽⁴⁾。

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{2D_1}{D_3}} \quad (2.68)$$

2.8 凝縮によるエントロピーの変化

湿り空気や水蒸気などの凝縮性気体が超音速ノズル等で急激に加速膨張する際に生じる非平衡凝縮過程は、エントロピーの増加を伴う不可逆過程であり、結果として全圧損失が発生する。そこで、凝縮による混合気体のエントロピーを示す式⁽⁹⁷⁾は湿り空気の場合、次式ようになる。

$$\begin{aligned} \Delta s = s - s_{01} = & \underbrace{(1 - \omega_{01}) \frac{\mathfrak{R}}{M_a} \ln \left(\frac{T^{\gamma a / (\gamma a - 1)}}{P_a} \right)}_{\text{air entropy}} \\ & + \underbrace{(\omega_{01} - g) \frac{\mathfrak{R}}{M_v} \ln \left(\frac{T^{\gamma v / (\gamma v - 1)}}{P_v} \right)}_{\text{vapor entropy}} \\ & + \underbrace{g \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{3}{\rho_l} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)}_{\text{liquid entropy}} \end{aligned} \quad (2.69)$$

ここで、 s 、 ω_{01} 、 σ はそれぞれ単位質量当たりのエントロピー、初期比湿、および表面張力を示している。Eq(2.69) に表示してあるように、右辺の第1項、第2項、第3項はそれぞれ空気、水蒸気、液滴のエントロピーを示している。特に第3項は、液滴自身のエントロピーは無視し、微小液滴の表面におけるエントロピーのみを考慮したものである。また、水蒸気のみの場合は、Eq(2.69) において、 $\omega_{01} = 1$ とおくことにより求められる。

ここで、ノズル入口のよどみ点状態のエントロピーを s_{01} とすると、エントロピーと全圧損失の関係は次式ようになる。

$$\frac{s - s_{01}}{c_p} = \ln \left(\frac{T_0}{T_{01}} \right) - \frac{R/M}{c_p} \ln \left(\frac{p_0}{p_{01}} \right) \quad (2.70)$$

ここで、 c_p 、 M は混合気体の定圧比熱、分子量を示しており、 T_0 、 p_0 は局所的な全温度と全圧を、 T_{01} 、 p_{01} はノズル入口のよどみ点状態の全温度と全圧を示している。

また、断熱流れと仮定することで、 T_0/T_{01} は1になるので、最終的には次式ようになる。

$$\frac{\Delta s}{R/M} = \frac{s - s_{01}}{R/M} = \ln \left(\frac{p_{01}}{p_0} \right) \quad (2.71)$$

第3章 基礎方程式

本研究が対象とする流れは、非平衡凝縮を伴う超音速ノズル内の2次元圧縮粘性流れ、及び遷音速バンプ流れである。この流れを解析するために、凝縮速度方程式を Navier-Stokes 方程式及び気体の状態方程式と連立して解く。

本章では、この支配方程式を示し、保存系表示を導く。同時に、状態方程式などの補足関係式や、無次元化した保存系表示についても示す。そののちに圧縮性流れの方程式をベクトル形式にまとめ定式化し、それらを差分法を用いて解く際の方法について述べる。

流れ場のモデル化

支配方程式を定式化するにあたって以下の仮定を行った。

1. 凝縮粒子と混合気体との間には、速度スリップは存在しない。
2. 凝縮粒子と混合気体は、局所熱平衡状態にあり、相間のエネルギー緩和過程は考慮しない。
3. 凝縮粒子の圧力に対する寄与は無視する。
4. 流れは乱流とする。

3.1 2次元方程式

理想気体の2次元流れの問題には、基本的な4つの独立変数がある。それは2つの速度成分と2つの適当な熱力学量である。非圧縮流れでは、2つの熱力学量のうちの1つである温度を消去すると、もはやエネルギー方程式は運動方程式と連続の式を解くのに必要でなくなる。さらに圧力が交差微分により消去され、渦度が導入される。また2つの速度成分も流れ関数の導入により消去されるために、渦度と流れ関数の2つが未知数として残る。これは、それぞれ放物系方程式と楕円方程式を解いて求められる。しかし、圧縮性流れの場合にはエネルギー方程式が運動方程式と連続の式を解くために必要であり、しかも流れ関数は非定常流れに対して定義できない。そのため4つの偏微分方程式を連立して解かなければならない。

本節では本研究で用いた連続の式、運動方程式、エネルギー方程式について示す。

連続の式

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{V}}) = 0 \quad \left(\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) \quad (3.1)$$

運動方程式

$$\bar{\rho} \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[2\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{\lambda} \bar{D} \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[\bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right] \quad (3.2)$$

$$\bar{\rho} \frac{D\bar{v}}{Dt} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[2\bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{\lambda} \bar{D} \right] \quad (3.3)$$

ここで

$$\bar{\lambda} = \bar{\kappa} - \frac{2\bar{\mu}}{3} \quad (\text{第二粘性係数・ストークスの関係}) \quad (3.4)$$

$$\bar{D} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{体積膨張率}) \quad (3.5)$$

$$(3.6)$$

エネルギー方程式

$$\bar{\rho} \frac{D\bar{e}_s}{Dt} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{q}} - \bar{\nabla} \cdot (\bar{\mathfrak{S}} \cdot \bar{\mathbf{V}}) = 0 \quad \left(\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) \quad (3.7)$$

ここで、物理量の上につけた記号“ $\bar{\quad}$ ”は、その物理量が無次元量ではなく、単位をもつ量であることを示す。また $\bar{\mathbf{V}}$ は速度ベクトルを示し $\bar{D} = \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{V}}$ は体積膨張を意味し、圧縮性流体を考える場合には必要となる項である。ちなみに非圧縮流体の場合は 0 と考えられる。 $\bar{e}_s = \bar{e} + (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)/2$ は単位質量当たりの全エネルギー、 \bar{e} は内部エネルギー、 $\bar{\mathbf{q}}$ は熱流束ベクトル、 $\bar{\mathfrak{S}}$ は全応力テンソルである。また、 $\bar{\kappa}$ は体積粘性率、 $\bar{\lambda}$ は第二粘性係数、 \bar{k} は熱伝導率を示している。

$$\bar{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} -\bar{k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} \\ -\bar{k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \end{pmatrix} \quad \bar{\mathfrak{S}} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{xx} & \bar{\tau}_{yx} \\ \bar{\tau}_{xy} & \bar{\sigma}_{yy} \end{bmatrix}$$

3.2 有次元保存形表示方程式

いま，保存量を表す変数 $\rho, \rho u, \rho v, E_s$ を独立変数として通常の微分方程式を変形し，これを保存形表示の有限差分に展開した場合，質量，運動量，エネルギーの保存性が有限差分表示によって失われないことがわかっている．垂直衝撃波に関するランキン・ユゴニオの関係は，こうした全体としての保存性のみに基づき，衝撃波内部の微細構造に関するものではない．したがって，全く安定で適合性のある保存性を備えた有限差分スキームを保存形表示した微分方程式に適用するならば，その差分スキームはランキン・ユゴニオの関係を満たし，流れが衝撃波を横切るときの跳躍条件を正しく作り出す．多くのコンピュータ計算において，衝撃波を横切る計算については衝撃波“つぎあて”法 (shock-patching) よりも，保存形表示による方法の方が正確なことが分かった．その理由は，定在垂直衝撃波を考えると容易に理解できる．差分法の打切り誤差は差分表示したテイラー級数展開の高次の大きさに依存する．変数を ρ, u, v, T とした場合には衝撃波があると，これらの連続体の解の途中に不連続点が生じるが，保存形表示での変数 $\rho, \rho u, \rho v, E_s$ は，連続のままである．

本節では，前節で示した有次元方程式を有次元保存系表示方程式へ変換する手法と有次元保存系表示を行った方程式のベクトル表示を示す．

3.2.1 有次元方程式

ここからは，“-”の表記法では繁雑となるので，有次元方程式は方程式の“=”の上に“ \cdot ”をつけて表す．

連続の式

連続の式は既に保存形表示になっているので，Eq(3.1) より

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \doteq 0 \quad (3.8)$$

運動方程式

Eq(3.2) の x 方向運動方程式を示す．ただし，体積力 F_x は無視する．

$$\rho \frac{Du}{Dt} \doteq -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda D \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (3.9)$$

ここで，次の項について考える．

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} \\ & \doteq u \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + u \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \\ & \doteq u \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right] + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\ & \doteq u \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] + \rho \frac{Du}{Dt} \end{aligned}$$

これに，連続の式 Eq(3.8) を代入すると，[] の中の項は 0 となり，次の式が成り立つ．

$$\rho \frac{Du}{Dt} \doteq \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} \quad (3.10)$$

$$\doteq \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho u) \mathbf{V}] \quad (3.11)$$

この Eq(3.11) を Eq(3.9) に代入すると，x 方向運動量の式 が得られる．

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \doteq -\frac{\partial p}{\partial x} - \nabla \cdot [(\rho u) \mathbf{V}] + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda D \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (3.12)$$

同様にして y 方向運動量の式 は Eq(3.3) を変形し，次のようになる．ここでも y 方向運動方程式の体積力 F_y は無視する．

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \doteq -\frac{\partial p}{\partial y} - \nabla \cdot [(\rho v) \mathbf{V}] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda D \right] \quad (3.13)$$

エネルギー方程式

Eq(3.7) のエネルギー式

$$\rho \frac{De_s}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot (\mathfrak{S} \cdot \mathbf{V}) \doteq 0$$

を変形する．

$$\rho \frac{De_s}{Dt} \doteq \nabla \cdot (\mathfrak{S} \cdot \mathbf{V}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (3.14)$$

ここで，次の項について考える．(Eq(3.11) を求めた方法と同様)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(e_s \rho)}{\partial t} + \frac{\partial(e_s \rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(e_s \rho v)}{\partial y} \\ & \doteq e_s \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial e_s}{\partial t} + e_s \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \rho u \frac{\partial e_s}{\partial x} + e_s \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \rho v \frac{\partial e_s}{\partial y} \\ & \doteq \rho \left(\frac{\partial e_s}{\partial t} + u \frac{\partial e_s}{\partial x} + v \frac{\partial e_s}{\partial y} \right) + e_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) \\ & \doteq \rho \frac{De_s}{Dt} + e_s \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] \end{aligned}$$

連続の式 Eq(3.8) より，[] 内が 0 となり次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \rho \frac{De_s}{Dt} & \doteq \frac{\partial(\rho e_s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e_s u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho e_s v)}{\partial y} \\ & \doteq \frac{\partial(\rho e_s)}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho e_s) \cdot \mathbf{V}] \end{aligned}$$

したがって Eq(3.14) は，

$$\frac{\partial(\rho e_s)}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho e_s) \cdot \mathbf{V}] \doteq \nabla \cdot (\mathfrak{S} \cdot \mathbf{V}) - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

単位体積当たりの全エネルギー E_s は，

$$E_s \doteq \rho e_s \left(\doteq \rho \left[e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] \right) \quad (3.15)$$

より,

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{V}E_s] \doteq \nabla \cdot (\mathfrak{S} \cdot \mathbf{V}) - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} \doteq -\nabla \cdot (\mathbf{V}E_s) + \nabla \cdot (\mathfrak{S} \cdot \mathbf{V}) - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

ここで応力テンソル \mathfrak{S} は,

$$\mathfrak{S} \doteq \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} -p + \lambda D + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) \\ \mu(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) & -p + \lambda D + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

であり, 静止流体テンソルと粘性応力テンソル π の和として表すことができる.

$$\mathfrak{S} \doteq -p\varphi + \pi$$

$$\varphi \doteq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \pi \doteq \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} \lambda D + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) \\ \mu(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) & \lambda D + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

p は静圧, φ は単位ダイアディクスであり, よって次式が得られる.

$$\nabla \cdot (\mathfrak{S} \cdot \mathbf{V}) \doteq -\nabla \cdot (p\varphi \cdot \mathbf{V} - \pi \cdot \mathbf{V})$$

ここで,

$$\nabla \cdot (p\varphi \cdot \mathbf{V}) \doteq \nabla \cdot (\mathbf{V}p)$$

より,

$$\nabla \cdot (\mathfrak{S} \cdot \mathbf{V}) \doteq -\nabla \cdot (\mathbf{V}p) + \nabla \cdot (\pi \cdot \mathbf{V})$$

これを Eq(3.15) に代入すると, 次式が得られる.

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} \doteq -\nabla \cdot (\mathbf{V}E_s) - \nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot (\mathbf{V}p) + \nabla \cdot (\pi \cdot \mathbf{V})$$

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} \doteq -\nabla \cdot [\mathbf{V}(E_s + p)] - \nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\pi \cdot \mathbf{V}) \quad (3.16)$$

3.2.2 ベクトル表示

Eq(3.8), Eq(3.12), Eq(3.13), Eq(3.16) をまとめると,

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \doteq 0 \quad (3.17)$$

運動方程式 (運動量の式)

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \doteq -\frac{\partial p}{\partial x} - \nabla \cdot [(\rho u)\mathbf{V}] + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda D \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \doteq -\frac{\partial p}{\partial y} - \nabla \cdot [(\rho v)\mathbf{V}] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda D \right] \quad (3.19)$$

エネルギー方程式

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} \doteq -\nabla \cdot [\mathbf{V}(E_s + p)] - \nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{V}) \quad (3.20)$$

Eq(3.17) , Eq(3.18) , Eq(3.19) , Eq(3.20) をベクトル表示で表すと ,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \doteq \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E_s + p) \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E_s + p) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ u \left(\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + v \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + k \frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ u \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \left(\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + k \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix}$$

ここで , $\lambda = \kappa - 2\mu/3$ において , ストークスの仮説より $\kappa = 0$ と置くと上記は次のように変形できる .

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \doteq \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E_s + p) \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E_s + p) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3}\mu(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) \\ \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \\ \frac{2}{3}\mu u(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + \mu v(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) + k\frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xx}u + \tau_{xy}v + k\frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \\ \frac{2}{3}\mu(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}) \\ \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})u + \frac{2}{3}\mu(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x})v + k\frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yx}u + \tau_{yy}v + k\frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix}$$

ただし, $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yy}$ については, 3.4.2 節で定義する $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yy}$ を用いる.

3.3 無次元保存形表示方程式

方程式を無次元化して計算するのは非常に便利である．というのは，問題の特徴づけるパラメータを互いに独立に，変化させうるからである．圧縮性流れの式を無次元化するときは，非圧縮性の式よりも更に多くの変数を対象にしなければならない．流体の物性が一定でなく変化する場合は，特に無次元化の対象になる変数が多い．そして無次元化の条件が異なれば，別の差分式ができる．

本節では，無次元保存系表示方程式とそのベクトル表示を示す．

3.3.1 無次元体系

本研究では各物性値の代表条件をよどみ値 f_0 とし，代表長さ \bar{L} を用いて，次のように計算の無次元化を行う．

$$\begin{aligned}
 u^* &= \bar{u}/\bar{u}_0 & v^* &= \bar{v}/\bar{u}_0 \\
 x^* &= \bar{x}/\bar{L} & y^* &= \bar{y}/\bar{L} \\
 t^* &= \bar{t}/(\bar{L}/\bar{u}_0) & \rho^* &= \bar{\rho}/\bar{\rho}_0 \\
 T^* &= \bar{T}/\bar{T}_0 & p^* &= \bar{p}/(\bar{\rho}_0\bar{u}_0^2) = \bar{p}/(\gamma\bar{p}_0M_0^2) \\
 \mu^* &= \bar{\mu}/\bar{\mu}_0 & \kappa^* &= \bar{\kappa}/\bar{\mu}_0 \\
 k^* &= \bar{k}/\bar{k}_0 & e^* &= \bar{e}/\bar{u}_0^2 \\
 E_s^* &= \bar{E}_s/(\bar{\rho}_0\bar{u}_0^2) & \bar{a}^* &= \bar{a}/\bar{u}_0 \\
 \bar{L}^* &= \bar{L}/\bar{u}_0^2 \quad (\text{潜熱}) \\
 (\lambda^* &= \bar{\kappa}^* - 2\bar{\mu}^*/3 & D^* &= \partial\bar{u}^*/\partial\bar{x}^* + \partial\bar{v}^*/\partial\bar{y}^*)
 \end{aligned}$$

ここで代表速度 \bar{u}_0 は，よどみ速度 $u_0 = 0$ となるため，よどみ点音速 \bar{a}_0 を代表速度とする．したがって，

$$p^* = \bar{p}/(\bar{\rho}_0\bar{a}_0^2) = \bar{p}/(\gamma\bar{p}_0) \quad (3.23)$$

と書き換える事が出来る．

また，代表レイノルズ数は，

$$Re_0 = \frac{\bar{\rho}_0\bar{u}_0\bar{L}}{\bar{\mu}_0} \quad (3.24)$$

で定義し，代表プラントル数は，

$$Pr_0 = \frac{c_{p0}\bar{\mu}_0}{\bar{k}_0} \quad (3.25)$$

代表マッハ数は，

$$M_0 = \frac{\bar{u}_0}{\bar{a}_0} \quad (3.26)$$

と定義する．本研究では代表速度 \bar{u}_0 をよどみ音速 \bar{a}_0 としたため，代表マッハ数は $M_0 = 1.0$ となる．

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \doteq 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \doteq 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho^* \rho_0)}{\partial(\frac{L}{u_0} t^*)} + (\rho^* \rho_0 \frac{\partial(u^* u_0)}{\partial(Lx^*)} + u^* u_0 \frac{\partial(\rho^* \rho_0)}{\partial(Lx^*)}) + (\rho^* \rho_0 \frac{\partial(v^* u_0)}{\partial(Ly^*)} + v^* u_0 \frac{\partial(\rho^* \rho_0)}{\partial(Ly^*)}) &\doteq 0 \\ \frac{u_0}{L} \rho_0 \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{u_0}{L} \rho_0 \rho^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{u_0}{L} \rho_0 u^* \frac{\partial \rho^*}{\partial x^*} + \frac{u_0}{L} \rho_0 \rho^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{u_0}{L} \rho_0 v^* \frac{\partial \rho^*}{\partial y^*} &\doteq 0 \\ \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \rho^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + u^* \frac{\partial \rho^*}{\partial x^*} + \rho^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + v^* \frac{\partial \rho^*}{\partial y^*} &\doteq 0 \\ \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho^* v^*)}{\partial y^*} &\doteq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\rho^* \mathbf{V}^*) = 0 \quad (3.27)$$

運動方程式 (運動量の式)

x 方向の運動方程式について考える .

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &\doteq -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda D \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} &\doteq -\frac{\partial p}{\partial x} - \nabla \cdot [(\rho u) \mathbf{V}] + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda D \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] &\doteq 0 \\ \frac{\partial(u_0 u^* \rho_0 \rho^*)}{\partial(\frac{L}{u_0} t^*)} + \frac{\partial(\rho_0 u_0^2 p^*)}{\partial(x^* L)} + \frac{\partial(\rho_0 \rho^* u_0 u^* u_0 u^*)}{\partial(x^* L)} + \frac{\partial(\rho_0 \rho^* u_0 u^* u_0 v^*)}{\partial(y^* L)} & \\ - \frac{\partial}{\partial(x^* L)} \left[2\mu_0 \mu^* \frac{\partial(u_0 u^*)}{\partial(x^* L)} + \mu_0 \left(\kappa^* - \frac{2}{3} \mu^* \right) \left(\frac{\partial(u_0 u^*)}{\partial(x^* L)} + \frac{\partial(u_0 v^*)}{\partial(y^* L)} \right) \right] & \\ - \frac{\partial}{\partial(y^* L)} \left[\mu_0 \mu^* \left(\frac{\partial(u_0 u^*)}{\partial(y^* L)} + \frac{\partial(u_0 v^*)}{\partial(x^* L)} \right) \right] &\doteq 0 \\ \frac{\rho_0 u_0^2}{L} \left[\frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho^* u^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho^* v^* u^*)}{\partial y^*} \right] & \\ - \frac{\mu_0 u_0}{L} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(2\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \left(\kappa^* - \frac{2}{3} \mu^* \right) \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) \right) \right] & \\ - \frac{\mu_0 u_0}{L} \left[\frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) \right] &\doteq 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Eq(3.28) の第 1 項の [] を A と置くと ,

$$\frac{\rho_0 u_0^2}{L} \cdot A - \frac{\mu_0 u_0}{L^2} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(2\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \lambda^* D^* \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) \right] \doteq 0 \quad (3.29)$$

またここで , Eq(3.29) の [] の部分を B と置き , 全体を $\frac{\rho_0 u_0^2}{L}$ で割ると ,

$$A - \frac{\mu_0}{u_0 \rho_0 L} \cdot B \doteq 0$$

$\frac{\mu_0}{u_0 \rho_0 L}$ は Eq(3.24) より $\frac{1}{Re_0}$ となる . したがって ,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho^* u^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho^* v^* u^*)}{\partial y^*} \\ & - \frac{1}{Re_0} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(2\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \lambda^* D^* \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

まとめると x 方向の運動方程式は以下のように書くことができる .

$$\frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial t^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} - \nabla[(\rho^* u^*)V^*] + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(2\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \lambda^* D^* \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) \right] \quad (3.30)$$

y 方向の運動方程式も同様にして ,

$$\frac{\partial(\rho^* v^*)}{\partial t^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} - \nabla[(\rho^* v^*)V^*] + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{\partial}{\partial y^*} \left(2\mu^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \lambda^* D^* \right) + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\mu^* \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \right) \right] \quad (3.31)$$

エネルギー方程式

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} \doteq -\nabla \cdot [\mathbf{V}(E_s + p)] - \nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{V})$$

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}E_s) + \nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\mathbf{V}p) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{V}) \doteq 0$$

まず最初に , 上式の第 5 項目について考える .

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{V}) \doteq \frac{\partial \pi_1}{\partial x} + \frac{\partial \pi_2}{\partial y}$$

ここで ,

$$\pi_1 \doteq u(\lambda D + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + v\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\pi_2 \doteq u\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v(\lambda D + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x})$$

となり , ストークスの仮説 $\lambda \doteq \kappa - 2\mu/3$ より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial x} & \doteq \frac{\partial}{\partial x} \left[u \left\{ \left(\kappa - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + v \left\{ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \right] \\ & \doteq \frac{\partial}{\partial x} \left[u \left(\kappa + \frac{4}{3}\mu \right) \frac{\partial u}{\partial x} + (\mu v) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) u \frac{\partial v}{\partial y} + (\mu v) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\ & \doteq \frac{\partial}{\partial(x^* L)} \left[u_0 u^* \left(\mu_0 \kappa^* + \frac{4}{3}\mu_0 \mu^* \right) \frac{\partial(u_0 u^*)}{\partial(x^* L)} + (u_0 v^* \mu_0 \mu^*) \frac{\partial(u_0 v^*)}{\partial(x^* L)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial(x^*L)} \left[\left(\mu_0 \kappa^* - \frac{2}{3} \mu_0 \mu^* \right) u_0 u^* \frac{\partial(u_0 v^*)}{\partial(y^*L)} + (u_0 v^* \mu_0 \mu^*) \frac{\partial(u_0 u^*)}{\partial(y^*L)} \right] \\
& \doteq \frac{\partial}{\partial(x^*L)} \left[\left(u_0 \mu_0 u^* \kappa^* + \frac{4}{3} u_0 \mu_0 u^* \mu^* \right) \frac{\partial(u_0 u^*)}{\partial(x^*L)} + (u_0 \mu_0 v^* \mu^*) \frac{\partial(u_0 v^*)}{\partial(x^*L)} \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial(x^*L)} \left[\left(u_0 \mu_0 u^* \kappa^* - \frac{2}{3} u_0 \mu_0 u^* \mu^* \right) \frac{\partial(u_0 v^*)}{\partial(y^*L)} + (u_0 \mu_0 v^* \mu^*) \frac{\partial(u_0 u^*)}{\partial(y^*L)} \right] \\
& \doteq \frac{u_0^2 \mu_0}{L^2} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(u^* \left(\kappa^* + \frac{4}{3} \mu^* \right) \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + (\mu^* v^*) \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(u^* \left(\kappa^* - \frac{2}{3} \mu^* \right) \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + (v^* \mu^*) \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_2}{\partial x} & \doteq \frac{\partial}{\partial y} \left[u \left\{ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} + v \left\{ \left(\kappa - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right\} \right] \\
& \doteq \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\kappa + \frac{4}{3} \mu \right) v \frac{\partial v}{\partial y} + u \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) v \frac{\partial u}{\partial x} + (u \mu) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\
& \doteq \frac{\partial}{\partial(y^*L)} \left[u_0 v^* \left(\mu_0 \kappa^* + \frac{4}{3} \mu_0 \mu^* \right) \frac{\partial(u_0 v^*)}{\partial(y^*L)} + (u_0 u^* \mu_0 \mu^*) \frac{\partial(u_0 u^*)}{\partial(y^*L)} \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial(y^*L)} \left[\left(\mu_0 \kappa^* - \frac{2}{3} \mu_0 \mu^* \right) u_0 v^* \frac{\partial(u_0 u^*)}{\partial(x^*L)} + (u_0 u^* \mu_0 \mu^*) \frac{\partial(u_0 v^*)}{\partial(x^*L)} \right] \\
& \doteq \frac{u_0^2 \mu_0}{L^2} \left[\frac{\partial}{\partial y^*} \left(v^* \left(\kappa^* + \frac{4}{3} \mu^* \right) \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + (u^* \mu^*) \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(v^* \left(\kappa^* - \frac{2}{3} \mu^* \right) \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + (u^* \mu^*) \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right]
\end{aligned}$$

この2つをまとめて [] 内を D と置く .

$$\nabla \cdot (\pi \cdot \mathbf{V}) \doteq \frac{\partial \pi_1}{\partial x} + \frac{\partial \pi_2}{\partial y} \doteq \frac{u_0^2 \mu_0}{L^2} \cdot D \quad (3.32)$$

次に第1,2項目 $\partial E_s / \partial t + \nabla \cdot (\mathbf{V} E_s)$ について考える .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V} E_s) & \doteq \frac{\partial(\rho_0 u_0^2 E_s^*)}{\partial(\frac{L}{u_0} t^*)} + \frac{\partial(u_0 u^* \rho_0 u_0^2 E_s^*)}{\partial(x^*L)} + \frac{\partial(u_0 v^* \rho_0 u_0^2 E_s^*)}{\partial(y^*L)} \\
& \doteq \frac{\rho_0 u_0^3}{L} \frac{\partial E_s^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 u_0^3}{L} \left[\frac{\partial(E_s^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(E_s^* v^*)}{\partial y^*} \right] \\
& \doteq \frac{\rho_0 u_0^3}{L} \left[\frac{\partial E_s^*}{\partial t^*} + \left(\frac{\partial(E_s^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(E_s^* v^*)}{\partial y^*} \right) \right]
\end{aligned}$$

ここで上式の [] 内を A と置く .

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V} E_s) \doteq \frac{\rho_0 u_0^3}{L} \cdot A \quad (3.33)$$

次に第3項目 $\nabla \cdot \mathbf{q}$ について考える . ここで $\nabla \cdot \mathbf{q}$ は ,

$$\nabla \cdot \mathbf{q} \doteq \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-k \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned} & \doteq \frac{\partial}{\partial(x^*L)} \left(-k_0 k^* \frac{\partial(T_0 T^*)}{\partial(x^*L)} \right) + \frac{\partial}{\partial(y^*L)} \left(-k_0 k^* \frac{\partial(T_0 T^*)}{\partial(y^*L)} \right) \\ & \doteq -\frac{k_0 T_0}{L^2} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) \right] \end{aligned}$$

上式の [] の中を B と置くと,

$$\nabla \cdot \mathbf{q} \doteq \frac{k_0 T_0}{L^2} \cdot B \quad (3.34)$$

次に第4項目 $\nabla \cdot (\mathbf{V}p)$ について考える.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{V}p) & \doteq \frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} \doteq \frac{\partial(u_0 u^* \rho_0 u_0^2 p^*)}{\partial(x^*L)} + \frac{\partial(u_0 v^* \rho_0 u_0^2 p^*)}{\partial(y^*L)} \\ & \doteq \frac{u_0^3 \rho_0}{L} \left[\frac{\partial(u^* p^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^* p^*)}{\partial y^*} \right] \end{aligned}$$

上式の [] の中を C と置くと,

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}p) \doteq \frac{u_0^3 \rho_0}{L} \cdot C \quad (3.35)$$

最後に今までに導出した Eq(3.32) ~ Eq(3.35) をエネルギー方程式に代入していくと,

$$\frac{\rho_0 u_0^3}{L} \cdot A - \frac{k_0 T_0}{L^2} \cdot B + \frac{u_0^3 \rho_0}{L} \cdot C - \frac{u_0^2 \mu_0}{L^2} \cdot D \doteq 0$$

$$A - \frac{k_0 T_0}{\rho_0 u_0^3 L} \cdot B + C - \frac{\mu_0}{\rho_0 u_0 L} \cdot D \doteq 0$$

上式の $\frac{1}{N} = \frac{k_0 T_0}{\rho_0 u_0^3 L}$ について考える.

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} & = \frac{k_0 T_0}{\rho_0 u_0^3 L} \\ & = \frac{\mu_0}{u_0 L \rho_0} \frac{k_0 T_0}{\mu_0 u_0^2} \\ & = \frac{\mu_0}{u_0 L \rho_0} \frac{k_0 T_0}{\mu_0 M_0^2 a_0^2} \end{aligned}$$

ここで, 音速 a_0^2 を, 比熱比 γ_0 , 定圧比熱 c_{p0} , 定容比熱 c_{v0} , ガス定数 \mathfrak{R}_0 で示すと

$$a_0 = \sqrt{\gamma_0 \mathfrak{R}_0 T_0}$$

$$a_0^2 = \gamma_0 \mathfrak{R}_0 T_0 = \gamma_0 (c_{p0} - c_{v0}) T_0 = \gamma_0 \left(c_{p0} - \frac{c_{p0}}{\gamma_0} \right) T_0 = c_{p0} (\gamma_0 - 1) T_0$$

したがって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} & = \frac{\mu_0}{u_0 L \rho_0} \frac{k_0 T_0}{\mu_0 M_0^2 c_{p0} (\gamma_0 - 1) T_0} \\ & = \frac{\mu_0}{u_0 L \rho_0} \frac{k_0}{c_{p0} \mu_0} \frac{1}{M_0^2 (\gamma_0 - 1)} \end{aligned}$$

ここで, 代表レイノルズ数 $Re_0 = (u_0 L \rho_0) / \mu_0$, 代表プラントル数 $Pr_0 = (c_{p0} \mu_0) / k_0$ を用いると,

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{Re_0} \frac{1}{Pr_0} \frac{1}{M_0^2 (\gamma_0 - 1)} = \frac{1}{Re_0 Pr_0 M_0^2 (\gamma_0 - 1)}$$

以上より，次式が得られる．

$$A - \frac{1}{N} \cdot B + C - \frac{1}{Re_0} \cdot D = 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial E_s^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(E_s^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(E_s^* v^*)}{\partial y^*} \\
& - \frac{1}{N} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) \right] + \frac{\partial(u^* p^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^* p^*)}{\partial y^*} \\
& - \frac{1}{Re_0} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(u^* \left(\kappa^* + \frac{4}{3} \mu^* \right) \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + (\mu^* v^*) \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(u^* \left(\kappa^* - \frac{2}{3} \mu^* \right) \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + (v^* \mu^*) \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(v^* \left(\kappa^* + \frac{4}{3} \mu^* \right) \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + (u^* \mu^*) \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(v^* \left(\kappa^* - \frac{2}{3} \mu^* \right) \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + (u^* \mu^*) \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right] = 0 \tag{3.36}
\end{aligned}$$

3.3.2 無次元方程式

簡単のためにすべての * をはずしてまとめると，

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (3.37)$$

運動方程式

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \nabla[(\rho u)\mathbf{V}] + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda D \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \nabla[(\rho v)\mathbf{V}] + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda D \right) \right] \quad (3.39)$$

エネルギー方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E_s}{\partial t} + \left(\frac{\partial(E_s u)}{\partial x} + \frac{\partial(E_s v)}{\partial y} \right) - \frac{1}{N} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} \\ & - \frac{1}{Re_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \left(\kappa + \frac{4}{3}\mu \right) \frac{\partial u}{\partial x} + (\mu v) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial v}{\partial y} + (v\mu) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \left(\kappa + \frac{4}{3}\mu \right) \frac{\partial v}{\partial y} + (u\mu) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial u}{\partial x} + (u\mu) \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

ここで，

$$\frac{1}{N} k \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{k}{Pr_0 \cdot Re_0 \cdot M_0^2 \cdot (\gamma - 1)} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.41)$$

エネルギーの式の最終形

熱伝導率 k は次式で示される．

$$\bar{k} = \frac{c_{p0} \bar{\mu}}{\bar{Pr}_0'} \quad (\text{with dimension})$$

上式の Pr_0' と c_{p0} は，実際は温度，圧力による $Pr(p, T)$, $c_p(p, T)$ であるが，本計算ではそれぞれ定数と考えているので $Pr_0' = Pr_0$, $c_{p0} = c_{p0}$ となる．前述した式 (3.25) の Pr_0 の式とは意味が違うためこのように表記を変えている．上式を無次元化すると，

$$k = \frac{\bar{k}}{\bar{k}_0} = \frac{c_{p0} \mu \bar{\mu}_0}{\bar{Pr}_0' \bar{k}_0} \quad (\text{without dimension})$$

ここで，前述した式を下記のように変形する．

$$\frac{1}{N} k \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{Pr_0} \frac{1}{Re_0 M_0^2 (\gamma - 1)} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\bar{k}_0}{c_{p0} \bar{\mu}_0} \frac{1}{Re_0 M_0^2 (\gamma - 1)} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

上式に k を代入すると Eq(3.41) は次式となる．

$$\frac{1}{N} k \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\bar{k}_0}{c_{p0} \bar{\mu}_0} \frac{1}{Re_0 M_0^2 (\gamma - 1)} \left(\frac{c_{p0} \mu \bar{\mu}_0}{Pr_0' \bar{k}_0} \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{1}{Re_0} \left[\frac{\mu}{Pr_0' M_0^2 (\gamma - 1)} \frac{\partial T}{\partial x} \right]$$

本研究では，代表マッハ数 $M_0 = 1.0$ より，次式のようになる．

$$\frac{1}{N} k \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{Re_0} \left[\frac{\mu}{Pr_0' (\gamma - 1)} \frac{\partial T}{\partial x} \right]$$

3.3.3 ベクトル表示

Eq(3.37) , Eq(3.38) , Eq(3.39) , Eq(3.40) と $\frac{1}{N}k\frac{\partial T}{\partial x}$ の関係をまとめると ,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{1}{Re_0} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \right)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E_s + p) \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E_s + p) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ u \left(\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + v \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{(\gamma_0 - 1) Pr_0'} \frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ u \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \left(\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{(\gamma_0 - 1) Pr_0'} \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix}$$

ここで , $\lambda = \kappa - 2\mu/3$ において , ストークスの仮定 $\kappa = 0$ と置くと上記は次のように変形できる . なお , 計算には次式を用いた .

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{1}{Re_0} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \right) \quad (3.42)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E_s + p) \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E_s + p) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3}\mu(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) \\ \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \\ \frac{2}{3}\mu u(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + \mu v(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\mu}{(\gamma_0-1)Pr_0'}\frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xx}u + \tau_{xy}v + \frac{\mu}{(\gamma_0-1)Pr_0'}\frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \\ \frac{2}{3}\mu(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}) \\ u\mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{2}{3}\mu(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x})v + \frac{\mu}{(\gamma_0-1)Pr_0'}\frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yx}u + \tau_{yy}v + \frac{\mu}{(\gamma_0-1)Pr_0'}\frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix}$$

ただし , $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yy}$ については 3.4.2 節で定義する $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yy}$ を用いる .

3.3.4 補足関係式の無次元化

ここでは , すべて凝縮がない場合の式である .

有次元

理想気体の状態方程式は次式となる .

$$\bar{p} = \bar{\rho}\bar{\mathfrak{R}}\bar{T} \quad (3.43)$$

ここで , $\bar{\mathfrak{R}}$ はガス定数である . ところで , 本研究では $\bar{\mathfrak{R}}$ は温度依存性がない定数として考えているので

$$\bar{p} = \bar{\rho}\bar{\mathfrak{R}}_0\bar{T} \quad (3.44)$$

また ,

$$\bar{\mathfrak{R}}_0 = \bar{c}_{p0} - \bar{c}_{v0} \quad (3.45)$$

の関係がある . 内部エネルギー \bar{e} は , 次式となる .

$$\bar{e} = \bar{c}_{v0}\bar{T} \quad (3.46)$$

以上を状態方程式に代入すると , 次式が得られる .

$$\bar{p} = \bar{\rho}\frac{(\bar{c}_{p0} - \bar{c}_{v0})}{\bar{c}_{v0}}\bar{e} = \bar{\rho}\bar{e}(\gamma_0 - 1) \quad (3.47)$$

但し ,

$$\bar{e}_s = \bar{e} + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) \quad (3.48)$$

よって , \bar{p} は次式となる .

$$\bar{p} = \left[\bar{E}_s - \frac{1}{2}\bar{\rho}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) \right] (\gamma_0 - 1) \quad (3.49)$$

無次元

Eq(3.49) を無次元化すると以下の様になる .

$$(\bar{\rho}_0 \bar{u}_0^2) p = [(\bar{\rho}_0 \bar{u}_0^2) E_s - \frac{1}{2} \bar{\rho}_0 \rho (\bar{u}_0^2 u^2 + \bar{u}_0^2 v^2)] (\gamma_0 - 1) \quad (3.50)$$

$$p = \left[E_s - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right] (\gamma_0 - 1) \quad (3.51)$$

内部エネルギー \bar{e} の無次元化は , 下記に示す通りである .

$\bar{e} = c_{v0} \bar{T}$ より $\frac{\bar{e}}{\bar{u}_0^2} = e$ なので , \bar{u}_0^2 を右辺に移行し無次元化した内部エネルギーの式は次のようになる . ここで式の変形では , 有次元式 $a \doteq \sqrt{\gamma \bar{\rho} T}$ 及び $c_v \doteq \frac{\bar{\rho}}{\gamma - 1}$ の関係式を用いた .

$$e = \frac{c_{v0} \bar{T}}{\bar{u}_0^2} = \frac{c_{v0} T \bar{T}_0}{a_0^2 M_0^2} = \frac{c_{v0} \bar{T}_0}{\gamma_0 \bar{\rho}_0 \bar{T}_0} \frac{T}{M_0^2} = \frac{T}{\gamma_0 (\gamma_0 - 1) M_0^2} \quad (3.52)$$

よって , 温度 T は次式で表すことができる .

$$T = \gamma_0 (\gamma_0 - 1) M_0^2 e = \gamma_0 (\gamma_0 - 1) M_0^2 \left\{ e_s - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right\} \quad (3.53)$$

Eq(3.53) の括弧内に ρ を掛け , 更に Eq(3.51) より ,

$$T = \gamma_0 \frac{1}{\rho} (\gamma_0 - 1) M_0^2 \left\{ E_s - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right\} = \frac{\gamma_0 M_0^2 p}{\rho} \quad (3.54)$$

となる . ここで音速 a は , $\bar{a} = \sqrt{\frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}}}$ より無次元化すると

$$a \bar{u}_0 = \sqrt{\frac{\gamma \bar{p} \bar{\rho}_0 \bar{u}_0^2}{\rho \bar{\rho}_0}} \quad (3.55)$$

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \frac{\sqrt{T}}{M_0} \quad \cdot \text{Eq(3.54)} \quad (3.56)$$

よって無次元マッハ数 M は次式となる . ここで U は無次元の速度 (u, v) の大きさ $U = \sqrt{u^2 + v^2}$ を示す . また Eq3.56 より ,

$$M = \frac{U}{a} = M_0 \sqrt{(u^2 + v^2)/T} \quad (3.57)$$

またエネルギーについては Eq(3.54) を変形すると ,

$$E_s = \frac{\rho T}{\gamma_0 (\gamma_0 - 1) M_0^2} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (3.58)$$

Eq(3.52) より無次元化内部エネルギーは ,

$$e = \frac{T}{\gamma_0 (\gamma_0 - 1) M_0^2} \quad (3.59)$$

ここで無次元化内部エネルギーの式においても , 有次元と同じように以下の式が成り立つと考える .

$$e = c_v T \quad (3.60)$$

したがって , 無次元化定容比熱は次式となる .

$$c_v = \frac{1}{\gamma_0 (\gamma_0 - 1) M_0^2} \quad (3.61)$$

また Eq(3.60) より , T の式を考える .

$$T = \frac{e}{c_v} = \frac{1}{c_v} \left[\frac{E_s}{\rho} - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right] \quad (3.62)$$

3.4 座標変換

流れのシミュレーションを行う場合，物体形状や流れ場の形が単純であれば，デカルト座標を用いて計算ができる．また，円筒形などの場合は，いわゆる円筒座標系を利用すればよい．しかし，実際に解きたい流れ場の多くは，航空機周りやエンジン内部など大変複雑なものであることが多い．流体力学の解析には昔から等角写像が用いられてきた．解析解が既知の流れ場の結果を利用して，それと異なった流れ場の解を等角写像によって遷音速のポテンシャル流れの解法が数多く報告された．これらの研究では，2次元の翼型まわりの流れ場を，円の中やその外部の流れに等角写像によって座標変換し，計算格子を単純なものにすることで計算を可能にした．このような解析的な座標変換に対して，Stegerらは1978年にこの座標変換を数値的にを行うことを提案し，圧縮性のNavier-Stokesを用いて2次元翼型周りの遷音速流れを解いた⁽⁹⁸⁾．以後，ここで提案された物体適合座標 (body-fitted coordinate system)，一般的には一般座標 (generalized coordinate system) の考えは多くの流体シミュレーション分野に広がり，いまや，基礎的な流れ場解析を除いてはあたりまえになった感さえする．本章では，一般座標変換を行った方程式とそのベクトル表示を示す．

3.4.1 チェイン・ルール

二次元の物理平面のCartesian座標系 (x, y) から二次元の計算平面となる一般座標系 (η, ξ) に座標変換を行いたい． (x, y) から (ξ, η) に写像するには，チェイン・ルール (Chain Rule, 偏微分順番の入れ替え) と呼ばれる法則を用いて行う．

まずチェイン・ルールについて簡単に述べる． ξ 方向の微分は， (x, y) 平面との関係から，

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

で与えられる． η 方向の微分も同様に求め，行列で表すと，

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

となる．したがって変数 f の任意方向の微分は，

$$\begin{bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

である．これを f_x, f_y について解く事により，

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \frac{1}{|x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta|} \begin{bmatrix} y_\eta & -y_\xi \\ -x_\eta & x_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

ここで， $|x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi|$ をヤコビアン J とする．

$$J = |x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi|$$

$$f_x = \frac{1}{J} (y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta) \quad (3.64)$$

$$f_y = \frac{1}{J} (-x_\eta f_\xi + x_\xi f_\eta) \quad (3.65)$$

となり，物理平面から計算平面へ座標変換ができる．これをチェイン・ルールと呼ぶ．

これより，このチェイン・ルールを使って，今後の式変形を容易にするための座標変換の関連式を導く．変数 f を ξ (又は η) の条件と置き，チェイン・ルールを適応する．

まず，はじめに ξ 方向について考える．

$$\begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{bmatrix} = \frac{1}{|x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta|} \begin{bmatrix} y_\eta & -y_\xi \\ -x_\eta & x_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_\xi \\ \xi_\eta \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

ここで $\xi_\xi = 1, \xi_\eta = 0$ となるのは，自明であろう．よって，

$$\begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{bmatrix} = \frac{1}{|x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta|} \begin{bmatrix} y_\eta & -y_\xi \\ -x_\eta & x_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

次に η 方向について同様に考える．

$$\begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{bmatrix} = \frac{1}{|x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta|} \begin{bmatrix} y_\eta & -y_\xi \\ -x_\eta & x_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_\xi \\ \eta_\eta \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$\eta_\xi = 0, \eta_\eta = 1$ より

$$\begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{bmatrix} = \frac{1}{|x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta|} \begin{bmatrix} y_\eta & -y_\xi \\ -x_\eta & x_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

よって以上のことより，ヤコビアン $J = |x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta|$ と置きまとめると，

$$\xi_x = \frac{1}{J} y_\eta \quad \eta_x = -\frac{1}{J} y_\xi \quad \xi_y = -\frac{1}{J} x_\eta \quad \eta_y = \frac{1}{J} x_\xi \quad (3.70)$$

さらに，

$$x_\xi = J \eta_y \quad x_\eta = -J \xi_y \quad y_\xi = -J \eta_x \quad y_\eta = J \xi_x \quad (3.71)$$

これらの関係を使い，基礎方程式を Cartesian 座標系から一般座標系に座標変換を行う．

3.4.2 一般座標変換（凝縮無の場合）

スカラー方程式における一般座標変換

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

上式に先程導出した ξ, η を代入する .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial(\rho u)}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{1}{J} \frac{\partial(\rho v)}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{1}{J} \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} = 0$$

全体に J をかける .

$$\begin{aligned} J \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial(\rho u)}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= 0 \\ J \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial(\rho u)}{\partial \eta} y_\xi - \frac{\partial(\rho v)}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} x_\xi &= 0 \\ J \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial(\rho v)}{\partial \xi} x_\eta \right] + \left[\frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} x_\xi - \frac{\partial(\rho u)}{\partial \eta} y_\xi \right] &= 0 \\ J \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} [\rho u y_\eta - \rho v x_\eta] + \frac{\partial}{\partial \eta} [\rho v x_\xi - \rho u y_\xi] &= 0 \\ J \frac{\partial \rho}{\partial t} + J \frac{\partial}{\partial \xi} [\rho(\xi_x u + \xi_y v)] + J \frac{\partial}{\partial \eta} [\rho(\eta_x u + \eta_y v)] &= 0 \end{aligned}$$

ここで , 反変速度 U, V を考えると ,

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$U = \xi_x u + \xi_y v \quad (3.72)$$

$$V = \eta_x u + \eta_y v \quad (3.73)$$

したがって ,

$$J \frac{\partial \rho}{\partial t} + J \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U) + J \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V) = 0$$

これが連続の式を一般座標変換したものになる .

運動方程式

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right]$$

移項を行うと、

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} = \frac{1}{Re_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right]$$

まず、上式の左辺について考える。

$$\text{左辺} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

これを ξ, η を用いて変換すると、

$$\text{左辺} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial(\rho u u)}{\partial \xi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial(\rho u u)}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial(\rho u v)}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial(\rho u v)}{\partial \eta} \quad (3.74)$$

次に右辺を P, Q で以下のようにして、考える。

$$\text{右辺} = \frac{1}{Re_0} \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right]$$

$$P = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$Q = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

P について考える。

$$\begin{aligned} P &= 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ &= 2\mu \left(\frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \lambda \left(\frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \end{aligned}$$

ここで全体 (ただし $\frac{\partial}{\partial x}$ のみ考慮) を座標変換する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{1}{J} \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial P}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{aligned}$$

次に Q について考える。

$$\begin{aligned} Q &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ &= \mu \left(-\frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \end{aligned}$$

ここで全体 (ただし $\frac{\partial}{\partial y}$ のみ考慮) を座標変換する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= -\frac{1}{J} \frac{\partial Q}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{1}{J} \frac{\partial Q}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{aligned}$$

これまでに導出したもの Eq(3.74)~Eq(3.4.2) を合わせると ,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial(\rho u u)}{\partial \xi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial(\rho u u)}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial(\rho u v)}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial(\rho u v)}{\partial \eta} \\
&= \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(2\mu \left(\frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \lambda \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \right) \right. \\
&\quad - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu \left(\frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \lambda \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\left(-\frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \mu \right) \\
&\quad \left. - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\left(-\frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \mu \right) \right]
\end{aligned}$$

連続の式と同様に全体に J をかけて整理すると ,

$$J \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + J \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho u U + \xi_x p) + J \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho u V + \eta_x p) = \frac{1}{Re_0} \left[J \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{xy}) + J \frac{\partial}{\partial \eta}(\eta_x \tau_{xy} + \eta_y \tau_{xx}) \right]$$

次に y 方向は x 方向の場合と同様にして ,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial(\rho v v)}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial(\rho v v)}{\partial \xi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial(\rho u v)}{\partial \eta} + \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial(\rho u v)}{\partial \xi} \\
&= \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu \left(\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \lambda \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \right) \right. \\
&\quad - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(2\mu \left(\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \lambda \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\left(-\frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \mu \right) \\
&\quad \left. - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\left(-\frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \mu \right) \right]
\end{aligned}$$

全体に J をかけて整理すると ,

$$J \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + J \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho v U + \xi_y p) + J \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho v V + \eta_y p) = \frac{1}{Re_0} \left[J \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi_x \tau_{xy} + \xi_y \tau_{yy}) + J \frac{\partial}{\partial \eta}(\eta_x \tau_{yy} + \eta_y \tau_{xy}) \right]$$

これが運動方程式を一般座標変換したものになる .

エネルギー方程式

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial E_s}{\partial t} + \left(\frac{\partial(E_s u)}{\partial x} + \frac{\partial(E_s v)}{\partial y} \right) - \frac{1}{N} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial(u p)}{\partial x} + \frac{\partial(v p)}{\partial y} \\
& - \frac{1}{Re_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[u \left(\kappa + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial u}{\partial x} + (v \mu) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[u \left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial v}{\partial y} + (v \mu) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[v \left(\kappa + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial v}{\partial y} + (u \mu) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[v \left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial u}{\partial x} + (u \mu) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right] = 0
\end{aligned}$$

$\frac{1}{Re_0}$ 以前の部分を考える .

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial(E_s u)}{\partial x} + \frac{\partial(E_s v)}{\partial y} - \frac{1}{N} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} \\
&= \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial(E_s u)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial(E_s u)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial(E_s v)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial(E_s v)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&\quad - \frac{1}{N} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + k \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] \\
&\quad + \frac{\partial(up)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial(up)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial(vp)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial(E_s u)}{\partial \xi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial(E_s u)}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial(E_s v)}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial(E_s v)}{\partial \eta} \\
&\quad - \frac{1}{N} \left[\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J} k \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{1}{J} k \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J} k \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{1}{J} k \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{J} k \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{1}{J} k \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{J} k \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{1}{J} k \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \\
&\quad + \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial(up)}{\partial \xi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial(up)}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial(vp)}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial(vp)}{\partial \eta}
\end{aligned}$$

次に $\frac{1}{Re_0}$ 以下の部分を $\frac{\partial}{\partial x}$ と $\frac{\partial}{\partial y}$ の二つの部分に分けて考える . まず初めに $\frac{\partial}{\partial x}$ の方を考えると ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[u \left(\kappa + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial u}{\partial x} + (v\mu) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[u \left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial v}{\partial y} + (v\mu) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (3.75)$$

Eq(3.75) の始めの [] の中を E , 後ろの [] の中を F と置くと ,

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{J} u \left(\kappa + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{J} u \left(\kappa + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{J} (v\mu) \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{J} (v\mu) \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \\
F &= -\frac{1}{J} u \left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{J} u \left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{1}{J} (v\mu) \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{J} (v\mu) \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial E}{\partial \xi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial E}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial F}{\partial \eta}$$

次に後ろの $\frac{\partial}{\partial y}$ の部分について考える .

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[v \left(\kappa + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial v}{\partial y} + (u\mu) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[v \left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial u}{\partial x} + (u\mu) \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

上の始めの [] の中を G , 後ろの [] の中を H と置くと ,

$$G = -\frac{1}{J} v \left(\kappa + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{1}{J} v \left(\kappa + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{1}{J} (u\mu) \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{1}{J} (u\mu) \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$H = \frac{1}{J} v \left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{J} v \left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{J} (u\mu) \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{J} (u\mu) \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial G}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial G}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial H}{\partial \eta}$$

以上これら全てを合わせると，エネルギー方程式は，

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial (E_s u)}{\partial \xi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial (E_s u)}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial (E_s v)}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial (E_s v)}{\partial \eta} \\ & - \frac{1}{N} \left[\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J} k \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{1}{J} k \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J} k \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{1}{J} k \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{J} k \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{1}{J} k \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{J} k \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{1}{J} k \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right] \\ & + \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial (up)}{\partial \xi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial (up)}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial (vp)}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial (vp)}{\partial \eta} \\ & - \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{1}{J} u \left(\kappa + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{J} u \left(\kappa + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{J} (v\mu) \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{J} (v\mu) \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right. \\ & + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(-\frac{1}{J} u \left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{J} u \left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{1}{J} (v\mu) \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{J} (v\mu) \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ & + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(-\frac{1}{J} v \left(\kappa + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{1}{J} v \left(\kappa + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{1}{J} (u\mu) \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{1}{J} (u\mu) \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \\ & \left. + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{1}{J} v \left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{J} v \left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{J} (u\mu) \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{J} (u\mu) \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

J をかけて整理すると，

$$J \frac{\partial E_s}{\partial t} + J \frac{\partial}{\partial \xi} ((E_s + p)U) + J \frac{\partial}{\partial \eta} ((E_s + p)V) = \frac{1}{Re_0} \left[J \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi_x \alpha + \xi_y \beta) + J \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta_x \alpha + \eta_y \beta) \right]$$

ここで

$$\alpha = u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + \frac{\mu}{(\gamma_0 - 1)Pr'_0} T_x \quad (3.76)$$

$$\beta = u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + \frac{\mu}{(\gamma_0 - 1)Pr'_0} T_y \quad (3.77)$$

これが，エネルギー方程式を一般座標変換したものになる．

一般曲座標系オイラー方程式

デカルト座標系においてベクトル形式で表された2次元オイラー方程式(微分型)は,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = 0$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ (E_s + p)u \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ p + \rho v^2 \\ (E_s + p)v \end{bmatrix}$$

ただしこれらは無次元化済みである.

ここで Chain rule を用いて,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \xi_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta} \\ &= \frac{1}{J} y_\eta \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} - \frac{1}{J} y_\xi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta} \\ &= \frac{1}{J} \left(y_\eta \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= \xi_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} \\ &= -\frac{1}{J} x_\eta \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + \frac{1}{J} x_\xi \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} \\ &= \frac{1}{J} \left(-x_\eta \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + x_\xi \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} \right) \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{J} \left(y_\eta \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{J} \left(-x_\eta \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + x_\xi \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} \right) &= 0 \\ J \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (y_\eta \mathbf{E} - x_\eta \mathbf{F}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (x_\xi \mathbf{F} - y_\xi \mathbf{E}) &= 0 \\ J \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (J \xi_x \mathbf{E} + J \xi_y \mathbf{F}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J \eta_y \mathbf{F} + J \eta_x \mathbf{E}) &= 0 \end{aligned}$$

ここで,

$$\hat{\mathbf{U}} = J\mathbf{U} \quad \hat{\mathbf{E}} = J(\xi_x \mathbf{E} + \xi_y \mathbf{F}) \quad \hat{\mathbf{F}} = J(\eta_x \mathbf{E} + \eta_y \mathbf{F}) \quad (3.78)$$

とすると,

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial \eta} = 0 \quad (3.79)$$

となる.

ここで反変速度 (計算面での速度) U, V を考えると,

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

より,

$$U = \xi_x u + \xi_y v \quad (3.81)$$

$$V = \eta_x u + \eta_y v \quad (3.82)$$

であり, この反変速度 U, V を用いて変換された流束を表すと,

$$\hat{\mathbf{U}} = J \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_s \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{E}} = J \begin{bmatrix} \xi_x \rho u + \xi_y \rho v \\ \xi_x (p + \rho u^2) + \xi_y \rho v u \\ \xi_x \rho u v + \xi_y (p + \rho v^2) \\ \xi_x (E_s + p) u + \xi_y (E_s + p) v \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ (E_s + p) U \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{F}} = J \begin{bmatrix} \eta_x \rho u + \eta_y \rho v \\ \eta_x (p + \rho u^2) + \eta_y \rho v u \\ \eta_x \rho u v + \eta_y (p + \rho v^2) \\ \eta_x (E_s + p) u + \eta_y (E_s + p) v \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ (E_s + p) V \end{bmatrix}$$

一般曲座標系ナビエストークス方程式

無次元化したナビエストークス方程式 (微分型) は,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{1}{Re_0} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \right)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho u v \\ (E_s + p) u \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ p + \rho v^2 \\ (E_s + p) v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda(u_x + v_y) + 2\mu u_x \\ \mu(u_y + v_x) \\ u\{\lambda(u_x + v_y) + 2\mu u\} + v\mu(v_x + u_y) + \frac{\mu}{(\gamma_0 - 1)Pr_0} T_x \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu(u_y + v_x) \\ \lambda(u_x + v_y) + 2\mu u_x \\ u\mu(u_y + v_x) + v\{\lambda(u_x + v_y) + 2\mu v_y\} + \frac{\mu}{(\gamma_0 - 1)Pr_0} T_y \end{bmatrix}$$

まず右辺についてのみ考える．

$$(\text{右辺}) = \frac{1}{Re_0} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \right)$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \xi_x \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= \xi_y \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \eta} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{1}{Re_0} \left(\xi_x \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{1}{Re_0} \frac{1}{J} \left(y_\eta \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} - x_\eta \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} + x_\xi \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{1}{Re_0} \frac{1}{J} \left(J\xi_x \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} + J\eta_x \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} + J\xi_y \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \xi} + J\eta_y \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \eta} \right) \end{aligned}$$

ここで(左辺)(右辺)の両辺に J をかけると，(左辺)はオイラー方程式で求めたものと同じになる．よってここでは省略する．

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{1}{Re_0} \left(J\xi_x \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} + J\eta_x \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} + J\xi_y \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \xi} + J\eta_y \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{1}{Re_0} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \{J(\xi_x \mathbf{R} + \xi_y \mathbf{S})\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \{J(\eta_x \mathbf{R} + \eta_y \mathbf{S})\} \right] \end{aligned}$$

ここで，

$$\hat{\mathbf{R}} = J(\xi_x \mathbf{R} + \xi_y \mathbf{S}) \quad \hat{\mathbf{S}} = J(\eta_x \mathbf{R} + \eta_y \mathbf{S}) \quad (3.83)$$

とおくと，

$$(\text{右辺}) = \frac{1}{Re_0} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{S}}}{\partial \eta} \right)$$

となる．よって一般曲座標系ナビエーストックス方程式は，

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re_0} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{S}}}{\partial \eta} \right)$$

流束ベクトルは，

$$\hat{\mathbf{U}} = J \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_s \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{E}} = J \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ (E_s + p)U \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{F}} = J \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ (E_s + p)V \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{R}} = J \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{xy} \\ \xi_x \tau_{xy} + \xi_y \tau_{yy} \\ \xi_x \alpha + \xi_y \beta \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{S}} = J \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xy} + \eta_y \tau_{xx} \\ \eta_x \tau_{yy} + \eta_y \tau_{xy} \\ \eta_x \alpha + \eta_y \beta \end{bmatrix}$$

ここで，各粘性応力

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -\frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= -\frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - 3\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{2}{3}\mu \left(-2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{2}{3}\mu \left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu(u_y + v_x) \\ &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yy} &= \lambda(u_x + v_y) + 2\mu u_x \\ &= -\frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu u_x \\ &= \frac{2}{3}\mu \left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.86)$$

ただし，

$$\alpha = u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + \frac{\mu}{(\gamma_0 - 1)Pr'_0} T_x \quad (3.87)$$

$$\beta = u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + \frac{\mu}{(\gamma_0 - 1)Pr'_0} T_y \quad (3.88)$$

3.4.3 一般座標変換（凝縮有の場合）

システム方程式における一般座標変換

本節では，凝縮を伴う場合の支配方程式を座標変換する方法について述べることにする．

二次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式と凝縮量の保存式は，Cartesian 座標系において，無次元保存系表示で次のようになる．

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{1}{Re_0} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \right) + \mathbf{Q} \quad (3.89)$$

ここで，

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho_m \\ \rho_m u \\ \rho_m v \\ E_s \\ \rho_m g \\ \rho_m D_1 \\ \rho_m D_2 \\ \rho_m D_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho_m u \\ \rho_m u^2 + p \\ \rho_m uv \\ u(E_s + p) \\ \rho_m gu \\ \rho_m D_1 u \\ \rho_m D_2 u \\ \rho_m D_3 u \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho_m v \\ \rho_m uv \\ \rho_m v^2 + p \\ v(E_s + p) \\ \rho_m gv \\ \rho_m D_1 v \\ \rho_m D_2 v \\ \rho_m D_3 v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ u \left(\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + v \left(\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\mu}{(\gamma_0 - 1) Pr_0'} \frac{\partial T}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ u \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \left(\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{(\gamma_0 - 1) Pr_0'} \frac{\partial T}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho_m \dot{g} \\ \rho_m \dot{D}_1 \\ \rho_m \dot{D}_2 \\ \rho_m \dot{D}_3 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

これらの式において， ρ_m, u, v はそれぞれ混合気体の密度， x 方向の速度成分， y 方向の速度成分， r_c は臨界クラスター半径，小文字の c は局所平衡状態を示している． g は凝縮量， p は混合気体の圧

力, E_s は混合気体の単位体積当たりの全エネルギーで,

$$E_s \doteq \rho_m c_{p0} T + \frac{1}{2} \rho_m (u^2 + v^2) - \rho_m g L \quad (3.91)$$

である. ただし, これは有次元の式で L は凝縮潜熱, c_{p0} は混合気体の定圧比熱である.

また, 凝縮速度式は, 前述の有次元式 Eq(2.64) ~ Eq(2.67) より,

$$\frac{dg}{dt} \doteq 4\pi \rho_c \left[\frac{I(t)}{\rho_m(t)} \frac{r_c^3(t)}{3} + \frac{d\bar{r}}{dt} \int_{t_i}^t \left\{ \frac{I(\tau)}{\rho_m(\tau)} (r_c(\tau) + \int_{\tau}^t \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot d\theta)^2 \right\} d\tau \right] \quad (3.92)$$

$$\frac{dg}{dt} \doteq \frac{\rho_c}{\rho_m} \left\{ \frac{4\pi}{3} r_c^3 I + \rho_m D_1 \frac{d\bar{r}}{dt} \right\} \quad (3.93)$$

$$\frac{dD_1}{dt} \doteq \frac{4\pi r_c^2 I}{\rho_m} + D_2 \frac{d\bar{r}}{dt} \quad (3.94)$$

$$\frac{dD_2}{dt} \doteq \frac{8\pi r_c I}{\rho_m} + D_3 \frac{d\bar{r}}{dt} \quad (3.95)$$

$$\frac{dD_3}{dt} \doteq \frac{8\pi I}{\rho_m} \quad (3.96)$$

ここで, \bar{r} は

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{2D_1}{D_3}} \quad (3.97)$$

また, 凝縮量の保存式には, 単位体積当たりに生成・消滅する凝縮量を表す SOURCE 項が付加される. ここで \dot{g} , \dot{D}_1 , \dot{D}_2 , \dot{D}_3 は, Eq(2.64) ~ Eq(2.67) の有次元計算式を次のように無次元化する.

$$\begin{aligned} \dot{g} &= \frac{dg}{dt} = \frac{dg}{d\bar{t}/(L/\bar{u}_0)} = \frac{\bar{L}}{\bar{u}_0} \cdot \frac{dg}{d\bar{t}} \\ \dot{D}_1 &= \frac{dD_1}{dt} = \frac{dD_1 \bar{L}}{d\bar{t}/(L/\bar{u}_0)} = \frac{\bar{L}^2}{\bar{u}_0} \cdot \frac{d\bar{D}_1}{d\bar{t}} \\ \dot{D}_2 &= \frac{dD_2}{dt} = \frac{dD_2 \bar{L}^2}{d\bar{t}/(L/\bar{u}_0)} = \frac{\bar{L}^3}{\bar{u}_0} \cdot \frac{d\bar{D}_2}{d\bar{t}} \\ \dot{D}_3 &= \frac{dD_3}{dt} = \frac{dD_3 \bar{L}^3}{d\bar{t}/(L/\bar{u}_0)} = \frac{\bar{L}^4}{\bar{a}_0} \cdot \frac{d\bar{D}_3}{d\bar{t}} \end{aligned}$$

ここで, \bar{L} , \bar{a}_0 は無次元化のためのパラメータで, それぞれ代表長さとして代表速度 (淀み点状態の混合気体の音速) である. また, $-$ は有次元を示している.

一般座標変換を行うと,

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re_0} \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} \right) + \hat{Q} \quad (3.98)$$

ここで,

$$\hat{U} = J \begin{bmatrix} \rho_m \\ \rho_m u \\ \rho_m v \\ E_s \\ \rho_m g \\ \rho_m D_1 \\ \rho_m D_2 \\ \rho_m D_3 \end{bmatrix} \quad \hat{E} = J \begin{bmatrix} \rho_m U \\ \rho_m uU + \xi_x p \\ \rho_m vU + \xi_y p \\ (E_s + p)U \\ \rho_m gU \\ \rho_m D_1 U \\ \rho_m D_2 U \\ \rho_m D_3 U \end{bmatrix} \quad \hat{F} = J \begin{bmatrix} \rho_m V \\ \rho_m uV + \eta_x p \\ \rho_m vV + \eta_y p \\ (E_s + p)V \\ \rho_m gV \\ \rho_m D_1 V \\ \rho_m D_2 V \\ \rho_m D_3 V \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{R}} = J \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{xy} \\ \xi_x \tau_{xy} + \xi_y \tau_{yy} \\ \xi_x \alpha + \xi_y \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{S}} = J \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{xy} \\ \eta_x \tau_{xy} + \eta_y \tau_{yy} \\ \eta_x \alpha + \eta_y \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{Q}} = J \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho_m \dot{g} \\ \rho_m \dot{D}_1 \\ \rho_m \dot{D}_2 \\ \rho_m \dot{D}_3 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

となる．ここで，次式に注意する．

$$\begin{aligned} \hat{U} &= JU, \hat{E} = J(\xi_x E + \xi_y F), \hat{F} = J(\eta_x E + \eta_y F), \\ \hat{R} &= J(\xi_x R + \xi_y S), \hat{S} = J(\eta_x R + \eta_y S) \end{aligned} \quad (3.100)$$

なお，

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{|x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta|} \quad (3.101)$$

$$\xi_x = \frac{1}{J} y_\eta \quad \eta_x = -\frac{1}{J} y_\xi \quad (3.102)$$

$$\xi_y = -\frac{1}{J} x_\eta \quad \eta_y = \frac{1}{J} x_\xi \quad (3.103)$$

さらに，

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{p_v - p_{s,r}}{\rho_l \sqrt{2\pi \mathfrak{R}_v T}} \quad (3.104)$$

気相とクラスターは局所平衡 ($T = T_c$) を仮定．

$$r_c = \frac{2\sigma_\infty}{\rho_l \mathfrak{R}_v T \ln(p_v/p_{s,\infty})} \quad (3.105)$$

$$I_F = \frac{1}{\rho_l} \sqrt{\frac{2m_v \sigma_\infty}{\pi}} \left(\frac{p_v}{kT} \right)^2 \exp \left\{ \frac{-4\pi r_c^2 \sigma_\infty}{3kT} \right\} \quad (3.106)$$

3.5 圧縮性乱流モデルの基礎式

厳密な意味での圧縮性乱流用のモデルはいまだ確立していない．”圧縮性乱流においても非圧縮性の $k - \epsilon$ モデルを用いてよい”とする理論的根拠は，下記の Morkovin の仮説にある．

Morkovin の仮説

境界層流れでは主流のマッハ数が 5 以下，噴流ではマッハ数 1.5 以下ならば，圧縮性による乱流構造の変化はないとされており，その範囲では質量加重平均 (Favre 平均) を用いて生ずるレイノルズ応力 $-\overline{\rho u_i' u_j'}$ をアンサンブル平均 (レイノルズ平均) でのレイノルズ応力 $-\overline{\rho u_i' u_j'}$ と同様に扱って良いことになる．

上記のことは，最近の圧縮性乱流の直接数値計算 (DNS) による結果，衝撃波付近においては，Morkovin の仮説は全く成り立たないことが確かめられた．一方で，現在までの圧縮性の流れの解析では，常識のようにファール平均を用いた基礎方程式の分解及びモデル化が行われてきた．しかしながら，この方法では，平均化された基礎方程式にファール平均とレイノルズ平均が混在して複雑となるため，各項の意味が曖昧になり，正確なモデル化が困難になる．

平均流の方程式を解くのに，通常のレイノルズ平均の他に，ファール平均 (密度重みを用いたレイノルズ平均，あるいは，質量重み平均) も用いられている．これは，平均化された慣性項が簡単になるためである．また，亜音速，遷音速，超音速の前半においてはファール平均は圧縮性の乱流への影響をよく捕らえられるといわれている．

3.5.1 レイノルズ平均

乱れている物理量 $f(x, t)$ は一般に平均量 \bar{f} と平均量からの変動量 f' の和として書ける．

$$f = \bar{f} + f'$$

平均量 \bar{f} を求める平均化操作には，時間に対する平均，空間 (体積) に対する平均，測定回数に対する平均を求める方法がある．それぞれ次のように呼ばれ，この 3 種類の平均化をレイノルズ平均と呼ぶ⁽¹⁰⁹⁾．

1. 時間平均 (time average)
2. 空間平均 (volume average)
3. 集合平均 (アンサンブル平均，ensemble average)

ここで，統計的にみて定常な物理量の長時間平均は集合平均に等しく，これをエルゴートの仮説 (ergodic hypothesis) という．また統計的に見て一様な物理量の空間平均は集合平均に等しい (Tennekes-Lumley, 1972)．ただし，現象が非定常な場合，時間平均では，時間間隔が変動成分が平均化される大きさでなくてはならず，空間平均では，空間が微視的空間 (マイクロ) スケールに較べて十分大きいものでなくてはならない．このような関係からレイノルズ平均は，一般的に集合平均として取り扱う．レイノルズ平均は，次に示す性質を持つことが定義されている．

$$f = \bar{f} + f'$$

$$\bar{f}' = 0$$

$$\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'}$$

$$\overline{f'g} = 0$$

また，レイノルズ平均は次の性質がある．

$$\overline{\bar{f}} = \bar{f}$$

$$\overline{\bar{f}g} = \bar{f}\bar{g}$$

$$\overline{\bar{f} + g} = \bar{f} + \bar{g}$$

$$\overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}$$

$$\overline{\int_a^b f dt} = \int_a^b f dt$$

$$\bar{f}' = 0$$

3.5.2 ファーブル平均

重みに密度を用いた Reynolds 平均（密度加重平均）をファーブル平均という．

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}$$

レイノルズ平均した値をレイノルズ平均した密度でさらに割ったものである．ここで， $\bar{\quad}$ は Reynolds 平均の平均量， $\tilde{\quad}$ はファーブル平均の平均量を示す．

ファーブル平均は，レイノルズ平均同様に，ある物理量 f をファーブル平均の平均量 \tilde{f} とファーブル平均の変動量 f'' の和として書かれる．

$$f = \tilde{f} + f''$$

これらファーブル平均の定義を列記すると，次のように上げられる．

$$f = \tilde{f} + f''$$

$$\overline{\rho f} = \tilde{f} \bar{\rho}$$

$$fg = \tilde{f}\tilde{g} + f''g''$$

$$\tilde{\tilde{f}} = \tilde{f}$$

$$\tilde{\tilde{f}g} = 0$$

特にこの性質が成り立つことで，圧縮性乱流が非圧縮性乱流と同様に取り扱いが出来るようになる．

$$\overline{\rho f g} = \bar{\rho} \tilde{f} \tilde{g} + \bar{\rho} \widetilde{f'' g''}$$

また，その他，ファール平均の性質として下記のものがある．

$$\overline{\rho f''} = 0$$

$$\bar{f}'' \neq 0$$

3.5.3 基礎方程式の平均化

乱流解析に用いられる基礎方程式は，アンサンブル平均の式（アンサンブル平均 NS 方程式）と乱流モデルである．この節では，日頃あまり考えずに使用されるアンサンブル平均の式の導出過程を述べる．アンサンブル平均の式を導くにあたって，各物理量の瞬間値を平均と乱れ成分に分け，アンサンブル平均を取る．ただし圧縮性流体の場合，非圧縮性流体と異なり，結果を簡単にするため，次のように密度・圧力をレイノルズ平均，その他の物量をファール平均で考える．

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad p = \bar{p} + p' \quad (\text{レイノルズ平均})$$

$$v_i = \tilde{v}_i + v_i'', \quad h = \tilde{h} + h'', \quad T = \tilde{T} + T'' \quad (\text{ファール平均})$$

このとき基礎方程式は下記のようになる．

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

まず，各項の成分を平均量と変動量に分割すると，次のようになる．

$$\frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u} + (\rho u)')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{v} + (\rho v)')}{\partial y} = 0$$

ここで，連続の式を平均流連続の式と変動量連続の式に分ける．

(連続の式) = (平均流連続の式) + (変動量連続の式)

・平均流連続の式

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{v})}{\partial y} = 0$$

・変動量連続の式

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)'}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)'}{\partial y} = 0$$

ここで，本研究では平均流の流れ場を着目しており，平均流連続の式のみ考える．次に，平均流の連続の式に対し，ファール平均の式を代入する．

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}(\tilde{u} + u''))}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}(\tilde{v} + v''))}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{u} + \overline{\rho u''})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{v} + \overline{\rho v''})}{\partial y} = 0$$

さらに， $\overline{\rho f''} = 0$ の関係より，ファール平均の変動量に関する項が消去され次式のようになる．

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v})}{\partial y} = 0$$

このように，平均化した方程式は平均化前の形と変わらず保存される．
 圧縮性流体の式で，ファールブル平均を考えるのは，密度変化も伴うためレイノルズ平均の式だけでは，次のようになり，方程式の形が保存されないためである．

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u} + \overline{\rho'u'})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v} + \overline{\rho'v'})}{\partial y} = 0$$

運動量の式

[x 方向]

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = \frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}$$

[y 方向]

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(p + \rho v^2)}{\partial y} = \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}$$

まず，x 方向の場合を連続の式同様に平均化を行なう．

x 方向の左辺について．

$$\text{左辺} = \frac{\partial(\overline{\rho u} + (\rho u)')}{\partial t} + \frac{\partial((\bar{p} + p') + (\overline{\rho u^2} + (\rho u^2)'))}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho uv} + (\rho uv)')}{\partial y}$$

この場合も平均流のみ考え

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{\partial(\overline{\rho u})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{p} + \overline{\rho u^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho uv})}{\partial y} \\ &= \frac{\partial(\overline{\rho u})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{p} + \overline{\rho u u})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho uv})}{\partial y} \quad \because \overline{\rho g} = \bar{\rho} \tilde{g} \\ &= \frac{\partial(\overline{\rho u})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{p} + \overline{\rho u u} + \overline{\rho u'' u''})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho u v} + \overline{\rho u'' v''})}{\partial y} \quad \because \overline{\rho f g} = \bar{\rho} \tilde{f} \tilde{g} + \bar{\rho} \widetilde{f'' g''} \end{aligned}$$

x 方向の右辺について．右辺全体の平均化を考える前に，粘性応力の平均化を行なう．

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}$$

$$(\overline{\tau_{ij}} + \tau'_{ij}) = \mu \left(\frac{\partial(\overline{u_i} + u'_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{u_j} + u'_j)}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial(\overline{u_l} + u'_l)}{\partial x_l}$$

平均流のみ考える．

$$\overline{\tau_{ij}} = \mu \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial \overline{u_l}}{\partial x_l}$$

ここで， δ_{ij} は，クロネッカーの δ 関数で， $i = j$ の時 $\delta_{ij} = 1$ で， $i \neq j$ の時 $\delta_{ij} = 0$ となる．ここで，この粘性応力は，層流で重要な役割を果たし乱流では無視できるので，層流では $\bar{u} = \tilde{u}$ と考えられ，応力は次のように取り扱う．

$$\overline{\tau_{ij}} = \widetilde{\tau_{ij}} = \mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l}$$

この関係を利用し，右辺全体の平均流のみ考えた平均化は，次のようになる．

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \frac{\partial(\overline{\tau_{xx}} + \tau'_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\tau_{xy}} + \tau'_{xy})}{\partial y} \\
&= \frac{\partial\overline{\tau_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{\tau_{xy}}}{\partial y} \quad \because \text{平均流のみ考える} \\
&= \frac{\partial\widetilde{\tau_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial\widetilde{\tau_{xy}}}{\partial y}
\end{aligned}$$

以上より，平均流の x 方向運動量の式は，

$$\frac{\partial(\overline{\rho\tilde{u}})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{p} + \overline{\rho\tilde{u}\tilde{u}} + \overline{\rho u'' u''})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho\tilde{u}\tilde{v}} + \overline{\rho u'' v''})}{\partial y} = \frac{\partial\overline{\tau_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{\tau_{xy}}}{\partial y}$$

同様に平均流の y 方向運動量の式は

$$\frac{\partial(\overline{\rho\tilde{v}})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho\tilde{u}\tilde{v}} + \overline{\rho u'' v''})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{p} + \overline{\rho\tilde{v}\tilde{v}} + \overline{\rho v'' v''})}{\partial y} = \frac{\partial\overline{\tau_{yx}}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{\tau_{yy}}}{\partial y}$$

ここで $\overline{\rho u''_i u''_j}$ は，乱流運動による応力つまりレイノルズ応力である．応力なのでそれぞれ左辺に移行し粘性応力とまとめると，それぞれ次のように方程式の左辺が保存された形なる．

$$\begin{aligned}
[x \text{ 方向}] \quad & \frac{\partial(\overline{\rho\tilde{u}})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{p} + \overline{\rho\tilde{u}\tilde{u}})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho\tilde{u}\tilde{v}})}{\partial y} = \frac{\partial(\overline{\tau_{xx}} - \overline{\rho u'' u''})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\tau_{xy}} - \overline{\rho u'' v''})}{\partial y} \\
[y \text{ 方向}] \quad & \frac{\partial(\overline{\rho\tilde{v}})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho\tilde{u}\tilde{v}})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{p} + \overline{\rho\tilde{v}\tilde{v}})}{\partial y} = \frac{\partial(\overline{\tau_{yx}} - \overline{\rho u'' v''})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\tau_{yy}} - \overline{\rho v'' v''})}{\partial y}
\end{aligned}$$

エネルギーの式

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial((E_s + p)u)}{\partial x} + \frac{\partial((E_s + p)v)}{\partial y} = \frac{\partial(u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + kT_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + kT_y)}{\partial y}$$

ここで， E_s は単位体積あたりの全エネルギーであり，単位質量当たりの内部エネルギー e を用いて，次のように表す事ができる．

$$E_s = \rho e_s = \rho \left\{ e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right\}$$

エネルギーの式を平均化するのに各項について考える．

(左辺 第1項)

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} = \frac{\partial(\rho e_s)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left\{ e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right\} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2}(\rho u^2 + \rho v^2) \right)$$

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left((\overline{\rho e} + (\rho e)') + \frac{1}{2} \{ (\overline{\rho u^2} + (\rho u^2)') + (\overline{\rho v^2} + (\rho v^2)') \} \right)$$

ここでも平均流のみ考えて，ファール平均を行うと，

$$\begin{aligned}
\text{左辺第1項} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\rho e} + \frac{1}{2}(\overline{\rho u^2} + \overline{\rho v^2}) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\rho e} + \frac{1}{2}(\overline{\rho\tilde{u}\tilde{u}} + \overline{\rho u'' u''} + \overline{\rho\tilde{v}\tilde{v}} + \overline{\rho v'' v''}) \right) \\
&\quad \because \overline{\rho f} = \overline{\rho\tilde{f}} + \overline{\rho f''} \quad , \quad \overline{\rho f g} = \overline{\rho\tilde{f}\tilde{g}} + \overline{\rho f'' g''} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\rho} \{ \tilde{e} + \frac{1}{2}(\tilde{u}\tilde{u} + \tilde{v}\tilde{v}) + \frac{1}{2}(u'' u'' + v'' v'') \} \right)
\end{aligned}$$

ここで, $\frac{1}{2}(\widetilde{u''u''} + \widetilde{v''v''})$ は乱流エネルギー k であり⁽¹⁰⁴⁾⁽¹⁰⁵⁾, 単位質量当たりの平均流全エネルギー \tilde{e} は, この乱流エネルギーを考慮した形になる⁽¹⁰⁶⁾.

$$\tilde{e}_s = \tilde{e} + \frac{1}{2}(\widetilde{u\tilde{u}} + \widetilde{v\tilde{v}}) + \frac{1}{2}(\widetilde{u''u''} + \widetilde{v''v''})$$

よって, 左辺の第1項は, 平均流で次のようになり, 式が保存される.

$$\text{左辺第1項} = \frac{\partial(\overline{\rho\tilde{e}_s})}{\partial t}$$

(左辺 第2項)

$$\begin{aligned} \frac{\partial((E_s + p)u)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}([\rho\{e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)\} + p]u) = \frac{\partial}{\partial x}(\{\rho ue + \frac{1}{2}(\rho u^3 + \rho uv^2)\} + pu) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}[(\overline{\rho ue} + (\rho ue)') + \frac{1}{2}\{(\overline{\rho u^3} + (\rho u^3)') + (\overline{\rho uv^2} + (\rho uv^2)')\} + (\overline{pu} + (pu)')] \end{aligned}$$

平均流のみ考えると,

$$\text{左辺第2項} = \frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho ue} + \frac{1}{2}(\overline{\rho u^3} + \overline{\rho uv^2}) + \overline{pu})$$

まずここで, 上式第3項目の $\overline{\rho uv^2}$ のファール平均化を示す.

$$\begin{aligned} \overline{\rho uv^2} &= \overline{\rho(\tilde{u} + u'')(\tilde{v} + v'')^2} \\ &= \overline{\rho(\tilde{u} + u'')(\tilde{v}^2 + 2\tilde{v}v'' + (v'')^2)} \\ &= \overline{\rho\tilde{u}\tilde{v}^2} + 2\overline{\rho\tilde{u}\tilde{v}v''} + \overline{\rho\tilde{u}(v'')^2} + \overline{\rho u''\tilde{v}^2} + 2\overline{\rho u''\tilde{v}v''} + \overline{\rho u''(v'')^2} \\ &= \overline{\rho\tilde{u}\tilde{v}\tilde{v}} + 2\overline{\rho v''\tilde{u}\tilde{v}} + \overline{\rho v''v''\tilde{u}} + \overline{\rho u''\tilde{v}\tilde{v}} + 2\overline{\rho u''\tilde{v}v''} + \overline{\rho u''v''v''} \end{aligned}$$

上式で乱れ成分の高次の相関項となる, $\overline{\rho u''v''v''}$ は無視する⁽¹⁰⁶⁾. またファール平均の性質より $\overline{\rho u''} = \overline{\rho v''} = 0$ となる. したがって,

$$\begin{aligned} \overline{\rho uv^2} &= \overline{\rho\tilde{u}\tilde{v}\tilde{v}} + \overline{\rho v''v''\tilde{u}} + 2\overline{\rho u''v''\tilde{v}} \\ &= \overline{\rho\tilde{u}\tilde{v}\tilde{v}} + \overline{\rho v''v''\tilde{u}} + 2\overline{\rho u''v''\tilde{v}} \end{aligned}$$

同様に上式第2項目の $\overline{\rho u^3}$ のファール平均化は,

$$\begin{aligned} \overline{\rho u^3} &= \overline{\rho u u^2} \\ &= \overline{\rho\tilde{u}\tilde{u}\tilde{u}} + \overline{\rho u''u''\tilde{u}} + 2\overline{\rho u''u''\tilde{u}} \\ &= \overline{\rho\tilde{u}\tilde{u}\tilde{u}} + \overline{\rho u''u''\tilde{u}} + 2\overline{\rho u''u''\tilde{u}} \end{aligned}$$

よって, 左辺第2項は,

$$\begin{aligned} \text{左辺第2項} &= \frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho\tilde{u}\tilde{e}} + \overline{\rho u''\tilde{e}'}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\overline{\rho\tilde{u}\tilde{v}\tilde{v}} + \overline{\rho v''v''\tilde{u}} + 2\overline{\rho u''v''\tilde{v}} + \overline{\rho\tilde{u}\tilde{u}\tilde{u}} + \overline{\rho u''u''\tilde{u}} + 2\overline{\rho u''u''\tilde{u}}) + \overline{\rho\tilde{u}} + \overline{\rho u''} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho\tilde{u}\tilde{e}} + \frac{1}{2}\overline{\rho\tilde{u}(\tilde{u}\tilde{u} + \tilde{v}\tilde{v})} + \frac{1}{2}\overline{\rho\tilde{u}(u''u'' + v''v'')}) + \overline{\rho\tilde{u}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \overline{\rho \tilde{u} \tilde{u}''} + \overline{\rho \tilde{v} \tilde{v}''} + \overline{\rho \tilde{u} \tilde{e}''} + \overline{p \tilde{u}''} \\
= & \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho \tilde{u}} \{ \tilde{e} + \frac{1}{2} (\tilde{u} \tilde{u} + \tilde{v} \tilde{v}) + \frac{1}{2} (\tilde{u}'' \tilde{u}'' + \tilde{v}'' \tilde{v}'') \} + \overline{p \tilde{u}} \\
& + \overline{\rho \tilde{u} \tilde{u}''} + \overline{\rho \tilde{v} \tilde{v}''} + \overline{\rho \tilde{u} \tilde{e}''} + \overline{p \tilde{u}''}) \\
= & \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho \tilde{u} \tilde{e}_s} + \overline{p \tilde{u}} + \overline{\rho \tilde{u} \tilde{u}''} + \overline{\rho \tilde{v} \tilde{v}''} + \overline{(\rho \tilde{e}'' + p) \tilde{u}''}) \\
= & \frac{\partial}{\partial x} ((\overline{\rho \tilde{e}_s} + \overline{p}) \tilde{u} + \overline{\rho \tilde{u} \tilde{u}''} + \overline{\rho \tilde{v} \tilde{v}''} + \overline{\rho \tilde{u} \tilde{h}''}) \quad \because \rho e + p = \rho h
\end{aligned}$$

(左辺 第3項)

左辺 第2項と同様に，平均流のみを考えて．

$$\text{左辺第3項} = \frac{\partial}{\partial y} ((\overline{\rho \tilde{e}_s} + \overline{p}) \tilde{v} + \overline{\rho \tilde{u} \tilde{v}''} + \overline{\rho \tilde{v} \tilde{v}''} + \overline{\rho \tilde{v} \tilde{h}''})$$

左辺の第2項，第3項における， $\overline{\rho u_i'' u_j''}$ は，レイノルズ応力で， $\overline{\rho u_i'' h''}$ は乱流熱流束となる．

(右辺 第1項)

右辺第1項全体をレイノルズ平均化する．

$$\frac{\partial (u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + k T_x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} ((\overline{u \tau_{xx}} + (\overline{u \tau_{xx}})') + (\overline{v \tau_{xy}} + (\overline{v \tau_{xy}})') + (\overline{k T_x} + (\overline{k T_x})'))$$

この場合も平均流のみを考えて，

$$\text{右辺第1項} = \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u \tau_{xx}} + \overline{v \tau_{xy}} + \overline{k T_x})$$

ここで，運動量の式の平均化で述べたように， $u = \bar{u} = \tilde{u}$ より $\overline{u \tau_{ij}} = \tilde{u} \tilde{\tau}_{ij}$ と取り扱う．温度も同様に $T = \bar{T} = \tilde{T}$ と考える．

$$\text{右辺第1項} = \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{u} \tilde{\tau}_{xx} + \tilde{v} \tilde{\tau}_{xy} + k \tilde{T}_x)$$

(右辺 第2項)

右辺 第1項と同様に考えて．

$$\text{右辺第2項} = \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{u} \tilde{\tau}_{xy} + \tilde{v} \tilde{\tau}_{yy} + k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y})$$

以上，左辺第1項から右辺第2項まですべて，まとめると，平均流エネルギーの式は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (\overline{\rho \tilde{e}_s})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((\overline{\rho \tilde{e}_s} + \overline{p}) \tilde{u} + \overline{\rho \tilde{u} \tilde{u}''} + \overline{\rho \tilde{v} \tilde{v}''} + \overline{\rho \tilde{u} \tilde{h}''}) + \frac{\partial}{\partial y} ((\overline{\rho \tilde{e}} + \overline{p}) \tilde{v} + \overline{\rho \tilde{u} \tilde{v}''} + \overline{\rho \tilde{v} \tilde{v}''} + \overline{\rho \tilde{v} \tilde{h}''}) \\
= \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{u} \tilde{\tau}_{xx} + \tilde{v} \tilde{\tau}_{xy} + k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{u} \tilde{\tau}_{xy} + \tilde{v} \tilde{\tau}_{yy} + k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y})
\end{aligned}$$

レイノルズ応力と乱流熱流束を粘性応力と層流熱流束とまとめるように移行する．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (\overline{\rho \tilde{e}_s})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((\overline{\rho \tilde{e}_s} + \overline{p}) \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial y} ((\overline{\rho \tilde{e}_s} + \overline{p}) \tilde{v}) \\
= \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{u} (\tilde{\tau}_{xx} - \overline{\rho u'' u''}) + \tilde{v} (\tilde{\tau}_{xy} - \overline{\rho u'' v''}) + k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} - \overline{\rho u'' h''})
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{u}(\widetilde{\tau_{xy}} - \bar{\rho} \widetilde{u''v''}) + \tilde{v}(\widetilde{\tau_{yy}} - \bar{\rho} \widetilde{v''v''})) + k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} - \bar{\rho} \widetilde{v''h''})$$

ここで，乱流熱流束は，次式で表せられる⁽¹⁰⁶⁾⁽¹⁰⁹⁾．

$$\bar{\rho} \widetilde{u''_i h''} = -k_t \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} = -\frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i}$$

したがって，粘性項内の層流熱流束と乱流熱流束の関係は，以下ようになる．また，これより，熱伝導率 k に層流であることを示す添え字 l を付ける．

$$k \tilde{T}_x - \bar{\rho} \widetilde{u''h''} = k_l \tilde{T}_x + k_t \tilde{T}_x = (k_l + k_t) \tilde{T}_x = \left(\frac{c_p \mu_l}{Pr_l} + \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \right) \tilde{T}_x = c_p \left(\frac{\mu_l}{Pr_l} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \tilde{T}_x$$

$$k \tilde{T}_y - \bar{\rho} \widetilde{v''h''} = k_l \tilde{T}_y + k_t \tilde{T}_y = (k_l + k_t) \tilde{T}_y = \left(\frac{c_p \mu_l}{Pr_l} + \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \right) \tilde{T}_y = c_p \left(\frac{\mu_l}{Pr_l} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \tilde{T}_y$$

よって，平均流エネルギーの式は，次のようになる．また，レイノルズ応力 $-\bar{\rho} \widetilde{u''_i u''_j} = R_{ij}$ とする．

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{e})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((\bar{\rho}\tilde{e} + \bar{p})\tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial y}((\bar{\rho}\tilde{e} + \bar{p})\tilde{v}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{u}(\widetilde{\tau_{xx}} + R_{xx}) + \tilde{v}(\widetilde{\tau_{xy}} + R_{xy}) + c_p \left(\frac{\mu_l}{Pr_l} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}(\tilde{u}(\widetilde{\tau_{xy}} + R_{yx}) + \tilde{v}(\widetilde{\tau_{yy}} + R_{yy}) + c_p \left(\frac{\mu_l}{Pr_l} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y}) \end{aligned}$$

平均流を考えた場合，単位質量あたりのエネルギーに乱流エネルギーが加算される(前述)．この事より，エネルギーから圧力 p を求める式が，次のように変わってくる．

$$\bar{p} = (\gamma - 1) \bar{\rho} \tilde{e} = (\gamma - 1) \bar{\rho} \left(\tilde{e} - \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) - \frac{1}{2}(\widetilde{u''u''} + \widetilde{v''v''}) \right)$$

3.5.4 平均化された基礎方程式

前節で導出した，ファールブル平均による平均流の各式(連続の式，運動量の式，エネルギーの式)をまとめて列記する．平均化前の全成分に関する方程式と比べると，左辺に関しては，すべて方程式で形が保存されている．また，レイノルズ応力 $-\bar{\rho} \widetilde{u''_i u''_j} = R_{ij}$ とする．

連続の式

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v})}{\partial y} = 0$$

運動量の式

$$[x \text{ 方向}] \quad \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{p} + \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v})}{\partial y} = \frac{\partial(\widetilde{\tau_{xx}} + R_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\widetilde{\tau_{xy}} + R_{xy})}{\partial y}$$

$$[y \text{ 方向}] \quad \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{p} + \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{v})}{\partial y} = \frac{\partial(\widetilde{\tau_{yx}} + R_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(\widetilde{\tau_{yy}} + R_{yy})}{\partial y}$$

エネルギーの式

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{e})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((\bar{\rho}\tilde{e} + \bar{p})\tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial y}((\bar{\rho}\tilde{e} + \bar{p})\tilde{v}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{u}(\widetilde{\tau_{xx}} + R_{xx}) + \tilde{v}(\widetilde{\tau_{xy}} + R_{xy}) + c_p(\frac{\mu_l}{Pr_l} + \frac{\mu_t}{Pr_t})\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x}) \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}(\tilde{u}(\widetilde{\tau_{xy}} + R_{yx}) + \tilde{v}(\widetilde{\tau_{yy}} + R_{yy}) + c_p(\frac{\mu_l}{Pr_l} + \frac{\mu_t}{Pr_t})\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y})
\end{aligned}$$

ここで,

$$\bar{p} = (\gamma - 1)\bar{\rho}\left(\tilde{e} - \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) - \frac{1}{2}(\widetilde{u''u''} + \widetilde{v''v''})\right)$$

第4章 数値解法

4.1 TVD スキーム

圧縮性粘性流体を記述する Navier-Stokes 方程式の計算には差分法が一般に用いられている．差分法は，滑らかな関数の微分を有限の差分商で置き換えることにより構成されている．したがって，衝撃波のような不連続面が流れの中に存在すると，しばしば数値的な振動を引き起こすことがある．これに対して近年，空間的に高精度で衝撃波近くの数値振動がなく，高解像な鋭い解が得られる（より少ない格子点で衝撃波を捉えられる）安定な計算法が研究され，その中の1つに，Harten(1983)によって提案された TVD(Total Variation Diminishing) 有限差分スキームがある⁽¹¹¹⁾．

TVD とは，空間内に存在した変動が時間発展的において増加しないことを意味し，従って TVD 条件を満たす計算法では数値的な不要な解の振動が生じない（一次元のスカラー方程式において一次の風上差分はこの条件を満足する）．これを高次精度に拡張する場合には，TVD 条件を保持するリミッター関数を導入して従属変数（または流束）の傾きを制限する．この高次精度化の段階で，次の二つの手法に分かれる．

- MUSCL 法 : 1 次風上差分法が TVD 条件を満たすことに注目し， $i + 1/2$ の右と左の物理量 u の状態 (u^L, u^R) をそれぞれ取り囲むいくつかの位置での物理量 $u_i, u_{i+1}, u_{i-1}, u_{i+2}$ などから内挿によって決め，それを用いて数値計算する方法．MUSCL 型 TVD としては，Osher-Chakravarthy 法があり，理論的には非常に高精度のものが構成可能である．しかし，流束制限関数を使用するので，局所極値のところで基本スキーム (E スキーム: 1 次精度) の精度に落ちる性質は変わらない．
- non-MUSCL 法 : 数値流束を中心差分の項と粘性的な項という形で構成する対称型 TVD 法と風上差分の概念から構成する風上型 TVD 法．

(注意：)

MUSCL 型は van Leer によって初めて使用された．Godunov 原法はセル内の物理量分布を一定と仮定した．この場合，ERS(Exact Riemann Solver) を用いているにも関わらず近似精度は一次にとどまった．ここで，

$$\bar{v}_j = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} v(x_j + x, t) dx$$

をセル平均と呼ぶ．そして， $\bar{v}_j = v_j$ と置くと， v_j は j 点においてのみサンプルされた局所値ではなくセル内での v のある分布の平均が v_j で表されているという解釈が成立する．そこで， $v_{j+1/2}$ をあるセル分布から求め直す方法を MUSCL 型と呼ぶ習わしとなった．PLM では線形分布，PPM では放物型分布を仮定して $v_{j+1/2}$ を評価している．但し，この分布は考えているセル内でのみ成立する区分的連続 (piecewise continuous) 分布で，隣接セル間では不連続であっても構わないとする．

本節では MUSCL(Monotonic Upstream Schemes for Conservation Laws) 型 TVD 有限差分スキームの基本的な導出法を示す．

4.1.1 スカラー問題

ここではモデル方程式として線形の波動方程式を考える．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (a > 0) \quad (4.1)$$

ここで， $f = au$ である．

一般的に単純な Euler 陽積分では以下のように表される．

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n) \quad (4.2)$$

f は数値流束 (numerical flux) と呼ばれる．

Eq(4.2) から分かるように u_i^{n+1} を得るには， $i-1/2$ と $i+1/2$ のセル境界を通過する流束を評価する必要がある．われわれは整数点 $i-3, i-2, i-1, i, i+1, \dots$ などでは u の情報を持たないから，定義できる流束は整数点においてのみである．これらは物理流束 (physical flux) と呼ばれる．例えば， $f_i, f(u_i)$ を意味する (ここでの場合は au_i)． $u_{i\pm 1/2}$ を評価する簡単な方法は $f((u_i + u_{i\pm 1})/2)$ であるが，特性方向を考慮すると他の評価法もある．その一つである 1 次精度風上差分の数値流束は，

$$f_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} [(f_{i+1} + f_i) - |a|(u_{i+1} - u_i)] \quad (4.3)$$

と書ける．これを用いて MUSCL 型における数値流束を

$$f_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} [(au)^R + au^L - |a|(u^R - u^L)]_{i+1/2} \quad (4.4)$$

$$= \frac{1}{2} [(f^R + f^L) - |a|(u^R - u^L)]_{i+1/2} \quad (4.5)$$

と評価すると高次精度の風上差分法が定義できる．

4.1.2 システム方程式への拡張

風上差分法は、システム方程式への拡張が簡単に行えない。と言うのは、システム方程式では、各方程式が互いに相関関係にあるため、複数の特性速度が現れ、また、各々の特性速度の符号が異なる場合も考えられ、さらには、そのことがあらかじめ分からないからである。

この問題を解決するためには、各々の計算格子に対してリーマン問題 (Riemann problem) を解く必要がある。つまり、解析的に特性曲線の考えに基づいて格子間で仮想的な流体問題を解くことである。しかしながら、直接リーマン問題を解くには反復法によるしかなく、従って、解を得るためには非常に時間を要する。そこでこの問題を近似的に解く方法が考えられている。ここでは、その内の1つで実際に広く利用されている FDS (Flux Difference Splitting) を使用して1次元 Euler 方程式の風上差分を構成する。

一次元問題 (非粘性)

まず始めに、1次元非粘性方程式

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0 \quad (4.6)$$

について考える。ここで \mathbf{U} は保存量の変数、 \mathbf{E} は流束のベクトルで、

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ (E_s + p)u \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

保存則で書かれた1次元の Euler 方程式 Eq(4.6) を局所的に線形化する (係数マトリックスを凍結する) と、

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (4.8)$$

$$\mathbf{A} \equiv \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{U}} \quad (4.9)$$

と非保存系の形ではあるが流束部分を未知ベクトルを用いて表す形に書き直せる。このマトリックス $\mathbf{A} (\equiv \partial \mathbf{E} / \partial \mathbf{U})$ は流束ヤコビアン行列 (flux Jacobian matrix) と呼ばれ、行列の各要素 A_{ij} は $\partial E_i / \partial U_j$ として求められる。実際に \mathbf{A} は

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma_0}{2}u^2 & (3-\gamma_0)u & \gamma_0 - 1 \\ (\frac{\gamma_0-1}{2}u^2 - H)u & H - (\gamma_0 - 1)u^2 & \gamma_0 u \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$H = h + \frac{1}{2}u^2, \quad h = e + p/\rho$$

h は比エンタルピ、 H は全エンタルピを表す。

であるが、その同次的な性質から、

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}\mathbf{U} \quad (4.11)$$

が成り立つ。方程式は双曲型であるからこの行列は対角化が可能で、その固有値は行列式

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma_0}{2}u^2 & (3-\gamma_0)u - \lambda & \gamma_0 - 1 \\ (\frac{\gamma_0-1}{2}u^2 - H)u & H - (\gamma_0 - 1)u^2 & \gamma_0 u - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.12)$$

の根であるから，

$$(u - \lambda) \left((u - \lambda)^2 - \gamma_0 \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (4.13)$$

が得られる．ここで a を音速として， $a = \sqrt{\gamma_0 p / \rho}$ と定義すると 3 つの固有値は，

$$\lambda_1 = u - a \quad , \quad \lambda_2 = u \quad , \quad \lambda_3 = u + a \quad (4.14)$$

となる．

λ_l は各々単純波がとりうる 3 つの速度 (特性線の傾き) を表す．Eq(4.6) とスカラーの輸送方程式 (例えば，Eq(4.1)) とを比べてみると，行列 \mathbf{A} が物理現象の速度，すなわち，特性速度に対応していることが分かる．1次元 Euler 方程式は各々独立でない 3 つの方程式からできているから，行列 \mathbf{A} は本来，対角項以外の成分を持つ．しかし，対角化を施すことによって各々独立な 3 つの波動方程式の重ね合わせとして捉えることができる．それら 3 つの波の特性速度がこの行列の固有値，すなわち， $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ として得られているのである．

一方固有ベクトルを列ベクトルとする右固有行列 \mathbf{T} とその逆行列である左固有行列 \mathbf{T}^{-1} により \mathbf{A} は対角行列 $\mathbf{\Lambda}$ に変換することができる． \mathbf{T} と \mathbf{T}^{-1} を次に示す．

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u - a & u & u + a \\ H - ua & u^2/2 & H + ua \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} (b_1 + u/a)/2 & -(ub_2 + 1/a)/2 & b_2/2 \\ 1 - b_1 & b_2 u & -b_2 \\ (b_1 - u/a)/2 & -(ub_2 - 1/a)/2 & b_2/2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$b_1 = ((\gamma_0 - 1)u^2/2)/a^2 \quad , \quad b_2 = (\gamma_0 - 1)/a^2$$

ここで \mathbf{A} が定数行列 (要素が定数) であるとすれば，Eq(4.8) の偏微分方程式に \mathbf{T}^{-1} を左からかけて，次のように変形できる．

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{U}) + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0 \quad (4.17)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{U} \quad (4.18)$$

\mathbf{A} ， \mathbf{T} ， \mathbf{T}^{-1} が定数行列であるから， $\mathbf{\Lambda}$ の対角要素 (行列の性質から λ_1 ， λ_2 ， λ_3 である) も当然定数である．これで保存量 \mathbf{W} について， \mathbf{A} が定数行列であるという大前提のもとに，線形な方程式に変形できた．

次に \mathbf{U} から変換された保存変数 \mathbf{W} に関して離散化を行い，この離散化式に対し保存変数 \mathbf{U} への逆変換を行い \mathbf{U} に関する離散化式を構築する．

保存量 \mathbf{W} について離散化すると，

$$\mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{W}^n - \lambda (\mathbf{E}'_{i+1/2} - \mathbf{E}'_{i-1/2}) \quad (4.19)$$

\mathbf{E}' は \mathbf{W} に関する数値流束である．Eq(4.11) と Eq(4.18) の関係から，

$$\mathbf{E}' = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{E} \quad (4.20)$$

の関係が得られ，Eq(4.19) に代入すると，

$$\mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{W}^n - \lambda (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{E}_{i+1/2} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{E}_{i-1/2}) \quad (4.21)$$

ここで Eq(4.21) の数値流束を , Eq(4.3) の一般的な数値流束の式

$$f_{i+1/2} = \frac{1}{2}[(f_{i+1} + f_i) - |a|(u_{i+1} - u_i)] \quad (4.22)$$

の形を利用して定義すると , 数値流束 $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{E}_{i+1/2}$ は ,

$$(\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U})_{i+1/2} = \frac{1}{2}[\mathbf{\Lambda}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U})_{i+1} + (\mathbf{\Lambda}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U}))_i - |\mathbf{\Lambda}|\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i)] \quad (4.23)$$

と書ける (上の表記は Eq(4.11) を用いて変形してある) .

$\mathbf{W} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{U}$ より Eq(4.21) に左から \mathbf{T} をかけると \mathbf{U} に関する離散式を得る .

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \lambda(\mathbf{E}_{i+1/2} - \mathbf{E}_{i-1/2}) \quad (4.24)$$

ここで , $\lambda \equiv \Delta t/\Delta x$ である . また数値流束 $\mathbf{E}_{i+1/2}$ についても Eq(4.23) に左から \mathbf{T} をかけると ,

$$(\mathbf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}^{-1})\mathbf{U}_{i+1/2} = \frac{1}{2}((\mathbf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}^{-1})\mathbf{U}_{i+1} + (\mathbf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}^{-1})\mathbf{U}_i - \mathbf{T}|\mathbf{\Lambda}|\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i))$$

なる式が得られる . Eq(4.11) を $\mathbf{E} = \mathbf{A}\mathbf{U} = (\mathbf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}^{-1})\mathbf{U}$ と考えて変形すると ,

$$\mathbf{E}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_{i+1} + \mathbf{E}_i - \mathbf{T}|\mathbf{\Lambda}|\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i)) \quad (4.25)$$

$$\mathbf{E}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_{i+1} + \mathbf{E}_i - \mathbf{A}_{i+1/2}(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i)) \quad (4.26)$$

となる . この 1 次精度の数値流束 (Eq(4.26)) は一般に Flux Diffrence Splitting (FDS) と呼ばれている .

さらに , この FDS はスカラー方程式に対する風上差分をそのままシステムに拡張したものであるから , MUSCL による高次精度化は直接的にできて , 数値流束は以下のように書ける .

$$\mathbf{E}_{i+1/2} = \frac{1}{2}[\mathbf{E}(\mathbf{U}_{i+1/2}^R) + \mathbf{E}(\mathbf{U}_{i+1/2}^L) - |\mathbf{A}|_{i+1/2}(\mathbf{U}_{i+1/2}^R - \mathbf{U}_{i+1/2}^L)] \quad (4.27)$$

これが FDS の考えをもとにした数値流束になるが , 今回の計算ではさらにこの考えをもとに Harten-Yee の 2 次精度風上型 TVD スキームの数値流束を MUSCL 型の数値流束に置き換え計算している . 以下にその方法を示す .

MUSCL approach

1次精度のFDS同様に，スカラー方程式の単純な拡張として表現でき，数値流束は以下のように表記できる． $\hat{\mathbf{T}}$ および $\hat{\Phi}_{i+1/2}$ については，後述する．

$$\mathbf{E}_{i+1/2} = \frac{1}{2}[\mathbf{E}_{i+1} + \mathbf{E}_i + \hat{\mathbf{T}}\hat{\Phi}_{i+1/2}] \quad (4.28)$$

上式を先ほどと同様にMUSCL型に直すと，

$$\mathbf{E}_{i+1/2} = \frac{1}{2}[\mathbf{E}(\mathbf{U}_{i+1/2}^R) + \mathbf{E}(\mathbf{U}_{i+1/2}^L) + \hat{\mathbf{T}}\hat{\Phi}_{i+1/2}] \quad (4.29)$$

ここで， $\mathbf{E}(\mathbf{U}_{i+1/2}^R), \mathbf{E}(\mathbf{U}_{i+1/2}^L)$ は各々次に示す $\mathbf{U}_{i+1/2}^R, \mathbf{U}_{i+1/2}^L$ で定義される．

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^R = \mathbf{U}_{i+1} - \frac{1}{4}[(1-\bar{\eta})\Delta_{i+3/2} + (1+\bar{\eta})\Delta_{i+1/2}] \quad (4.30)$$

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^L = \mathbf{U}_i + \frac{1}{4}[(1-\bar{\eta})\Delta_{i-1/2} + (1+\bar{\eta})\Delta_{i+1/2}] \quad (4.31)$$

制限関数を導入するため $\mathbf{U}_{i+1/2}^R, \mathbf{U}_{i+1/2}^L$ を修正すると，

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^R = \mathbf{U}_{i+1} - \frac{1}{4}[(1-\bar{\eta})\Delta_{i+3/2}^* + (1+\bar{\eta})\Delta_{i+1/2}^{**}] \quad (4.32)$$

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^L = \mathbf{U}_i + \frac{1}{4}[(1-\bar{\eta})\Delta_{i-1/2}^{**} + (1+\bar{\eta})\Delta_{i+1/2}^*] \quad (4.33)$$

ここで， $\bar{\eta}$ はこのスキームの空間精度を決定するパラメータで，

$$\begin{aligned} \bar{\eta} = -1 & : \text{2次精度風上差分スキーム} \\ \bar{\eta} = 0 & : \text{Fromm スキーム} \\ \bar{\eta} = \frac{1}{3} & : \text{3次精度風上差分スキーム} \\ \bar{\eta} = 1 & : \text{2次精度中心差分スキーム} \end{aligned}$$

の関係がある． Δ^*, Δ^{**} は制限関数を用いて評価されるが，この制限関数については，様々な選択が可能であるが，今回はもっとも一般的な minmod 関数もちいる．

$$\Delta^* = \text{minmod}(\Delta_{i+1/2}, \bar{\beta}\Delta_{i-1/2}) \quad (4.34)$$

$$\Delta^{**} = \text{minmod}(\Delta_{i+1/2}, \bar{\beta}\Delta_{i+3/2}) \quad (4.35)$$

ただし，

$$\text{minmod}(x, \bar{\beta}y) = \text{sgn}(x) \cdot \max\{0, \min[|x|, \text{sgn}(x) \cdot \bar{\beta}y]\} \quad (4.36)$$

である．ここで，

$$\Delta_{i+1/2} = \mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i \quad (4.37)$$

$$\Delta_{i-1/2} = \mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1} \quad (4.38)$$

である．また $\bar{\beta}$ は，スキームの解像に影響を与える人工圧縮パラメータで，

$$1 < \bar{\beta} \leq \frac{3-\bar{\eta}}{1-\bar{\eta}} \quad (4.39)$$

の関係がある．行列 $\hat{\mathbf{T}}$ は， $\mathbf{U}_{i+1/2}^R$ と $\mathbf{U}_{i+1/2}^L$ の対称平均で評価された Jacobian 行列 $\mathbf{A} = \partial\mathbf{E}/\partial\mathbf{U}$ の右固有ベクトル列もちいる．すなわち，

$$\hat{\mathbf{T}}_{i+1/2} = \mathbf{T}(\mathbf{U}_{i+1/2}^R, \mathbf{U}_{i+1/2}^L) = \mathbf{T}((\mathbf{U}_{i+1/2}^R + \mathbf{U}_{i+1/2}^L)/2) \quad (4.40)$$

さらに， $\hat{\Phi}_{i+1/2}^l$ (1 次元 Euler 方程式なので $l = 1, \dots, 3$) によって示される $\hat{\Phi}_{i+1/2}$ は，

$$\hat{\Phi}_{i+1/2}^l = -\psi(\hat{\lambda}_{i+1/2}^l) \hat{\alpha}_{i+1/2}^l \quad (4.41)$$

ただし，関数 $\psi(\hat{\lambda}_{i+1/2}^l)$ は，

$$\psi(z) = \begin{cases} |z| & |z| \geq \varepsilon_1 \\ \frac{(z^2 + \varepsilon_1^2)}{2\varepsilon_1} & |z| < \varepsilon_1 \end{cases} \quad (4.42)$$

ここで，関数 ψ は $|z|$ に対してエントロピーの修正を行う補正項であり， $|z| = 0$ の場合に散逸が 0 になるのを防ぎ，エントロピー条件を課すための修正で膨張衝撃波の発生を抑制する作用を持つ． ε_1 は正の微小な値をもつパラメータ (Harten ら (1983)) で，一般的に，

$$0.1 \leq \varepsilon_1 \leq 0.001 \quad (4.43)$$

の範囲で選ばれる． ε_1 に大きな値を用いると数値振動を抑制する効果を向上させるが，例えば衝撃波が流れの中に存在する場合，衝撃波遷回幅が広がるなどの数値的な smearing の影響が強くなり，空間解像度が劣化する．そこで， $\varepsilon_1 = \varepsilon(U, \lambda)$ のようにするとよい結果が得られるが，非粘性完全気体での流れのマッハ数が 5 を超えない程度の流れに対して，全域にわたって一定の小さい値を使ってもそれほど顕著な差は見られないことも知られている．

各関数，変数は次のように表される．

$$\hat{\lambda}_{i+1/2}^l = \lambda^l(\mathbf{U}_{i+1/2}^R, \mathbf{U}_{i+1/2}^L) \quad (4.44)$$

$$\hat{\alpha}_{i+1/2}^l = \hat{\mathbf{T}}_{i+1/2}^{-1}(\mathbf{U}_{i+1/2}^R - \mathbf{U}_{i+1/2}^L) \quad (4.45)$$

$\hat{\lambda}_{i+1/2}^l, \hat{\alpha}_{i+1/2}^l$ はそれぞれ Jacobian 行列 \mathbf{A} に対する固有値として求められる Eq(4.14) の特性速度と局所特性変数を示し，いずれも $\mathbf{U}_{i+1/2}^R$ と $\mathbf{U}_{i+1/2}^L$ の対称平均で評価される．

二次元問題 (粘性)

次に今回の計算対象である粘性を考慮した二次元流れにおける問題について考える．

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re_0} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{S}}}{\partial \eta} \right) + \hat{\mathbf{Q}} \quad (4.46)$$

これを離散化すると，

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}}^{n+1} &= \hat{\mathbf{U}}^n - \lambda^\xi (\hat{\mathbf{E}}_{i+1/2,j}^n - \hat{\mathbf{E}}_{i-1/2,j}^n) - \lambda^\eta (\hat{\mathbf{F}}_{i,j+1/2}^n - \hat{\mathbf{F}}_{i,j-1/2}^n) \\ &+ \frac{1}{Re_0} \{ \lambda^\xi (\hat{\mathbf{R}}_{i+1/2,j}^n - \hat{\mathbf{R}}_{i-1/2,j}^n) + \lambda^\eta (\hat{\mathbf{S}}_{i,j+1/2}^n - \hat{\mathbf{S}}_{i,j-1/2}^n) \} + \Delta t \hat{\mathbf{Q}}_{i,j}^n \end{aligned} \quad (4.47)$$

ここで， $\lambda^\xi \equiv \Delta t / \Delta \xi$ ， $\lambda^\eta \equiv \Delta t / \Delta \eta$ である．

数値流速 $\hat{\mathbf{E}}_{i+1/2,j}$ は，

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_{i+1/2,j} &= \frac{1}{2} \{ (y_\eta)_{i+1/2} [\mathbf{E}(\mathbf{U}_{i+1/2}^R) + \mathbf{E}(\mathbf{U}_{i+1/2}^L)] \\ &- (x_\eta)_{i+1/2} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^R) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^L)] + \hat{\mathbf{T}}_{i+1/2} \hat{\Phi}_{i+1/2} J_{i+1/2} \} \end{aligned} \quad (4.48)$$

ここで簡単のために下添え字“ $i + 1/2, j$ ”を“ $i + 1/2$ ”とする．また $J_{i+1/2}$ 及び y_η は，

$$(y_\eta)_{i+1/2} = \frac{1}{2} [(y_\eta)_{i,j} + (y_\eta)_{i+1,j}] \quad (4.49)$$

$$J_{i+1/2} = \frac{1}{2} (J_{i,j} + J_{i+1,j}) \quad (4.50)$$

のように評価し計算を行う．

$\mathbf{E}(\mathbf{U}_{i+1/2}^R), \mathbf{E}(\mathbf{U}_{i+1/2}^L)$ は Eq(4.33) , Eq(4.33) と同様に各々次に示す $\mathbf{U}_{i+1/2}^R, \mathbf{U}_{i+1/2}^L$ で評価される．

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{i+1/2}^R &= \mathbf{U}_{i+1,j} - \frac{1}{4}[(1 - \bar{\eta})\Delta_{i+3/2}^* + (1 + \bar{\eta})\Delta_{i+1/2}^{**}] \\ \mathbf{U}_{i+1/2}^L &= \mathbf{U}_{i,j} + \frac{1}{4}[(1 - \bar{\eta})\Delta_{i-1/2}^{**} + (1 + \bar{\eta})\Delta_{i+1/2}^*]\end{aligned}$$

今回の計算では, $\bar{\eta} = \frac{1}{3}$ として空間 3 次精度のスキームを採用し計算を行った．

Δ^*, Δ^{**} も, Eq(4.35) , Eq(4.35) , Eq(4.36) と同様にそれぞれ

$$\begin{aligned}\Delta^* &= \text{minmod}(\Delta_{i+1/2}, \bar{\beta}\Delta_{i-1/2}) \\ \Delta^{**} &= \text{minmod}(\Delta_{i+1/2}, \bar{\beta}\Delta_{i+3/2})\end{aligned}$$

$$\text{minmod}(x, \bar{\beta}y) = \text{sgn}(x) \cdot \max\{0, \min[|x|, \text{sgn}(x) \cdot \bar{\beta}y]\}$$

である．今回の計算では, $\bar{\eta} = \frac{1}{3}$ の時, Eq(4.39) より $1 < \bar{\beta} \leq 4$ となり, その最大値である $\bar{\beta} = 4$ を用いる．このスキームにおいて $\bar{\eta} = \frac{1}{3}$ と $\bar{\beta} = 4$ の組み合わせは, スキームに加わる制限関数の影響をもっとも押さえたものとなり, 人工粘性を最小限に押える．行列 $\hat{\mathbf{T}}$ は, $\mathbf{U}_{i+1/2}^R$ と $\mathbf{U}_{i+1/2}^L$ の対称平均で評価された Jacobian 行列 $\hat{\mathbf{A}} = \partial \hat{\mathbf{E}} / \partial \hat{\mathbf{U}}$ の右固有ベクトル列である．すなわち,

$$\hat{\mathbf{T}}_{i+1/2} = \hat{\mathbf{T}}_{\xi}(\mathbf{U}_{i+1/2}^R, \mathbf{U}_{i+1/2}^L) \quad (4.51)$$

さらに, $\hat{\Phi}_{i+1/2}^l$ (凝縮を考慮した 2 次元 Navier-Stokes 方程式なので $l = 1, \dots, 8$) によって示される $\hat{\Phi}_{i+1/2}^l$ は,

$$\hat{\Phi}_{i+1/2}^l = -\psi(\hat{\lambda}_{i+1/2}^l) \hat{\alpha}_{i+1/2}^l \quad (4.52)$$

ただし, 関数 $\psi(\hat{\lambda}_{i+1/2}^l)$ は,

$$\psi(z) = \begin{cases} |z| & |z| \geq \varepsilon_1 \\ \frac{(z^2 + \varepsilon_1^2)}{2\varepsilon_1} & |z| < \varepsilon_1 \end{cases}$$

一次元問題で説明したように, 非粘性完全気体での流れのマッハ数が 5 を超えない程度の流れに対して, ε_1 を全域にわたって一定の小さい値として用いてもそれほど顕著な差がないことが分かっている．今回の計算において対象とする流れは, 凝縮が発生しない場合でもノズル出口でマッハ数が 3 程度であり, 流れのマッハ数は明らかにこの範囲に当てはまる．また, 平原らによると, 衝撃波問題および超音速ノズル内流れの数値実験において, ε_1 の値を変化させて計算した結果, $\varepsilon_1 \ll 0.1$ の適当な値をとれば, 数値振動の抑制効果と不必要な smearing 効果の低減を同時に満足することが確認されている．そこで今回の計算においては $\varepsilon_1 = 0.01$ で一定として計算を行った．ここで, ψ は $|z|$ に対してエントロピーの修正を行う補正項であり, ε_1 は正の微小な値をもつパラメータで, 一般的に $0.1 \geq \varepsilon_1 \geq 0.001$ の範囲で選ばれる．

また, $\hat{\lambda}_{i+1/2}^l, \hat{\alpha}_{i+1/2}^l$ は, それぞれ Jacobian 行列 A に対する固有値として求められる特性速度と局所特性変数を示し, いずれも $\mathbf{U}_{i+1/2}^R$ と $\mathbf{U}_{i+1/2}^L$ の対称平均で評価される．

$$\hat{\lambda}_{i+1/2}^l = \hat{\lambda}_{\xi}^l(\mathbf{U}_{i+1/2}^R, \mathbf{U}_{i+1/2}^L) \quad (4.53)$$

$$\hat{\alpha}_{i+1/2}^l = \hat{\mathbf{T}}_{i+1/2}^{-1}(\mathbf{U}_{i+1/2}^R - \mathbf{U}_{i+1/2}^L) \quad (4.54)$$

前述の対称平均については, 例えば, 単純な相加平均 (算術平均) や完全気体にのみ適用できる Roe(1981) による平均化法, そして, その後実在気体について拡張された一般化された Roe の平

均化法 (例えば, Yee(1987)) がある. 予備的な数値実験によれば, Roe の平均化法は, 衝撃波管を用いた衝撃波の計算については, 衝撃波をより鋭く捕獲するという意味で, 単純な相加平均 (算術平均) に比べてわずかながら優位な結果を示したが, 超音速流れの計算についてはその差は顕著に表れないという結果が出ているため, 前述の対称平均について単純な相加平均を用いて計算を行うことにした.

残された数値流束 $\hat{F}_{i,j+1/2}$ については前述した $\hat{E}_{i+1/2,j}$ と同様に定義される. また, 粘性項を表す数値流束 \hat{R}, \hat{S} は, 2 次精度中心差分で評価した.

4.2 Riemann 問題

4.2.1 Riemann 解法

無次元化された一般座標系支配方程式を離散化すると次のようになる。

$$\begin{aligned} V_{i,j} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} + (E_{i+1/2,j} - E_{i-1/2,j}) + (F_{i,j+1/2} - F_{i,j-1/2}) \\ = \frac{1}{Re} (R_{i+1/2,j} - R_{i-1/2,j}) + \frac{1}{Re} (S_{i,j+1/2} - S_{i,j-1/2}) \end{aligned}$$

上式を解くにあたっての差分スキームの違いは、数値流束 (Numerical Flux) $E_{i+1/2}$ (1次元の場合) の評価の違いに帰結する。格子点 i と $i+1$ には物理量が与えられているが、セルの境界 $i+1/2$ には物理量は与えられていない。そこで数値流束 $i+1/2$ の値を決定するには Riemann 問題を解かなければならない。

Riemann 問題とは圧縮性流体中のある場所において、その場所を境として右側の領域の状態量と左側の領域の状態量が初期値として与えられた場合の初期値問題である。Riemann 問題の解は左右に広がる2つの非線形波 (圧縮波と膨張波) とそれに挟まれる線形波 (接触不連続面) によって構成される。Riemann 解法では初期値として左右の状態量が与えられると波のパターン、波の強さ、各波間の状態量がそれぞれ求められる。

Riemann 解法には多くの解法が提案されているが、解析的に解いて厳密解を得る方法と近似的に解く方法の2つに大別される。前者は Godunov 法であり、後者のなかで代表的なものは Roe の近似 Riemann 解法である。Harten Yee 型 TVD スキーム、および Chakravarthy Osher の TVD スキームは Roe の近似 Riemann 解法を用いた1次精度 FDS (Flux Difference Splitting) スキームを高次精度化したものである。Godunov 法は厳密解が得られるのであるが Newton 法等の反復法が必要になるので計算効率が良くないという欠点を持つ。そのため最近では効率的な計算ができる近似 Riemann 解法のほうが主流となっている。

近似 Riemann 解法には次のような手法⁽¹⁰⁰⁾がある。

1. Roe の平均化に代表される近似解法 (Roe 平均)

詳細は次節にて述べる。

なお Roe の平均化に代表される近似解法 (Roe 平均) は、流速分離法¹ では、流速差分分離法 (Flux Difference Splitting Method, FDS) に含まれる。

流速差分分離法 (Flux Difference Splitting Method, FDS)⁽¹⁰²⁾

セル境界とそれをはさむ左右の物理量からなる衝撃波初期値問題の解として、数値流束を求めるもの。この方法では、境界層内で自然に数値粘性項が小さくなるため物理的な粘性項により境界層を壊さない。衝撃波等の不連続面のみならず、特に空間内の剥離渦のように数値粘性の効果に注意すべき流れ場では有効な手法となる。しかし、強い衝撃波および膨張波に対して安定性に問題がある。

2. 流束ベクトル分離法 (Flux Vector Splitting Method, FVS)⁽¹⁰²⁾

左右の物理量でそれぞれ流束分離して、左から来る流束と右から来る流束との和として、数値流束を求めるものである。この方法では、数値粘性が物体近くの境界層内においても有限にとどま

¹ 流速分離法... 大別すると流速差分分離法 (Flux Difference Splitting Method, FDS) と流束ベクトル分離法 (Flux Vector Splitting Method, FVS) に分けられる⁽¹⁰²⁾

るため境界層のプロファイルが正しく保たれない。しかし、非圧縮性流れの計算には有効であるが、接触連続面あるいはすべり面での数値粘性が問題になる。

4.2.2 Roe の近似 Riemann 解法

1次元スカラー方程式を保存形で表示すると次のようになる。

$$u_t + f_x = 0 \quad (f = au, a > 0)$$

ただし、 a は特性速度である。上式を陽解法で差分近似すると次式で表される。

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \nu(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n)$$

ここで、 $\nu = \Delta t / \Delta x$ である。また、CFL はクーラン数と呼ばれる。クーラン数は波の物理的な速さと計算上の速さの比を表す定数である。時間積分に陽解法を用いる場合、 $CFL < 1.0$ でなければならない。これは計算上の波の速さが実際の物理的な速さを超えてはならないことを意味する。数値流束 $f_{i+1/2}^n$ は 1 次精度風上差分法では次のように表される。

$$f_{i+1/2}^n = \frac{1}{2}[(f_{i+1} - f_i) - |a|(u_{i+1} - u_i)]$$

次にこの 1 次精度風上差分をシステム方程式 (Euler 方程式) に拡張する。1 次元 Euler 方程式を保存形で表示すると次のようになる。

$$Q_t + F_x = 0$$

ただし、

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(e + p) \end{bmatrix}$$

Euler 方程式は非線形方程式なのでこのままの形では解けない。そこで次式のように局所線形化する。

$$Q_t + AQ_x = 0 \quad (A = \frac{\partial F}{\partial Q})$$

上式は A を局所的に線形化することを意味する。上式において Euler 方程式は双曲形であるから、Jacobian matrix は対角化可能である。いま R を右固有ベクトル、 R^{-1} を左固有ベクトルとすると、

$$\Lambda = R^{-1}AR = \text{diag}(a^l)$$

となる。ここで a^l は各要素の特性速度となり、1 次元の場合、 $a^1 = u - c$, $a^2 = u$, $a^3 = u + c$ (c は音速) である。いま左固有ベクトル R^{-1} を左側から掛け、 $W = R^{-1}Q$ とすると次式は次のように変換される。

$$W_t + \Lambda W_x = 0$$

上式は、各特性波ごとに分解された独立した 3 つのスカラー方程式と見なせる。したがってこの方程式において各特性波ごとにスカラー方程式に適用した 1 次精度風上差分法を適用し、これを逆変換することによって元のシステム方程式形に戻してあげれば、Euler 方程式を 1 次精度風上差分法で解

くことができる．これが FDS と呼ばれる計算手法である．結局 FDS では数値流束 $F_{i+1/2}$ は次式となる．

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2}[(F_{i+1} - F_i) - |A|_{i+1/2}(Q_{i+1} - Q_i)]$$

ただし， $A = R|A|R^{-1}$ である．また，

$$\alpha = R_{i+1/2}^{-1}(Q_{i+1} - Q_i)$$

である． α は各波をまたいで物理量の jump 量に相当するものである．

$|A|_{i+1/2}$ の値を決定するためにセル境界 $i + 1/2$ における物理量を求めなければならない．これを求める方法として Roe は Roe 平均 (Roe's average) を提案した．これがいわゆる Roe の近似 Riemann 解法と呼ばれるものである⁽¹¹²⁾．Roe は $A_{i+1/2}(A(Q_{i+1}, Q_i))$ を線形近似する際，Riemann 問題の解の分布はすべて線形波による不連続から構成される．また近似 Riemann 解は不連続面で厳密解の保存則を満たすように次のような仮定をした．

Roe 平均は，特性速度の方向を考慮してできるだけ流体力学の支配方程式の性質（特に不連続面を正確に捉える性質）を満足するように $i + 1/2$ 位置での物理量を決めるものである．Eq(4.26) の $A_{i+1/2}(A(U_{i+1}, U_i))$ を例にして Roe 平均の満足すべき性質を以下に示す．

1. $A(U_{i+1}, U_i)$ は，ベクトル空間 U からベクトル空間 E に線形に対応するように構成される．
2. $A(U, U) \rightarrow A(U)$ が成り立つ．
3. 全ての i に対して， $A(U_{i+1}, U_i) \times (U_{i+1} - U_i) = E_{i+1} - E_i$ が成り立つ．
4. $A(U_{i+1}, U_i)$ の固有値は線型独立である．

これらの性質を満足したものが，次に示す Roe 平均である．すなわち， ξ 方向に対して，

$$u_{i+1/2,j} = \frac{\bar{D}u_{i+1,j} + u_{i,j}}{\bar{D} + 1} \quad (4.55)$$

$$v_{i+1/2,j} = \frac{\bar{D}v_{i+1,j} + v_{i,j}}{\bar{D} + 1} \quad (4.56)$$

$$H_{i+1/2,j} = \frac{\bar{D}H_{i+1,j} + H_{i,j}}{\bar{D} + 1} \quad (4.57)$$

$$c_{i+1/2,j}^2 = (\gamma_0 - 1) \left[H_{i+1/2,j} - \frac{1}{2}(u_{i+1/2,j}^2 + v_{i+1/2,j}^2) \right] \quad (4.58)$$

$$\bar{D} = \sqrt{\rho_{i+1,j}/\rho_{i,j}} \quad (4.59)$$

$$H = \frac{\gamma_0 p}{(\gamma_0 - 1)\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (4.60)$$

と定義される．なお， η 方向に対しても同様に定義される．

なお，今回の TVD の計算では前節で述べたように相加平均との違いが顕著に表れないということより Roe の近似リーマン解法 (以下 Roe 平均) を用いていないが，時間 Δt を計算する際にこれを用いている．

4.3 Jacobian 行列と固有ベクトル

本節では，本研究で用いた Jacobian 行列，固有値及び固有ベクトルを表示する．

4.3.1 凝縮無の場合

Jacobian 行列 (Pulliam の展開形式)

二次元系の Jacobian 行列は 4 行 4 列であるため，4 個の固有値を持つ．また 1 つの固有値に対して，左固有ベクトルと右固有ベクトルが決まるため左および右固有ベクトルの行列 \mathbf{L} と \mathbf{R} は 4 行 4 列となる⁽¹¹⁷⁾．初めにヤコビ行列 $\hat{\mathbf{A}} = \partial \hat{\mathbf{E}} / \partial \hat{\mathbf{U}}$ ， $\hat{\mathbf{B}} = \partial \hat{\mathbf{F}} / \partial \hat{\mathbf{U}}$ について示す．ここで， $\hat{\mathbf{A}}$ ， $\hat{\mathbf{B}}$ に対して，それぞれ k を ξ, η とすると

$$\hat{\mathbf{A}} \text{ or } \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & k_x \\ -u\theta + k_x\phi^2 & \theta - (G-1)k_x u \\ -v\theta + k_y\phi^2 & k_x v - Gk_y u \\ \theta[2\phi^2 - (G+1)\frac{e}{\rho}] & k_x[(G+1)\frac{e}{\rho} - \phi^2] - Gu\theta \\ k_y & 0 \\ k_y u - Gk_x v & k_x G \\ \theta - (G-1)k_y v & k_y G \\ k_y[(G+1)\frac{e}{\rho} - \phi^2] - Gv\theta & (G+1)\theta \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

ここで， ρ は乾き空気の密度， e は乾き空気の内部エネルギーである．さらに，

$$\theta = k_x u + k_y v \quad (4.62)$$

$$\phi^2 = \frac{1}{2}G(u^2 + v^2) \quad (4.63)$$

ただし，

$$G = \gamma_0 - 1 \quad (4.64)$$

である．また， U は反変速度（物理空間の速度 u, v に対して計算空間に写像された速度 U, V ）であり，次式となる．

$$U = \xi_x u + \xi_y v$$

$$V = \eta_x u + \eta_y v$$

固有値と固有ベクトル列

Jacobian 行列，固有値及び固有ベクトル列の表示を簡単にするために，次の変数を導入する．

$$\alpha = \frac{\rho}{\sqrt{2}a} \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}\rho a} \quad \tilde{k}_x = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \quad \tilde{k}_y = \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \\ \tilde{\theta} = \tilde{k}_x u + \tilde{k}_y v \quad R = \phi^2 \quad W = \phi^2 \quad (4.65)$$

ただし, a についての詳細は後にする. ここで, Jacobian 行列を対角化すると,

$$\hat{A}_\xi = \hat{T}_\xi \hat{\Lambda}_\xi \hat{T}_\xi^{-1} \quad \hat{B}_\xi = \hat{T}_\eta \hat{\Lambda}_\eta \hat{T}_\eta^{-1} \quad (4.66)$$

となる. ここで, $\hat{\Lambda}_\xi, \hat{\Lambda}_\eta$ は, それぞれ \hat{A}, \hat{B} の固有値の対角行列である. 次に, $\hat{\Lambda}_\xi, \hat{\Lambda}_\eta, \hat{T}_k, \hat{T}_k^{-1}$ について具体的に示す.

固有値の対角行列

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_\xi &= D[U, U, U + a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, U - a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}] \\ &= \begin{bmatrix} U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U + a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U - a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\hat{\Lambda}_\eta = D[V, V, V + a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}, V - a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}] \quad (4.68)$$

ただし,

$$a^2 = (G + 1) \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma_0 p}{\rho} \quad (4.69)$$

となる. ここで p は,

$$\begin{aligned} p &= G \left[E_s - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right] \\ &= (\gamma_0 - 1) \left[E_s - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right] \end{aligned} \quad (4.70)$$

となる.

右固有ベクトル列

$$\hat{T}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha & \alpha \\ u & \tilde{k}_y \rho & \alpha(v + \tilde{k}_x a) & \alpha(u - \tilde{k}_x a) \\ v & -\tilde{k}_x \rho & \alpha(v + \tilde{k}_y a) & \alpha(u - \tilde{k}_y a) \\ \frac{R}{G} & \rho(\tilde{k}_y u - \tilde{k}_x v) & \alpha\left(\frac{R+a^2}{G} + a\tilde{\theta}\right) & \alpha\left(\frac{R+a^2}{G} - a\tilde{\theta}\right) \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

左固有ベクトル列

$$\hat{T}_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - Wa^{-2} & Ga^{-2}u & Ga^{-2}v & -Ga^{-2} \\ -\rho^{-1}(\tilde{k}_y u - \tilde{k}_x v) & \tilde{k}_y \rho^{-1} & -\tilde{k}_x \rho^{-1} & 0 \\ \beta(W - a\tilde{\theta}) & \beta(\tilde{k}_x a - Gu) & \beta(\tilde{k}_y a - Gv) & \beta G \\ \beta(W + a\tilde{\theta}) & -\beta(\tilde{k}_x a + Gu) & -\beta(\tilde{k}_y a + Gv) & \beta G \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

4.3.2 凝縮有の場合

Jacobian 行列 (Pulliam の展開形式)

凝縮がある場合 8 行 8 列となり、対角行列および固有ベクトル列は次のようになる。 $\hat{A} = \partial \hat{E} / \partial \hat{U}$, $\hat{B} = \partial \hat{F} / \partial \hat{U}$ について示す。ここで、 \hat{A}, \hat{B} に対して、それぞれ k を ξ, η とすると

$$\hat{A} \text{ or } \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & k_x & k_y & & & & & \\ -u\theta + k_x(\phi^2 + \rho_m g K) & \theta - (G-1)k_x u & k_y u - G k_x v & & & & & \\ -v\theta + k_y(\phi^2 + \rho_m g K) & k_x v - G k_y u & \theta - (G-1)k_y v & & & & & \\ \theta[2\phi^2 - (G+1)\frac{e_m}{\rho_m} & k_x[(G+1)\frac{e_m}{\rho_m} - \phi^2 & k_y[(G+1)\frac{e_m}{\rho_m} - \phi^2 & & & & & \\ + \rho_m g K - G g L] & + G g L] - G u \theta & + G g L] - G v \theta & & & & & \\ -g\theta & k_x g & k_y g & & & & & \\ -D_1 \theta & k_x D_1 & k_y D_1 & & & & & \\ -D_2 \theta & k_x D_2 & k_y D_2 & & & & & \\ -D_3 \theta & k_x D_3 & k_y D_3 & & & & & \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ k_x G & -k_x(\rho_m K - G L) & 0 & 0 & 0 & & & \\ k_y G & -k_y(\rho_m K - G L) & 0 & 0 & 0 & & & \\ (G+1)\theta & \theta(G L - \rho_m K) & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & \theta & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \theta & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \theta & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta & & \end{bmatrix}$$

ここで、 ρ_m は混合気体の密度、 e_m は混合気体の内部エネルギーである。さらに、

$$\theta = k_x u + k_y v \quad (4.73)$$

$$\phi^2 = \frac{1}{2} G (u^2 + v^2) \quad (4.74)$$

ただし、

$$G = \left(1 - g \frac{M_m}{M_v}\right) / \left(\frac{1}{\gamma_0 - 1} + g \frac{M_m}{M_v}\right) \quad (4.75)$$

である。さらに K は、

$$K = Z \left[e_m - \frac{1}{2} \rho_m (u^2 + v^2) + \rho_m g L \right] \quad (4.76)$$

ただし、

$$Z = \left(\left(\frac{1}{\gamma_0 - 1} + 1 \right) \frac{M_m}{M_v} \right) / \left(\rho_m^2 \left(\frac{1}{\gamma_0 - 1} + g \frac{M_m}{M_v} \right) \right)^2 \quad (4.77)$$

である。

固有値と固有ベクトル列

Jacobian 行列，固有値及び固有ベクトル列の表示を簡単にするために，次の変数を導入する．

$$\alpha = \frac{\rho_m}{\sqrt{2}a} \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}\rho_m a} \quad \tilde{k}_x = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \quad \tilde{k}_y = \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}$$

$$\tilde{\theta} = \tilde{k}_x u + \tilde{k}_y v \quad R = \phi^2 - GgL \quad W = \phi^2 + \rho_m gK \quad (4.78)$$

ただし， a についての詳細は後にする．ここで Jacobian 行列を対角化すると，

$$\hat{A}_\xi = \hat{T}_\xi \hat{\Lambda}_\xi \hat{T}_\xi^{-1} \quad \hat{B}_\eta = \hat{T}_\eta \hat{\Lambda}_\eta \hat{T}_\eta^{-1} \quad (4.79)$$

となる．ここで， $\hat{\Lambda}_\xi$ ， $\hat{\Lambda}_\eta$ は，それぞれ \hat{A} ， \hat{B} の固有値の対角行列である．次に， $\hat{\Lambda}_\xi$ ， $\hat{\Lambda}_\eta$ ， \hat{T}_k ， \hat{T}_k^{-1} について具体的に示す．

固有値の対角行列

$$\hat{\Lambda}_\xi = D[U, U, U + a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, U - a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, U, U, U, U]$$

$$= \begin{bmatrix} U & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U + a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U - a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

$$\hat{\Lambda}_\eta = D[V, V, V + a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}, V - a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}, V, V, V, V] \quad (4.81)$$

ただし，

$$a^2 = (G+1) \frac{p}{\rho_m} \quad (4.82)$$

となる．ここで p は，

$$p = G \left[E_s - \frac{1}{2} \rho_m (u^2 + v^2) + \rho_m gL \right] \quad (4.83)$$

となる．

第5章 乱流モデル

工学分野において重要な高レイノルズ数流れでは、流れの中の“乱れ”が成長し、時間的にも空間的にも不規則な流れ現象が生ずる。仮に支配方程式と境界条件を正しく与えることができれば、数値シミュレーションによって“乱流”をシミュレーションすることができる。しかし、正しく乱流現象を捉えるためには、現在のスーパーコンピュータとは桁違いの記憶容量と計算能力が要求される。このため、乱流の直接シミュレーションは、比較的低いレイノルズ数にとどまっているのが現状である。実用上重要な高いレイノルズ数の乱流の取り扱いには、何らかの方法で乱流のもつ輸送特性を近似し、それを方程式の中に修正項として導入する（乱流のモデル化）。そしてこの時の修正項の評価方法を乱流モデル^{(99),(103)}と呼ぶ。

乱流解析手法には、3種類の方法があり、以下簡単に説明する。ここで後者にいく程、厳密な解が得られるが、計算に必要となる時間・メモリーが大きくなる。

(a) RANS(Reynoldes averaged Navier-Storks equations, レイノルズ平均)

方程式を、レイノルズ平均することによって生ずるレイノルズ応力をモデル化する方法。工業的によく用いられる。更に下記のように分類される⁽¹⁰⁹⁾。

1. 渦粘性モデル 渦粘性を速度と関連づける方法。
2. 応力方程式モデル レイノルズ応力方程式を解く方法。

(b) LES(Large eddy simulation, 格子平均)

方程式を、格子平均をおこない流れ場を分解し、計算格子幅より大きいスケールの運動は直接計算、小さいスケール運動に対してはモデル化を行い計算する方法。

(c) DNS(Direct numerical simulation, 直接法)

方程式の平均化を行わないで直接、解析する方法。付加的なモデルがいない。Kolmogorov maicroscale と同程度のスケールまで格子を細かくする必要がある。乱流の本質は3次元なので、3次元計算のみ使用される。

本研究では、これら乱流解析方法として計算条件が易しく、かつ単純な「RANSの渦粘性モデル」を採用し計算を行う。つまり、乱流モデルにより渦粘性係数（乱流粘性係数）を方程式内に導入して評価する。

5.1 渦粘性モデル

レイノルズ応力

単位体積あたりの x 方向の運動量が $\rho(u \pm u') = \rho u(y \pm l)$ である流体塊が、 y 軸に直角な単位面積あたりに体積 $(\mp v')$ だけ y 軸の負の方向 (あるいは正の方向) に移動する。その結果、平均的に $E[\rho(u \pm u') \cdot (\mp v')] = E[-\rho u v' - \rho u' v']$ の運動量が y 方向に輸送される。ここに、 v' は流体塊の y 方向への輸送速度であり、 E は統計的平均を意味する。したがって、運動量の法則により y 軸に直角な単位面積には、輸送された運動量に等しい τ_{yx} が運動量成分の方向 (x 方向) に作用するものとしてみなしうる。すなわち、 $E[v'] = 0$ を考慮すれば、

$$\begin{aligned}\tau_{yx} &= -E[\rho(u + u')v'] \\ &= -E[\rho u' v'] \\ &= -\overline{\rho u' v'}\end{aligned}$$

このような流れの乱流運動に伴う応力はレイノルズにより導かれた。この応力は、レイノルズ応力 (Reynolds stress) $R_{i,j}$ と呼ばれる⁽¹⁰¹⁾。このレイノルズ応力は、乱流現象の理論の基礎をなすものである。上の説明では τ_{yx} 成分のみ導いたが、他の成分についても同様にレイノルズ応力が存在する。

すでに、前節において、N-S 方程式 (前節の全成分の運動量の式) からレイノルズ応力を導き出しており、平均流運動方程式と全成分の運動量方程式を区別する唯一の量としてあらわれている。この平均流運動方程式は、レイノルズ平均 NS 方程式と呼ばれ、レイノルズによって導き出された。このレイノルズ平均 NS 方程式のことを RANS (Reynoldes averaged Navier-Storks equations) やレイノルズ方程式と呼ぶ場合もある。

これら、上記の関係は非圧縮性乱流に対してレイノルズが導いた。圧縮性乱流に対しても適当な仮定のもと前節で示したように方程式が求めることができる。その方程式を遷音速・超音速流れの計算流体力学研究者は、時間平均 NS 方程式 (Time averaged Navie-Stokes equations, TANS) と呼ぶことが多い⁽¹⁰²⁾。また、Morkovin の仮説より、圧縮性乱流において、 $-\overline{\rho u_i'' u_j''} = -\overline{\rho u_i' u_j'}$ と扱うことが出来る。したがって、 $-\overline{\rho u_i'' u_j''}$ を圧縮性流体での乱流運動による応力 (レイノルズ応力) R_{ij} として取り扱う。

本研究で乱流モデルとして採用した RANS (Reynoldes averaged Navier-Storks equations) では、レイノルズ応力 $R_{i,j}$ の取り扱いに関して2つの方法がある。第1の方法では、 $R_{i,j}$ を渦粘性の概念 (渦粘性モデル) を用いて近似する方法。第2の方法では、 $R_{i,j}$ の輸送方程式 (レイノルズ応力方程式) を直接取り扱う方法。本研究では、計算が容易な第1の渦粘性モデルによりレイノルズ応力を導出する。

レイノルズ応力を具体的に表すには関係式が必要となる。最も単純な考え方はレイノルズ応力を平均速度分布と関連付ける方法である。渦粘性の概念の下に平均速度および乱流を特徴付けるスカラー量を用いてレイノルズ応力を近似する方法を、渦粘性 (型) モデルと総称する⁽¹⁰³⁾。

ここでは、渦粘性モデリングとして最も簡単なブシネスク (Boussinesq) 近似と、その基となったプラントル (Prandtl) の混合長理論 (混合距離理論) について説明する。後述の乱流モデルの Baldwin-Lomax モデルでは、混合長理論を適応し、ブシネスク近似を $k - \epsilon$ モデルに適応している。

ブシネスク近似

まず、考えの基本となった非圧縮性流体に対しての理論を述べる。その後、圧縮性流体の対応を述べる。

[非圧縮性乱流]

乱流渦によって発生する応力を分子粘性応力との類推から与える考え方がある。ここで分子粘性応力は粘性係数と速度勾配の積で表現される事が実験的に確認されており、次式のように表される。

$$\tau_{ij} = \rho\nu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

分子速度の平均を \bar{v} 、平均自由行程を l_F としたとき、分子動粘性係数 ν は次式と表される。

$$\nu = \frac{1}{3}\bar{v}l_F$$

乱流応力も同様に、渦による拡散を表す係数 ν_t と平均速度勾配の積であると考えれば、

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \rho\nu_t\left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right) - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij} \quad (5.1)$$

これをレイノルズ応力のブシネスクの渦粘性近似と呼ぶ。 ν_t は分子動粘性係数 ν に対応する渦運動効果を表すもので、渦動粘性係数 (kinematic eddy viscosity) または乱流動粘性係数とよばれる。 ν とは異なり ν_t は流体の性質では定まらず、流体運動の場所の関数となる。分子動粘性係数と同じく [長さ]×[速さ] の次元をもち、次のように表すことができる。

$$\nu_t = u_t l$$

ここで u_t は乱流渦の特徴的な速度であり、 l はその特徴的な長さスケールである。ただし、分子動粘性係数にみられる係数 $1/3$ に対応する定数は l の定義に含まれるものとして省略されている。

また、式 (5.1) の右辺第二項 $2/3 \cdot \rho k\delta_{ij}$ は両辺の縮約をとったときの恒等関係から必要となる項であり、レイノルズ応力の等方成分を表している。

式 (5.1) が高い精度で成立するためには平均場と変動場におけるスケールの分離と変動場の高い等方性が必要となり、工学分野で実際に取り扱われる複雑な乱流場では十分に満足されない事が多い。

[圧縮性乱流]

上記の関係を圧縮性流体に適用すると、せん断応力に体積膨張の効果が加わり分子粘性応力は次式となる。

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

ここで第二粘性係数 λ を $-2/3 \cdot \mu$ とする。

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) = \mu S_{ij}$$

乱流応力 (レイノルズ応力) では、

$$R_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j} = -\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k}\right) - \frac{2}{3}\bar{\rho}k\delta_{ij} = \mu_t S_{ij} - \frac{2}{3}\bar{\rho}k\delta_{ij}$$

このモデルを導入することで、前節の RANS 方程式の粘性項では、次式のようになる。ここで分子粘性応力の速度は、前章で導出したようにファール平均である。

$$\tau_{ij} + R_{ij} = (\mu_l + \mu_t)S_{ij} - \frac{2}{3}\bar{\rho}k\delta_{ij}$$

$$\text{ここで } S_{ij} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k}$$

と簡単な形となり，計算が容易となる．

次に問題となるのは，レイノルズ応力内の渦粘性係数 μ_t をどう評価するかである．この評価方法に3つの方法がある． μ_t を求める際に必要な乱れの特性を的確に反映する物理量の数つまり，追加される方程式の数で呼び方が決められる．

- 0 方程式モデル 新たな方程式を解かなくて良い．
- 1 方程式モデル 1 つの方程式を解いて求める．
- 2 方程式モデル 2 つの方程式を解いて求める．

混合長理論

ここでは，レイノルズ応力の近似法だけでなく，渦粘性係数の導出方法まで述べる．ただし，流れ場は，考えが容易な非圧縮乱流で，かつ単純せん断流（クエット流）として述べる．

ある点に生じる流速 u の変動分 u' は流体粒子の移動距離 l_1 とその平均時間勾配に $d\bar{u}/dy$ に比例する． v' も同じように平均速度勾配に比例すると考えられる．

$$\overline{u'} = l_1 \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad \overline{v'} = l_2 \frac{d\bar{u}}{dy}$$

流速の変動分を時間（もしくは空間か集合）の二乗平均を行い，レイノルズ応力を求める．ここで α は $u'v'$ の相関係数で，さらに $l^2 = \alpha l_1 l_2$ とする．

$$-\overline{\rho u'v'} \approx \rho \overline{u'_{rms} v'_{rms}} \approx \rho \alpha (l_1 \frac{d\bar{u}}{dy}) (l_2 \frac{d\bar{u}}{dy}) = \rho \alpha l_1 l_2 (\frac{d\bar{u}}{dy}) (\frac{d\bar{u}}{dy}) = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}$$

上式の絶対値記号は，レイノルズ応力 $-\overline{\rho u'v'}$ と $\partial \bar{u} / \partial y$ が同符号となるように考慮したためである．

ここで，前節で行ったように，乱流渦によって発生する応力（レイノルズ応力）を分子粘性応力との類推から与える．ここで分子粘性応力は，次式（ニュートンの粘性抵抗則）でありこの式と対応させる．

$$\tau_{xy} = \rho \nu \frac{du}{dy}$$

したがって，レイノルズ応力 R_{ij} と乱流動粘度 ν_t は次式となる．

$$R_{ij} = -\overline{\rho u'v'} = \rho \nu_t \frac{d\bar{u}}{dy}$$

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|$$

この理論は，運動量が混合距離の間で保存されて運搬されると考えるので運動量輸送理論，またはプラントルの混合距離理論（混合長理論）(mixing length theory) と呼ばれ， l は混合距離または混合長 (mixing length) と呼ばれている．

通常は ν_t よりも, $\mu_t = \rho\nu_t$ が用いられ, μ_t を乱流動粘度 (eddy kinematic viscosity), もしくは乱流拡散係数 (eddy diffusion coefficient) と呼ぶ.

$$R_{ij} = -\overline{\rho u'v'} = \mu_t \frac{d\bar{u}}{dy}$$

この混合長理論を, 本研究で対象とする一般的な圧縮性乱流に対応させる. 分子粘性応力とレイノルズ応力は, 次式となる.

$$\tau_{ij} = \mu_l \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = \mu_l S_{ij}$$

$$R_{ij} = -\overline{\rho u''v''} = -\overline{\rho u'v'} = \mu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) = \mu_t S_{ij}$$

このモデルを導入することで, 前節の RANS 方程式の粘性項では, 次式のようになる. ここで分子粘性応力の速度は, 前章で導出したようにファールブル平均である.

$$\tau_{ij} + R_{ij} = (\mu_l + \mu_t) S_{ij}$$

$$\text{ここで } S_{ij} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k}$$

このように, かなり簡単な形となり, 前節のブシネスク近似よりも計算が容易となる. また, 渦粘性係数は次式となる. 速度勾配成分にひずみ速度テンソルを用いた場合.

$$\mu_t = \rho\epsilon = \rho l^2 \left| \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right| = \rho l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)^2}$$

速度勾配成分に渦度を用いた場合. 本研究では 2 次元より.

$$\mu_t = \rho\epsilon = \rho l^2 \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right| = \rho l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right)^2}$$

ここで混合長 l は, 壁面からの距離 y_n に比例すると考えられ,

$$l = \kappa y_n \quad \text{または} \quad l = \kappa y_n f$$

である. ここで Karman 定数 $\kappa (= 0.41)$, f は Van-Driest の減衰関数で

$$f = 1 - \exp \frac{-y^+}{A}$$

である. ただし, 定数 $A (= 26)$ である. 減衰関数 f は境界層の粘性底層内で乱れが減衰していく状態をしめす関数で壁面上で 0, 外層で 1 となる関数である. y^+ は, 後述する壁法則で壁面近くの流速分布決定する無次元量である.

以上のように, この理論を使うことによって, 新たな方程式を解かず流れ場のみでの情報で渦粘性係数 ν_t を求め, レイノルズ応力 R_{ij} を決める事ができる

本章の説明では, 0 方程式モデルの代表といえる混合長理論を応用した Baldwin-Lomax モデルと, ブシネスク近似を使った 2 方程式モデルの代表といえる $k - \epsilon$ モデルについて説明する.

5.2 Baldwin-Lomax モデル

ここでは、0 方程式モデルの代表例ともいえる Baldwin-Lomax モデル (1978)⁽⁷⁴⁾⁽¹¹⁴⁾ について述べる。0 方程式モデルとは、乱流の生成と散逸が等しい平行モデルのことで、流線型物体の高レイノルズ数流れで剥離がなく圧力勾配が小さい場合は、他の高次モデルよりも信頼性が高いといわれている。Baldwin-Lomax モデルは Cebeci-Smith モデル (1974) に修正を加え使い易くしたものである。具体的に言うと、Cebeci のモデルにおいては μ_t を求めるために乱流境界層 (turbulent boundary layer) 外縁を定めなければならなかったが、Baldwin-Lomax モデルでは渦度 (vorticity) を利用 (乱流スケールを境界層内の渦度分布から計算する) することでその必要を取り除いている。Cebeci のモデルと Baldwin-Lomax モデルはかなり類似しているが、違いは外層での速度スケールの取り方で、Cebeci のモデルは速度に、Baldwin-Lomax モデルは渦度に基づいている。

Baldwin-Lomax モデルでは、境界層を内層 (inner layer) と外層 (outer layer) に分けて渦粘性係数を近似する。いわゆる混合長理論 (mixing length theory) に基づいた代数乱流粘性モデルである。また、平板に対するモデルながら広範囲の高速流体現象に適用が可能である。

本章では、初めにその 0 次方程式の基礎理論として壁法則 (wall-law) について述べる。そして、その応用である実際計算で使用した渦粘性係数の導出方法について述べる。

5.2.1 壁法則 (壁関数)

壁面近くの流れは、そこで重要な役割をする物理量の密度 ρ 、動粘性係数 ν 、壁面からの垂直方向距離 y_n 、壁面摩擦応力 τ_w により支配されている。この流れ全体にかかる量であるレイノルズ数 $Re = ud/\nu$ には無関係であると推測される。前者のうち壁面摩擦応力 τ_w と密度 ρ から次式の速度次元の量を導く。

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (\tau_w = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} |_w)$$

これを壁面摩擦速度 (friction velocity) と呼ばれ、壁面近くの流れの代表速度とみなす。これを使いレイノルズ数と同様な無次元パラメータ y^+ をもとめる。

$$y^+ = \frac{u_\tau y_n}{\nu}$$

この y^+ によって壁面近くの速度分布が決められる。これを Prandtl の壁法則 (law of wall) という⁽¹⁰¹⁾。

$$\frac{\bar{u}(y)}{u_\tau} = f_n(y^+)$$

乱流境界層の壁近くには上記の壁法則の普遍速度分布 $u^+ = \bar{u}/u_\tau$ が存在する。壁面近くの速度分布を次の 3 層モデル (壁関数) として考える。

粘性低層	:	$0 \leq y^+ \leq 5$:	$u^+ = y^+$
遷移層 (バッファ領域)	:	$5 \leq y^+ \leq 30$:	$u^+ = 5.0 \ln y^+ - 3.05$
乱流層	:	$30 \leq y^+$:	$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + 5.0$

但し、

$$\text{カルマン定数 } \kappa = 0.41, \quad u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{u_\tau y_n}{\nu}$$

したがって、これより、渦動粘性係数は、

$$\begin{aligned}
\text{粘性低層} & : 0 \leq y^+ \leq 5 & : \frac{\nu_t}{\nu} = 0 \\
\text{遷移層} & : 5 \leq y^+ \leq 30 & : \frac{\nu_t}{\nu} = \frac{y^+}{5} - 1 \\
\text{乱流層} & : 30 \leq y^+ & : \frac{\nu_t}{\nu} = \kappa y^+ - 1
\end{aligned}$$

5.2.2 渦粘性係数（乱流粘性係数）の導出

この章の始めに述べたが、このモデルでは渦粘性係数を求めるのに、境界層の内層 (inner layer) と外層 (outer layer) に分けて次のように考える。

$$\begin{aligned}
\text{内層} & : \text{Prandtl-Van Driest の公式} \\
\text{外層} & : \text{Clauser の公式の改良}
\end{aligned}$$

ここでは、乱流モデルの主問題となる渦粘性係数の導出の方法を説明する。

乱流の影響は、渦粘性係数 (turbulent viscosity) μ_t の項において評価され、輸送方程式の粘性項における粘性係数は、混合長理論より、 $\mu_l + \mu_t$ に置き代える事ができる。

Baldwin-Lomax モデルでは渦粘性係数 μ_t を次の2層領域に分け考えられる。

$$\mu_t = \begin{cases} (\mu_t)_{\text{inner}} & y_n \leq y_{\text{crossover}} \\ (\mu_t)_{\text{outer}} & y_{\text{crossover}} < y_n \end{cases}$$

但し、 y_n は壁からの垂直方向の距離、 $y_{\text{crossover}}$ は、内領域 (inner) 外領域 (outer) の各式から得られるそれぞれの値が一致するときの y_n の最小値である。

内層

内領域では Prandtl-Van Driest の公式が使われる。すなわち、

$$(\mu_t)_{\text{inner}} = \bar{\rho} l^2 |\omega|$$

但し、

$$l = \kappa y_n f$$

$$f = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right)$$

l は混合距離、 f は壁面補正 (減衰関数) を、また A^+ は定数、 κ はカルマン定数を示している。更に、 $|\omega|$ は渦度の大きさで、

$$|\omega| = \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right|$$

また、 y^+ はいわゆる壁法則 (law of the wall) である。すなわち、

$$y^+ = \frac{\bar{\rho}_w u_\tau y_n}{\mu_w} = \frac{\sqrt{\bar{\rho}_w \tau_w}}{\mu_w} y_n \quad (u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\bar{\rho}_w}})$$

但し、添字 w は壁の値を表わし、 u_τ は摩擦速度 (friction velocity) である。

外層

次に外領域では Clauser の公式を Klebanoff の間欠関数 (intermittency function) $F_{KLEB}(y_n)$ で補正した次式が用いられる .

$$(\mu_t)_{outer} = KC_{CP} \cdot \bar{\rho} \cdot F_{WAKE} \cdot F_{KLEB}(y_n) \quad (5.2)$$

但し , K は Clauser 定数 , C_{CP} は補正定数を示している . F_{WAKE} は次式となる .

$$F_{WAKE} = \min \left(y_{max} F_{max} , C_{WK} \cdot y_{max} \frac{U_{DIF}^2}{F_{max}} \right) \quad (5.3)$$

y_{max} と F_{max} は次式の最大値より決定される . 即ち ,

$$F(y_n) = y_n |\omega| \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{y^+}{A^+} \right) \right\} \quad (5.4)$$

F_{max} とは , ある縦断面で発生する $F(y_n)$ の最大値のことであり , y_{max} とは , その時の y_n の値を表す . 伴流域 (wake area) において , 式 (5.4) の輸送項は零にセットされる .

また , 間欠関数 $F_{KLEB}(y_n)$ は次式のように与えられる .

$$F_{KLEB}(y_n) = \left\{ 1 + 5.5 \left(\frac{C_{KLEB}}{y_{max}} y_n \right)^6 \right\}^{-1}$$

U_{DIF} はその縦断面における速度の最大値と最小値の差である . 即ち ,

$$U_{DIF} = (\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2})_{max} - (\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2})_{min}$$

U_{DIF} の第 2 項は , 伴流域を除いて通常零とする . 外領域の公式 (5.2),(5.3) は , 境界層に続く領域および隔てた領域のみならず伴流域にも用いることができる .

要するに , 渦度の分布が長さ決定のために使われることになる . 従って , 境界層 (または伴流域) 外縁を定める必要がなくなるわけである .

なお , 渦粘性係数の導出の諸関係式に現れる定数を次にまとめて示しておく .

$$\left\{ \begin{array}{ll} \kappa & = 0.41 \\ A^+ & = 26.0 \\ C_{CP} & = 1.6 \\ C_{KLEB} & = 0.3 \\ C_{WK} & = 0.25 \\ K & = 0.0168 \\ C_{MUTM} & = 14.0 \end{array} \right.$$

5.2.3 基礎方程式の変形

この Baldwin-Lomax モデルにおいて , 圧縮性流体解析の基礎方程式は次のように変形される .

混合長理論より , 応力項での各応力テンソルにレイノルズ応力が加算される式は , 単純に次のようにおける . ここでは , 粘性応力 τ_{ij-l} とレイノルズ応力を合わせて全体の応力 τ_{ij} とする .

$$\tau_{ij} = \tau_{ij-l} - \rho \tilde{u}^n \tilde{v}^n = (\mu_l + \mu_t) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right)$$

このことより，基礎式は以下の様になる．また，各物理量で ρ, p はレイノルズ平均値，その他 u, T に関してはファール平均値である．

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

運動量の式

$$[x \text{ 方向}] \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

$$[y \text{ 方向}] \quad \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(p + \rho vv)}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$$

エネルギーの式

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((\rho e + p)u) + \frac{\partial}{\partial y}((\rho e + p)v) \\ = \frac{\partial}{\partial x}(u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + c_p \left(\frac{\mu_l}{Pr_l} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x}) \\ + \frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + c_p \left(\frac{\mu_l}{Pr_l} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y}) \end{aligned}$$

この式を，無次元化・一般座標変換を行う．一般座標変換は，乱流モデルの有無に関わらず，変わりなく，規則通り変換される．無次元化も特に注意すべきことなく，新たに出てきた物理量渦粘性係数 μ_t の影響は，全くない．

また，圧力を全エネルギーから求める際，必要な $1/2 \widetilde{u_i'' u_i''} (= k)$ は，この Baldwin-Lomax モデルでの R_{ij} のモデル化は， $\widetilde{\rho u_i'' u_i''} = 0$ となる．つまり $k = 0$ であるため，乱流モデルの無い場合の圧力の導出方法のまま使用される．

このように，乱流モデルを組み込んだことによる，無次元化の変更箇所は全くなく組み込み前の場合と同じになる．ここで，唯一の新たな物理量である渦粘性係数 μ_t の無次元化は，まず全ての物理量を有次元にし，有次元で計算を行い算出する．その後，算出された μ_t を代表粘度 μ_0 で除算し無次元化を行う．

5.3 $k - \epsilon$ モデル

5.3.1 低レイノルズ数型 $k - \epsilon$ モデル

標準的な $k - \epsilon$ モデルは十分に乱れた流れ場を対象として開発されたモデルであるので、壁近傍で壁の減衰効果や粘性効果のある流れ場等には精度の高い解を与えることができない。そこで、壁近傍領域においては壁近傍の乱流特性を記述する壁関数を仮定しこれにより壁面境界条件を与える。壁関数の中でもっとも広く利用されているのがいわゆる一般化された対数則である。しかし、1種類の普遍関数（壁関数）を仮定することはしばしば解の信頼性を低下させ、特に、剥離、衝突等を含む流れ場、非定常流れ場等では正しい解を与えることはできない。よって、これらの問題を解決するために次のような改善がなされた。

1. 渦粘性係数算出の際、壁座標 y^+ 、乱流レイノルズ数等をパラメータとする減衰関数 f_μ を導入する。
2. ϵ 方程式にモデル関数 f_1, f_2 を導入する。
3. 壁近傍の領域に十分細かいメッシュ分割を施し、すべりなしの壁面境界条件下で解くことにより、壁近傍の乱流の挙動、低レイノルズ数を正しく再現する。

これらの低レイノルズ数効果（壁近傍効果）を $k - \epsilon$ モデルに組み込んだモデルは、低レイノルズ数型 $k - \epsilon$ モデル⁽¹⁰³⁾と呼ばれ、Jones and Launder 以来多くのモデルが提案されている。

この低レイノルズ数型 $k - \epsilon$ モデルの一つに Chien らによるモデル^{(114)~(116)}があり、本モデルは様々な TVD スキームによる遷音速乱流流れ場の解析において、有効な乱流モデルであることが報告⁽¹¹⁵⁾されている。よって本研究では、Chien らによる $k - \epsilon$ モデルを採用した。

5.3.2 輸送方程式

$k - \epsilon$ モデル^{(114)~(116)}は、乱流運動を支配する速度スケールと長さのスケールの両者を輸送方程式で与えようとする、2方程式モデルである。しかし、長さスケールを直接に従属変数としてとることはせず、 k を乱れエネルギー、 l を長さスケール、 C^* を定数としたとき

$$\epsilon = C^* k^{3/2} / l$$

で表される乱れエネルギーの散逸率 ϵ に関する輸送方程式を算出して利用する。一般に、2方程式モデルは0方程式モデル（代数モデル）よりも剥離流をよく計算できる。それは、実験で得られる再附着後の壁での剪断応力の急激な回復（上昇）と、剥離領域での速度分布が定性的によく捕らえられるからである。⁽¹⁰⁷⁾

2方程式をテンソル表示を用いて以下に示す。なお、テンソル表示で、添字 $i (i = 1, 2)$ は (x, y) 座標系に対応しており、添字が1つの項で重なっているときは、その添字の和をとる。すなわち、 $i = 1, 2$ に対してそれぞれ $j = 1, 2$ と順に展開して和をとることを意味する。

有次元・直交座標系

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + P - \rho \epsilon + D$$
$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] + (C_1 f_1 P - C_2 f_2 \rho \epsilon) \frac{\epsilon}{k} + E$$

この方程式を解き、渦粘性係数 μ_t を次式により決める。

$$\mu_t = C_\mu f_\mu \frac{\rho k^2}{\epsilon}$$

ここで，Chienらのモデル^{(114)~(116)}より次のように表せる．

$$D = -\frac{2\mu_l k}{y_n^2}, \quad E = -f_3 \frac{2\mu_l \epsilon}{y_n^2}, \quad f_\mu = 1 - \exp(-0.0115y^+)$$

$$f_1 = 1.0, \quad f_2 = 1 - 0.222 \exp\left(-\frac{R_t^2}{36}\right), \quad f_3 = \exp(-0.5y^+)$$

$$C_\mu = 0.09, \quad C_1 = 1.35, \quad C_2 = 1.8, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3$$

$$R_t = \frac{\rho k^2}{\mu_l \epsilon}, \quad P = \mu_t S - \frac{2}{3} \rho k u_{kk}, \quad S = (u_{ij} + u_{ji}) u_{ij} - \frac{2}{3} u_{kk}^2$$

$$y^+ = \frac{\rho_w u_\tau y_n}{\mu_w} = \frac{\sqrt{\rho_w \tau_w}}{\mu_w} y_n \quad (u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}})$$

これより，まとめてベクトル表示すると，

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} + \mathbf{H}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho k \\ \rho \epsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho k u \\ \rho \epsilon u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho k v \\ \rho \epsilon v \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_k}) \frac{\partial k}{\partial x} \\ (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_k}) \frac{\partial k}{\partial y} \\ (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} P - \rho \epsilon - 2\mu_l \frac{k}{y_n^2} \\ C_1 f_1 \left(\frac{\epsilon}{k}\right) P - C_2 f_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} - 2\left(\frac{\epsilon}{y_n^2}\right) \exp(-0.5y^+) \mu_l \end{pmatrix}$$

ここで，定数および関数は，

$$C_\mu = 0.09, \quad C_1 = 1.35, \quad C_2 = 1.8, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3$$

$$f_1 = 1.0, \quad f_2 = 1 - 0.222 \exp\left(-\frac{R_t^2}{36}\right)$$

$$P = \mu_t [2(u_x^2 + v_y^2) + (u_y + v_x)^2 - \frac{2}{3}(u_x + v_y)^2] - \frac{2}{3} \rho k (u_x + v_y)$$

$$y^+ = \frac{\rho_w u_\tau y_n}{\mu_w} = \frac{\sqrt{\rho_w \tau_w}}{\mu_w} y_n \quad (u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}})$$

また，渦粘性係数 μ_t ，乱流レイノルズ数 R_t は次のようになる．

$$\mu_t = C_\mu \left(\frac{\rho k^2}{\epsilon}\right), \quad R_t = \frac{\rho k^2}{\mu_l \epsilon}$$

Cartesian 座標系から一般座標への座標変換では，乱流モデルの有無において大きな変化はなく，規則的に変化し特に注意すべきことはない．乱流補正項 \mathbf{H} に関して，非定常項 $\partial Q/\partial t$ と同じように，ヤコビアン J で除算されるだけである．

また，平均流方程式を考えるため，輸送方程式に平均化を施す．本研究で解析する流れ場は圧縮性流れであるため，平均化操作にファール平均を用いる．

ここで，ファール平均を行うが，圧力・密度はレイノルズ平均とする．

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad p = \bar{p} + p' \quad (\text{レイノルズ平均})$$

$$v_i = \tilde{v}_i + v_i'', \quad h = \tilde{h} + h'', \quad T = \tilde{T} + T'' \quad \text{etc.} \quad (\text{ファール平均})$$

座標変換およびファール平均を行うと次のようになる．

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \frac{\partial \hat{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} + \hat{\mathbf{H}}$$

$$\hat{Q} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \tilde{k} \\ \tilde{\rho} \tilde{\epsilon} \end{pmatrix}, \quad \hat{E} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \tilde{k} \tilde{U} \\ \tilde{\rho} \tilde{\epsilon} \tilde{U} \end{pmatrix}, \quad \hat{F} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \tilde{k} \tilde{V} \\ \tilde{\rho} \tilde{\epsilon} \tilde{V} \end{pmatrix}$$

$$\hat{R} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_k})(\xi_x \tilde{k}_x + \xi_y \tilde{k}_y) \\ (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon})(\xi_x \tilde{\epsilon}_x + \xi_y \tilde{\epsilon}_y) \end{pmatrix}, \quad \hat{S} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_k})(\eta_x \tilde{k}_x + \eta_y \tilde{k}_y) \\ (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon})(\eta_x \tilde{\epsilon}_x + \eta_y \tilde{\epsilon}_y) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} P - \tilde{\rho} \tilde{\epsilon} - 2\mu_l \frac{\tilde{k}}{y_n^2} \\ C_1 f_1(\frac{\tilde{\epsilon}}{k}) P - C_2 f_2 \tilde{\rho} \frac{\tilde{\epsilon}^2}{k} - 2(\frac{\tilde{\epsilon}}{y_n^2}) \exp(-0.5y^+) \mu_l \end{pmatrix}$$

ここで,

$$\tilde{U} = \xi_x \tilde{u} + \xi_y \tilde{v}, \quad \tilde{V} = \eta_x \tilde{u} + \eta_y \tilde{v}$$

$$P = \mu_t [2(\tilde{u}_x^2 + \tilde{v}_y^2) + (\tilde{u}_y + \tilde{v}_x)^2] - \frac{2}{3}(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y)^2 - \frac{2}{3}\tilde{\rho}\tilde{k}(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y)$$

ただし,

$$\tilde{u}_x = \tilde{u}_\xi \xi_x + \tilde{u}_\eta \eta_x, \quad \tilde{u}_y = \tilde{u}_\xi \xi_y + \tilde{u}_\eta \eta_y$$

$$\tilde{v}_x = \tilde{v}_\xi \xi_x + \tilde{v}_\eta \eta_x, \quad \tilde{v}_y = \tilde{v}_\xi \xi_y + \tilde{v}_\eta \eta_y$$

また, μ_t, R_t は次のようになる.

$$\mu_t = C_\mu f_\mu \left(\frac{\tilde{\rho}\tilde{k}^2}{\tilde{\epsilon}} \right), \quad R_t = \frac{\tilde{\rho}\tilde{k}^2}{\mu_l \tilde{\epsilon}}$$

無次元・一般座標系

以下のパラメーターを用いて無次元化する. 単位時間, 単位体積当たりの散逸率 ϵ は, (速度)²/(時間) の次元を持つ. したがって無次元化は, $a_0^2/(L/a_0) = a_0^3/L$ で除算することで行う.

また, この節より記述される物理量は平均量であるが, 煩雑となるため, 平均量を示す \sim を取り除いて表記する.

$$u^* = u/a_0, \quad v^* = v/a_0, \quad x^* = x/L, \quad y^* = y/L$$

$$t^* = t/(L/a_0), \quad \rho^* = \rho/\rho_0, \quad \mu_i^* = \mu_i/\mu_0 \quad (i = l, t)$$

$$k^* = \frac{k}{a_0^2}, \quad \epsilon^* = \frac{\epsilon}{a_0^3/L}$$

また, レイノルズ数と代表マッハ数は, 次のようになる.

$$Re_0 = \frac{\rho_0 a_0 L}{\mu_0}, \quad M_0 = \frac{a_0}{a_0} = 1$$

まず, 行列の 5 行目 ρk の方程式 を無次元化する. ただし, 記述を簡略化するためヤコビアンを消去して示す.

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k U)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho k V)}{\partial \eta} = \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{\partial B}{\partial \eta} + (P - \rho\epsilon - 2\mu_l \frac{k}{y_n^2})$$

$$\text{ここで } A = (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_k})(\xi_x k_x + \xi_y k_y), \quad B = (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_k})(\eta_x k_x + \eta_y k_y)$$

まず A, B および P について無次元化を行う.

$$A = (\mu_l^* \mu_0 + \frac{\mu_t^* \mu_0}{\sigma_k})(\xi_x^* \frac{L}{L} k_x^* \frac{a_0^2}{L} + \xi_y^* \frac{L}{L} k_y^* \frac{a_0^2}{L}) = (\mu_l^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k})(\xi_x^* k_x^* + \xi_y^* k_y^*) \frac{\mu_0 a_0^2}{L} = A^* \frac{\mu_0 a_0^2}{L}$$

$$B = (\mu_i^* \mu_0 + \frac{\mu_t^* \mu_0}{\sigma_k})(\eta_x^* \frac{L}{L} k_x^* \frac{a_0^2}{L} + \eta_y^* \frac{L}{L} k_y^* \frac{a_0^2}{L}) = (\mu_i^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k})(\eta_x^* k_x^* + \eta_y^* k_y^*) \frac{\mu_0 a_0^2}{L} = B^* \frac{\mu_0 a_0^2}{L}$$

$$P = \mu_t^* \mu_0 [2\{(u_x^*)^2 + (v_y^*)^2\} \frac{a_0^2}{L^2} + (u_y^* + v_x^*)^2 \frac{a_0^2}{L^2} - \frac{2}{3}(u_x^* + v_y^*)^2 \frac{a_0^2}{L^2}] - \frac{2}{3} \rho^* \rho_0 k^* a_0^2 (u_x^* + v_y^*) \frac{a_0}{L}$$

$$= \frac{\mu_0 a_0^2}{L^2} \mu_t^* [2\{(u_x^*)^2 + (v_y^*)^2\} + (u_y^* + v_x^*)^2 - \frac{2}{3}(u_x^* + v_y^*)^2] - \frac{2}{3} \rho^* k^* (u_x^* + v_y^*) \frac{\rho_0 a_0^3}{L}$$

$$P = \frac{\rho_0 a_0^3}{L} \left(\frac{\mu_0}{\rho_0 a_0 L} \mu_t^* [2\{(u_x^*)^2 + (v_y^*)^2\} + (u_y^* + v_x^*)^2 - \frac{2}{3}(u_x^* + v_y^*)^2] - \frac{2}{3} \rho^* k^* (u_x^* + v_y^*) \right)$$

ここで $Re_0 = \frac{\rho_0 a_0 L}{\mu_0}$, $M_0 = 1$ より ,

$$P = \frac{\rho_0 a_0^3}{L} \left(\frac{M_0}{Re_0} \mu_t^* [2\{(u_x^*)^2 + (v_y^*)^2\} + (u_y^* + v_x^*)^2 - \frac{2}{3}(u_x^* + v_y^*)^2] - \frac{2}{3} \rho^* k^* (u_x^* + v_y^*) \right) = \frac{\rho_0 a_0^3}{L} P^*$$

A^* , B^* , P^* の関係を用いて方程式全体を無次元化すると ,

$$\frac{\partial(\rho^* \rho_0 k^* a_0^2)}{\partial(t^* L/a_0)} + \frac{\partial(\rho^* \rho_0 k^* a_0^2 U^* a_0)}{\partial(\xi^* L)} + \frac{\partial(\rho^* \rho_0 k^* a_0^2 V^* a_0)}{\partial(\eta^* L)}$$

$$= \frac{\partial A^*}{\partial(\xi^* L)} \frac{\mu_0 a_0^2}{L} + \frac{\partial B^*}{\partial(\eta^* L)} \frac{\mu_0 a_0^2}{L} + (P^* \frac{\rho_0 a_0^3}{L} - \rho^* \rho_0 \epsilon^* \frac{a_0^3}{L} - 2\mu_l^* \mu_0 \frac{(k^* a_0^2)}{(y_n^* L)^2})$$

$$\frac{\partial(\rho^* k^*)}{\partial t^*} \left(\frac{\rho_0 a_0^3}{L} \right) + \frac{\partial(\rho^* k^* U^*)}{\partial \xi^*} \left(\frac{\rho_0 a_0^3}{L} \right) + \frac{\partial(\rho^* k^* V^*)}{\partial \eta^*} \left(\frac{\rho_0 a_0^3}{L} \right)$$

$$= \frac{\partial A^*}{\partial \xi^*} \left(\frac{\mu_0 a_0^2}{L^2} \right) + \frac{\partial B^*}{\partial \eta^*} \left(\frac{\mu_0 a_0^2}{L^2} \right) + (P^* \left(\frac{\rho_0 a_0^3}{L} \right) - \rho \epsilon \left(\frac{\rho_0 a_0^3}{L} \right) - 2\mu_l^* \frac{k^*}{(y_n^*)^2} \left(\frac{\mu_0 a_0^2}{L^2} \right))$$

両辺 $\frac{\rho_0 a_0^3}{L}$ で割る . ここで $\nu_0 = \mu_0/\rho_0$.

$$\frac{\partial(\rho^* k^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^* k^* U^*)}{\partial \xi^*} + \frac{\partial(\rho^* k^* V^*)}{\partial \eta^*} = \frac{\partial A^*}{\partial \xi^*} \left(\frac{\mu_0}{\rho_0 a_0 L} \right) + \frac{\partial B^*}{\partial \eta^*} \left(\frac{\mu_0}{\rho_0 a_0 L} \right) + (P^* - \rho \epsilon - 2\mu_l^* \frac{k^*}{(y_n^*)^2} \left(\frac{\mu_0}{\rho_0 a_0 L} \right))$$

ここで $Re_0 = \frac{\rho_0 a_0 L}{\mu_0}$, $M_0 = 1$ より ,

$$\frac{\partial(\rho^* k^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^* k^* U^*)}{\partial \xi^*} + \frac{\partial(\rho^* k^* V^*)}{\partial \eta^*} = \left(\frac{\partial A^*}{\partial \xi^*} + \frac{\partial B^*}{\partial \eta^*} \right) \left(\frac{M_0}{Re_0} \right) + (P^* - \rho \epsilon - 2\mu_l^* \frac{k^*}{(y_n^*)^2} \left(\frac{M_0}{Re_0} \right))$$

次に , 行列の 6 行目 $\rho \epsilon$ の方程式を無次元化する . ここでも , 記述を簡略化するためヤコビアンを消去して示す .

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \epsilon U)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho \epsilon V)}{\partial \eta}$$

$$= \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{\partial B}{\partial \eta} + (C_1 f_1 \left(\frac{\epsilon}{k} \right) P - C_2 f_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} - 2 \left(\frac{\epsilon}{y_n^2} \right) \exp(-0.5y^+) \mu_l)$$

$$\text{ここで } A = (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon})(\xi_x \epsilon_x + \xi_y \epsilon_y), \quad B = (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon})(\eta_x \epsilon_x + \eta_y \epsilon_y)$$

まず、まず A, B を前述と同様に無次元化を行う。

$$A = (\mu_l^* \mu_0 + \frac{\mu_t^* \mu_0}{\sigma_\epsilon})(\xi_x^* \frac{L}{L} \epsilon_x^* \frac{(a_0^3/L)}{L} + \xi_y^* \frac{L}{L} \epsilon_y^* \frac{(a_0^3/L)}{L}) = (\mu_l^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_\epsilon})(\xi_x^* \epsilon_x^* + \xi_y^* \epsilon_y^*) \frac{\mu_0 a_0^3}{L^2} = A^* \frac{\mu_0 a_0^3}{L^2}$$

$$B = (\mu_l^* \mu_0 + \frac{\mu_t^* \mu_0}{\sigma_\epsilon})(\eta_x^* \frac{L}{L} \epsilon_x^* \frac{(a_0^3/L)}{L} + \eta_y^* \frac{L}{L} \epsilon_y^* \frac{(a_0^3/L)}{L}) = (\mu_l^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k})(\eta_x^* \epsilon_x^* + \eta_y^* \epsilon_y^*) \frac{\mu_0 a_0^3}{L^2} = B^* \frac{\mu_0 a_0^3}{L^2}$$

次に、与式の右辺第3項の乱流補正項 $()=H$ を先に、無次元化を行う。 P に関しては、前述の関係式 $P = \frac{\rho_0 a_0^3}{L} P^*$ を使用する。また、 y^+ は無次元化された値であるため、無次元化に関しては定数と同じように取り扱う。

$$\begin{aligned} H &= C_1 f_1(\frac{\epsilon}{k}) P - C_2 f_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} - 2(\frac{\epsilon}{y_n^2}) \exp(-0.5y^+) \mu_l \\ &= C_1 f_1(\frac{\epsilon^* (a_0^3/L)}{(k^* a_0^2)}) P^* (\frac{\rho_0 a_0^3}{L}) - C_2 f_2 \rho^* \rho_0 \frac{(\epsilon^* (a_0^3/L))^2}{k^* a_0^2} - 2 \frac{(\epsilon^* (a_0^3/L))}{(y_n^* L)^2} \exp(-0.5y^+) \mu_l^* \mu_0 \\ &= C_1 f_1(\frac{\epsilon^*}{k^*}) P^* (\frac{\rho_0 a_0^4}{L^2}) - C_2 f_2 \rho^* \frac{(\epsilon^*)^2}{k^*} (\frac{\rho_0 a_0^4}{L^2}) - 2 \frac{\epsilon^*}{(y_n^*)^2} \exp(-0.5y^+) \mu_l^* (\frac{a_0^3 \mu_0}{L^3}) \\ &= (\frac{\rho_0 a_0^4}{L^2}) (C_1 f_1(\frac{\epsilon^*}{k^*}) P^* - C_2 f_2 \rho^* \frac{(\epsilon^*)^2}{k^*} - 2 \frac{\epsilon^*}{(y_n^*)^2} \exp(-0.5y^+) \mu_l^* (\frac{\mu_0}{\rho_0 a_0 L})) \end{aligned}$$

ここで $Re_0 = \frac{\rho_0 a_0 L}{\mu_0}$ より

$$H = (\frac{\rho_0 a_0^4}{L^2}) (C_1 f_1(\frac{\epsilon^*}{k^*}) P^* - C_2 f_2 \rho^* \frac{(\epsilon^*)^2}{k^*} - 2 \frac{\epsilon^*}{(y_n^*)^2} \exp(-0.5y^+) \mu_l^* (\frac{1}{Re_0}))$$

$$H = (\frac{\rho_0 a_0^4}{L^2}) H^*$$

A^*, B^*, H^* の関係を用いて方程式全体を無次元化すると

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\rho^* \rho_0 \epsilon^* (a_0^3/L))}{\partial(t^*(L/a_0))} + \frac{\partial(\rho^* \rho_0 \epsilon^* (a_0^3/L) U^* a_0)}{\partial(\xi^* L)} + \frac{\partial(\rho^* \rho_0 \epsilon^* (a_0^3/L) V^* a_0)}{\partial(\eta^* L)} \\ &= \frac{\partial A^*}{\partial(\xi^* L)} (\frac{\mu_0 a_0^3}{L^2}) + \frac{\partial B^*}{\partial(\eta^* L)} (\frac{\mu_0 a_0^3}{L^2}) + (\frac{\rho_0 a_0^4}{L^2}) H^* \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\rho^* \epsilon^*)}{\partial t^*} (\frac{\rho_0 a_0^4}{L^2}) + \frac{\partial(\rho^* \epsilon^* U^*)}{\partial \xi^*} (\frac{\rho_0 a_0^4}{L^2}) + \frac{\partial(\rho^* \epsilon^* V^*)}{\partial \eta^*} (\frac{\rho_0 a_0^4}{L^2}) = \frac{\partial A^*}{\partial \xi^*} (\frac{\mu_0 a_0^3}{L^3}) + \frac{\partial B^*}{\partial \eta^*} (\frac{\mu_0 a_0^3}{L^3}) + (\frac{\rho_0 a_0^4}{L^2}) H^*$$

両辺 $\frac{\rho_0 a_0^4}{L^2}$ で割ると、

$$\frac{\partial(\rho^* \epsilon^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^* \epsilon^* U^*)}{\partial \xi^*} + \frac{\partial(\rho^* \epsilon^* V^*)}{\partial \eta^*} = \frac{\partial A^*}{\partial \xi^*} (\frac{\mu_0}{\rho_0 a_0 L}) + \frac{\partial B^*}{\partial \eta^*} (\frac{\mu_0}{\rho_0 a_0 L}) + H^*$$

よって $Re_0 = \frac{\rho_0 a_0 L}{\mu_0}$, $M_0 = 1$ より、

$$\frac{\partial(\rho^*\epsilon^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^*\epsilon^*U^*)}{\partial \xi^*} + \frac{\partial(\rho^*\epsilon^*V^*)}{\partial \eta^*} = \left(\frac{M_0}{Re_0}\right)\left(\frac{\partial A^*}{\partial \xi^*} + \frac{\partial B^*}{\partial \eta^*}\right) + H^*$$

渦粘性係数，乱流レイノルズ数の式は無次元化の値では，以下の様になる．

$$\mu_t^* = \frac{\mu_t}{\mu_0} = \frac{C_\mu f_\mu \left(\frac{\rho k^2}{\epsilon}\right)}{\mu_0} = C_\mu f_\mu \left(\frac{\rho^* \rho_0 (k^* a_0^2)^2}{\epsilon^* (a_0^3/L)}\right) \frac{1}{\mu_0} = C_\mu f_\mu \left(\frac{\rho^* (k^*)^2}{\epsilon^*}\right) \frac{\rho_0 a_0 L}{\mu_0}$$

$$\mu_t^* = C_\mu f_\mu \left(\frac{\rho^* (k^*)^2}{\epsilon^*}\right) (Re_0) \quad \because Re_0 = \frac{\rho_0 a_0 L}{\mu_0}$$

$$R_t = \frac{\rho k^2}{\mu_l \epsilon} = \frac{\rho^* \rho_0 (k^* a_0^2)^2}{\mu_l^* \mu_0 \epsilon (a_0^3/L)} = \frac{\rho^* (k^*)^2}{\mu_l^* \epsilon^*} \left(\frac{\rho_0 a_0 L}{\mu_0}\right) = \frac{\rho^* (k^*)^2}{\mu_l^* \epsilon^*} (Re_0) \quad \because Re_0 = \frac{\rho_0 a_0 L}{\mu_0}$$

このように，無次元渦粘性係数や乱流レイノルズ数を求める際，無次元化物理量を使用する場合は，代表レイノルズ数を掛けなければならない．

以上，無次元化の記号*を取り，ヤコビアンを考慮しまとめると，次のようになる

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \frac{\partial \hat{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} + \hat{H}$$

$$\hat{Q} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho k \\ \rho \epsilon \end{pmatrix}, \quad \hat{E} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho k U \\ \rho \epsilon U \end{pmatrix}, \quad \hat{F} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho k V \\ \rho \epsilon V \end{pmatrix}$$

$$\hat{R} = \frac{M_0}{Re_0 J} \begin{pmatrix} (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_k})(\xi_x k_x + \xi_y k_y) \\ (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon})(\xi_x \epsilon_x + \xi_y \epsilon_y) \end{pmatrix}, \quad \hat{S} = \frac{M_0}{Re_0 J} \begin{pmatrix} (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_k})(\eta_x k_x + \eta_y k_y) \\ (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon})(\eta_x \epsilon_x + \eta_y \epsilon_y) \end{pmatrix}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} P - \rho \epsilon - 2\left(\frac{M_0}{Re_0}\right) \mu_l \frac{k}{y_n^2} \\ C_1 f_1 \left(\frac{\epsilon}{k}\right) P - C_2 f_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} - 2\left(\frac{M_0}{Re_0}\right) \left(\frac{\epsilon}{y_n^2}\right) \exp(-0.5y^+) \mu_l \end{pmatrix}$$

$$P = \left(\frac{M_0}{Re_0}\right) \mu_t [2(u_x^2 + v_y^2) + (u_y + v_x)^2 - \frac{2}{3}(u_x + v_y)^2] - \frac{2}{3} \rho k (u_x + v_y)$$

$$\mu_t = C_\mu f_\mu \left(\frac{\rho k^2}{\epsilon}\right) \left(\frac{Re_0}{M_0}\right), \quad R_t = \left(\frac{Re_0}{M_0}\right) \frac{\rho k^2}{\mu_l \epsilon}$$

次に，ブシネスク近似を使う事で粘性項に加えられる $2/3 \cdot \rho k$ の無次元化を考える．有次元の方程式の粘性項は，ブシネスク近似を使うことで次のようになる．代表例として，x方向の運動方程式の粘性項で $\partial/\partial x$ の方を考える．

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} + R_{xx}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left((\mu_l + \mu_t) S_{xx} - \frac{2}{3} \rho k \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial (x^* L)} \left((\mu_l^* \mu_0 + \mu_t^* \mu_0) S_{xx}^* \frac{a_0}{L} - \frac{2}{3} \rho^* \rho_0 k^* a_0^2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^*} \left((\mu_l + \mu_t) S_{xx}^* \frac{\mu_0 a_0}{L^2} - \frac{2}{3} \rho^* k^* \frac{\rho_0 a_0^2}{L} \right) \end{aligned}$$

ここで，運動量方程式では，無次元化を行うに全体を $(\rho_0 a_0^2)/L$ で除算する．

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{\partial}{\partial X^*} \left((\mu_l + \mu_t) S_{xx}^* \frac{\mu_0}{\rho_0 a_0 L} - \frac{2}{3} \rho^* k^* \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial X^*} \left((\mu_l + \mu_t) S_{xx}^* \frac{1}{Re_0} - \frac{2}{3} \rho^* k^* \right) \\ &= \frac{1}{Re_0} \frac{\partial}{\partial X^*} \left((\mu_l + \mu_t) S_{xx}^* - \frac{2}{3} \rho^* k^* Re_0 \right) \end{aligned}$$

このように，粘性項を無次元化すると， $2/3 \cdot \rho k$ に Re_0 を掛けることで，無次元化の値のままで使用できる．

つぎに乱流エネルギー k が含むエネルギーを使い圧力を求める式を無次元化する．

$$\begin{aligned} p &= (\gamma - 1)\rho \left(e_s - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - k \right) \\ p^* \rho_0 a_0^2 &= (\gamma - 1)\rho^* \rho_0 \left(e_s^* a_0^2 - \frac{1}{2}((u^* a_0)^2 + (v^* a_0)^2) - k^* a_0^2 \right) \\ p^* \rho_0 a_0^2 &= (\gamma - 1)\rho^* \left(e_s^* - \frac{1}{2}((u^*)^2 + (v^*)^2) - k^* \right) \rho_0 a_0^2 \\ p^* &= (\gamma - 1)\rho^* \left(e_s^* - \frac{1}{2}((u^*)^2 + (v^*)^2) - k^* \right) \end{aligned}$$

このように無次元化した場合でも有次元と同じ形で圧力を求める事が出来る．

5.3.3 式の最終形

$k - \epsilon$ モデルにおける無次元化・座標変換ありの輸送方程式の最終形は以下のようになる．

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re_0} \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} \right) + \hat{H}$$

但し，

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \\ \rho k \\ \rho \epsilon \end{pmatrix}, & \hat{E} &= \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ U(E_t + p) \\ \rho k U \\ \rho \epsilon U \end{pmatrix}, & \hat{F} &= \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ V(E_t + p) \\ \rho k V \\ \rho \epsilon V \end{pmatrix} \\ \hat{R} &= \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{yx} \\ \xi_x \tau_{xy} + \xi_y \tau_{yy} \\ \xi_x \alpha + \xi_y \beta \\ (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_k})(\xi_x k_x + \xi_y k_y) \\ (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon})(\xi_x \epsilon_x + \xi_y \epsilon_y) \end{pmatrix}, & \hat{S} &= \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{yx} \\ \eta_x \tau_{xy} + \eta_y \tau_{yy} \\ \eta_x \alpha + \eta_y \beta \\ (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_k})(\eta_x k_x + \eta_y k_y) \\ (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon})(\eta_x \epsilon_x + \eta_y \epsilon_y) \end{pmatrix} \\ \hat{H} &= \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P - \rho \epsilon - 2 \left(\frac{M_0}{Re_0} \right) \mu_l \frac{k}{y_n^2} \\ C_1 f_1 \left(\frac{\epsilon}{k} \right) P - C_2 f_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} - 2 \left(\frac{M_0}{Re_0} \right) \left(\frac{\epsilon}{y_n^2} \right) \exp(-0.5y^+) \mu_l \end{pmatrix} \\ \alpha &= \tau_{xx} u + \tau_{xy} v + \frac{\mu}{(\gamma - 1)Pr} \frac{\partial T}{\partial x}, & \beta &= \tau_{yx} u + \tau_{yy} v + \frac{\mu}{(\gamma - 1)Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned}$$

$$U = \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_x u + \eta_y v$$

ここで，応力テンソルの成分は，

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{2}{3}\rho k Re_0, \quad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{2}{3}\rho k Re_0$$

$$\mu = \mu_l + \mu_t$$

$$\frac{\mu}{Pr} = \frac{\mu_l}{Pr_l} + \frac{\mu_t}{Pr_t}$$

$$P = \left(\frac{M_0}{Re_0}\right)\mu_t[2(u_x^2 + v_y^2) + (u_y + v_x)^2 - \frac{2}{3}(u_x + v_y)^2] - \frac{2}{3}\rho k(u_x + v_y)$$

$$\mu_t = C_\mu f_\mu \left(\frac{\rho k^2}{\epsilon}\right) \left(\frac{Re_0}{M_0}\right), \quad R_t = \left(\frac{Re_0}{M_0}\right) \frac{\rho k^2}{\mu_l \epsilon}$$

定数および関数⁽¹¹⁵⁾

$$C_\mu = 0.09, \quad C_1 = 1.35, \quad C_2 = 1.8, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3$$

$$f_1 = 1.0, \quad f_2 = 1 - 0.222\exp\left(-\frac{R_t^2}{36}\right), \quad f_\mu = 1 - \exp(-0.0115y^+), \quad y^+ = \frac{\rho_w u_\tau y_n}{\mu_w}$$

5.3.4 固有値と固有ベクトル列

Jacobian 行列 (Pulliam の展開形式)(Pulliam - Chausse)

ヤコビ行列, 右固有ベクトルおよび左固有ベクトルによる行列は以下の形 (Pulliam - Chausse)⁽¹¹⁷⁾ となる. 初めにヤコビ行列 $\hat{A} = \partial \hat{E} / \partial \hat{Q}$, $\hat{B} = \partial \hat{F} / \partial \hat{Q}$ について示す. ここで, \hat{A}, \hat{B} に対して, それぞれ $k = \xi$ or η とすると,

$$\hat{A} \text{ or } \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & k_x & k_y & 0 & 0 & 0 \\ -u\theta + k_x\phi^2 & \theta - (G-1)k_x u & k_y u - Gk_x v & k_x G & 0 & 0 \\ -v\theta + k_y\phi^2 & k_x v - Gk_y u & \theta - (G-1)k_y v & k_y G & 0 & 0 \\ \theta[2\phi^2 - \gamma\frac{E_t}{\rho}] & k_x[\gamma\frac{E_t}{\rho} - \phi^2] - Gu\theta & k_y[\gamma\frac{E_t}{\rho} - \phi^2] - Gv\theta & \gamma\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta \end{pmatrix}$$

ここで

$$\theta = k_x u + k_y v, \quad \phi^2 = \frac{1}{2}G(u^2 + v^2), \quad G = \gamma - 1$$

である.

固有値及び固有ベクトル列の表示を簡単にするために, 次の変数を導入する.

$$\alpha = \frac{\rho}{\sqrt{2}a}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}\rho a}, \quad \tilde{k}_x = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, \quad \tilde{k}_y = \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}$$

$$\tilde{\theta} = \tilde{k}_x u + \tilde{k}_y v \quad (\mathbf{A} : k = \xi, \mathbf{B} : k = \eta)$$

ここで, Jacobian 行列を対角化すると,

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_\xi \hat{\Lambda}_\xi \mathbf{R}_\xi^{-1}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{R}_\eta \hat{\Lambda}_\eta \mathbf{R}_\eta^{-1}$$

となる. ここで, $\hat{\Lambda}_\xi, \hat{\Lambda}_\eta$ は, それぞれ \mathbf{A}, \mathbf{B} の固有値の対角行列である. 次に, $\hat{\Lambda}_\xi, \hat{\Lambda}_\eta, \mathbf{R}_k, \mathbf{R}_k^{-1}$ について具体的に示す.

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_\xi &= D[U, U, U + a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, U - a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, U, U] \\ &= \begin{pmatrix} U & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U + a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U - a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_\eta &= D[V, V, V + a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}, V - a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}, V, V] \\ &= \begin{pmatrix} V & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V + a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V - a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ただし,

$$a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$$

となる．ここで， p は次式となる．

$$p = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1)\left\{E_t - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) - \rho k\right\}$$

右固有ベクトル列： \mathbf{R}_k

$$\mathbf{R}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ u & \tilde{k}_y \rho & \alpha(u + \tilde{k}_x a) & \alpha(u - \tilde{k}_x a) & 0 & 0 \\ v & -\tilde{k}_x \rho & \alpha(v + \tilde{k}_y a) & \alpha(v - \tilde{k}_y a) & 0 & 0 \\ \frac{\phi^2}{G} & \rho(\tilde{k}_y u - \tilde{k}_x v) & \alpha\left(\frac{\phi^2 + a^2}{G} + a\tilde{\theta}\right) & \alpha\left(\frac{\phi^2 + a^2}{G} - a\tilde{\theta}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}$$

左固有ベクトル列： $\mathbf{R}_k^{-1} = \mathbf{L}_k$

$$\mathbf{L}_k = \begin{pmatrix} 1 - \phi^2 a^{-2} & Ga^{-2}u & Ga^{-2}v & -Ga^{-2} & 0 & 0 \\ -\rho^{-1}(\tilde{k}_y u - \tilde{k}_x v) & \tilde{k}_y \rho^{-1} & -\tilde{k}_x \rho^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \beta(\phi^2 - a\tilde{\theta}) & \beta(\tilde{k}_x a - Gu) & \beta(\tilde{k}_y a - Gv) & \beta G & 0 & 0 \\ \beta(\phi^2 + a\tilde{\theta}) & -\beta(\tilde{k}_x a + Gu) & -\beta(\tilde{k}_y a + Gv) & \beta G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho \end{pmatrix}$$

5.3.5 初期条件・境界条件

このモデルの初期条件，壁面境界条件として以下の様に置く⁽¹¹⁵⁾。

$$k_0 = 1.5(0.02v_\infty)^2, \quad \epsilon_0 = k^{1.5}/0.01$$

$$k_w = \epsilon_w = 1.0 \times 10^{-6}$$

ただし，ここでの添字 0 は初期値， w は壁面の値を示す。

第6章 時間積分と計算条件

6.1 時間分割法

時間分割法は，多次元方程式を近似的に1次元の方程式に分割し，それぞれに1次元差分法を適用し，それらの解の重ね合わせとして，元の方程式の解を求める方法である．

保存式

$$U_t + E_x + F_y = 0 \quad (6.1)$$

を次のように， x 方向と y 方向の1次元の方程式に分割する．

$$U_t + E_x = 0 \quad (6.2)$$

$$U_t + F_y = 0 \quad (6.3)$$

ここで，上式のそれぞれに適用する1次元スキームの演算子を， $L_x(\Delta t), L_y(\Delta t)$ とすると，上式第一式の解 U^{n+1} は，次のように表される．

$$U^{n+1} = L_x(\Delta t)U^n \quad (6.4)$$

ここで，次式を定義する．

$$L_y(\Delta t)L_x(\Delta t)U^n \equiv L_y(\Delta t)\{L_x(\Delta t)U^n\} \quad (6.5)$$

各演算子が二次精度であっても，演算子を組み合わせると，一般には精度は一次に落ちる．二次精度を保つには，次のようにすればよい．

$$S_2 = L_x\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)L_y(\Delta t)L_x\left(\frac{1}{2}\Delta t\right) \quad (6.6)$$

時間分割法では，各演算子の安定条件が全体のスキーム S の安定条件となる．流れ解析では，空間格子幅比 $m = \Delta x/\Delta y \gg 1$ の場合がある．これに対しては，

$$S_4 = L_x\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)L_y\left(\frac{\Delta t}{m}\right)\cdots L_y\left(\frac{\Delta t}{m}\right)L_x\left(\frac{1}{2}\Delta t\right) \quad (6.7)$$

として，各座標軸方向に許される最大の時間幅 $\Delta t, \Delta t/m$ をとると効率的である．

格子の縦横比が大きくなると，安定条件が小さい方の格子幅 Δy に支配されるので，大きな Δt をとるのは困難である．

ここで，時間分割マッコーマック法では，格子アスペクト比 $\Delta x/\Delta y \gg 1$ の場合は $m = [\Delta x/\Delta y]$ とし

$$U^{n+1} = \left\{L_y\left(\frac{\Delta t}{2m}\right)\right\}^m \cdot L_x(\Delta t) \cdot \left\{L_y\left(\frac{\Delta t}{2m}\right)\right\}^m U^n \quad (6.8)$$

の形で粘性流れの解を求めることができる(厳密には， L はマッコーマック法における演算子を示す)．本研究では， $m = 1$ として研究を行った．

6.2 Δt の計算

陽解法では、解の安定性を保つために、場の影響領域が1メッシュ以上広がらないように時間刻み幅 Δt は制限を受ける。具体的には Δt は次式によって決定される。

$$\Delta t = \frac{1}{2} \cdot \text{CFL} \cdot \min\left(\frac{\Delta x_{i+1/2}}{|u_{i+1/2} - a_{i+1/2}|}, \frac{\Delta x_{i+1/2}}{|u_{i+1/2} + a_{i+1/2}|}\right) \quad (6.9)$$

ただし、式中の $1/2$ は安全のために付け足したもので、実際は、

$$\Delta t = \text{CFL} \cdot \min\left(\frac{\Delta x_{i+1/2}}{|u_{i+1/2} - a_{i+1/2}|}, \frac{\Delta x_{i+1/2}}{|u_{i+1/2} + a_{i+1/2}|}\right) \quad (6.10)$$

となる。本計算では Courant number(CFL) を 0.99 とし、Eq(6.9) を用いている。

6.3 境界条件

入口境界条件

入口は、保存量ベクトル U をすべて初期値で固定する。

$$U_{\text{inlet}} = U_{\text{initial}} \quad (6.11)$$

出口境界条件

・超音速ノズルの場合は、保存量ベクトル U を1次線形外挿する。

$$U_{\text{outlet}} = U_{\text{outlet}-1} \quad (6.12)$$

・バンプモデルの場合は、衝撃波の位置が実験と合うように圧力を固定してリーマン境界条件を適用した。

ノズル壁面およびキャビティ壁面境界条件

速度に対して Non-Slip 条件、圧力に対しては壁面での格子幅が十分狭いので、 $dp/d\eta = 0$ とする等圧条件、温度に対しては $dT/d\eta = 0$ の断熱を用いた。

多孔壁孔境界条件

速度に対して Slip 条件、圧力に対しては壁面での格子幅が十分狭いので、 $dp/d\eta = 0$ とする等圧条件、温度に対しては $dT/d\eta = 0$ の断熱を用いた。また、保存量・圧力に関してノズル部とキャビティ部の値で平均化を行った。

残差

収束の基準は、反復計算において物理量の変動 $\Delta U^n = U^n - U^{n-1}$ が零となることである。本計算においては、物理量の変動

$$\Delta U^n = (\Delta \rho^n, \Delta(\rho u)^n, \Delta(\rho v)^n, \Delta E_t^n)$$

をすべての格子点の2乗平均した値を用いて、以下の式で残差を定義した。なお、 I_{\max}, J_{\max} は ξ, η 方向の格子点数を示す。

$$\text{Residual} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{J_{\max}} \sum_{i=1}^{I_{\max}} [\{\Delta\rho^n + \Delta(\rho u)^n + \Delta(\rho v)^n + \Delta E_t^n\}/4]^2}{I_{\max} \cdot J_{\max}}}$$

物体近傍に関する注意：層流境界層⁽¹⁰⁰⁾

流体の数値シミュレーションを他のシミュレーションに比して格段に難しくしている理由のひとつは、硬直性 (stiffness) である。その典型は境界層の存在で、物体の近傍で例えば物体に沿う方向の速度などが急激に変化する。境界層を十分に分解しないと剥離などの流れ場を支配する重要な現象を正しく捉えることができず、その結果シミュレーションは一見それらしいように見えることはあっても信頼性に欠けるものとなる。したがって、物体付近には境界層を分解するのに足る格子数を物体から離れる方向に分布させることが必要になる。通常、層流境界層では平板上に発達する境界層厚さ、

$$\frac{\delta}{L} = \frac{5.0}{\sqrt{Re}} \quad (6.13)$$

を考え、その 1/50 以下に最小格子幅を設定する。

$$\Delta y_{\min} \leq \frac{\delta_{\min}}{L} = \frac{0.1}{\sqrt{Re}} \quad (6.14)$$

物体近傍に関する注意：乱流境界層

乱流境界層で滑りなしの境界条件を与えるためには、いわゆる粘性低層のなかに数点が分布されていることが必要。目安として、

$$Re \approx 10^6 \quad \Rightarrow \quad \Delta y_{\min} = 10^{-5} \quad (6.15)$$

ちなみに、オイラー方程式の場合には、次式のオーダーとなる。

$$\Delta y_{\min} = 10^{-3} \sim 10^{-4} \quad (6.16)$$

6.4 物性値 (定数)

本論文において使用した凝縮に関する計算式は、次に示す3パターンを用いて行なった。

1. キャビティ付多孔壁を有するラバルノズル流れ (第7章), 及び非平衡凝縮が遷音速流れ場に及ぼす影響の場合 (第9.1節)
 - ・従来の係数を用いた式を採用.
2. スロティッドノズル有するラバルノズル流れの場合 (第8章)
 - ・係数を用いた式では実験結果と計算結果が一致しなかったため, 一部の式について Schnerr らが使用した式⁽²⁶⁾⁽²⁵⁾⁽⁹⁶⁾を採用.
3. キャビティ付多孔壁を有する遷音速バンプ流れの場合 (第9.2節)
 - ・この計算では完全に Schnerr らが使用した式を採用.

よって本節では、本計算に用いた乾き空気と水蒸気の物性値について使用した値を、各ケースごとに分けて記述する (Table 6.2, Table 6.3)⁽⁸⁹⁾.

Table 6.1 Physical properties
(The value same at all cases)

Identification	Symbol	Unit	Vapour	Air
Molecular weight	M	kg/kmol	18.0152	28.95
Avogadro's number	N_A	1/mol	6.022045×10^{23}	
General gas constants	\mathcal{R}_{uni}	J/(kmol · K)	8314.41	
Boltzmann constant	k	J/K	1.380622×10^{-23}	

Table 6.2 Physical properties
(The value changes with each cases)

(a) Laval nozzle flow using the porous wall with a cavity
(Initial temperature $T_{01} = 303$ K , Initial pressure $p_{01} = 101.3$ kPa)

Identification	Symbol	Unit	Vapour	Air
Laminer Plandtl number	Pr_l	—	1.0032	0.7173
Turbulence Plandtl number	Pr_t	—	0.9	
Specific heat at constant pressure	c_p	J/(kg · K)	1.875×10^3	1.00722×10^3
Dynamic viscosity	μ	Pa · s	10.007×10^{-6}	18.781×10^{-6}

(b) Laval nozzle flow using the slotted nozzle
(Initial temperature $T_{01} = 303$ K , Initial pressure $p_{01} = 101.3$ kPa)

Identification	Symbol	Unit	Vapour	Air
Laminer Plandtl number	Pr_l	—	1.0032	0.7173
Turbulence Plandtl number	Pr_t	—	0.9	
Specific heat at constant pressure	c_p	J/(kg · K)	1.875×10^3	1.00722×10^3
Dynamic viscosity	μ	Pa · s	10.007×10^{-6}	18.781×10^{-6}

(c) Effect of nonequilibrium condensation on transonic bump flow
(Initial temperature $T_{01} = 298$ K , Initial pressure $p_{01} = 102$ kPa)

Identification	Symbol	Unit	Vapour	Air
Laminer Plandtl number	Pr_l	—	1.0068	0.7173
Turbulence Plandtl number	Pr_t	—	0.9	
Specific heat at constant pressure	c_p	J/(kg · K)	1.8704×10^3	1.0070355×10^3
Dynamic viscosity	μ	Pa · s	9.864×10^{-6}	$18.5165618 \times 10^{-6}$

(d) Transonic bump flow using the porous wall with a cavity
(Initial temperature $T_{01} = 298$ K , Initial pressure $p_{01} = 102$ kPa)

Identification	Symbol	Unit	Vapour	Air
Laminer Plandtl number	Pr_l	—	1.0068	0.7173
Turbulence Plandtl number	Pr_t	—	0.9	
Specific heat at constant pressure	c_p	J/(kg · K)	1.8704×10^3	1.0070355×10^3
Dynamic viscosity	μ	Pa · s	9.864×10^{-6}	$18.5165618 \times 10^{-6}$

次に、凝縮に関する各係数の内、次の三係数に関しては定数として設定したものと Schnerr らが使用した式を適用したものがあるため、各ケースについて用いた値を次に示す。これらの三係数の決定については、流れ場を計算により再現し、計算結果と実験結果が比較的良好に一致する値を採用した。また、残った凝縮に関するパラメータの1つである相対湿度（過飽和度）は一定とせず変数として取り扱った。

Table 6.3 Condensate properties

(a) Laval nozzle flow using the porous wall with a cavity

Identification	Symbol	
Coefficient of surface tension	ζ	1.22
Accommodation coefficient for nucleation	Γ	10^6
Coefficient of condensation	ξ_c	0.1

(b) Laval nozzle flow using the slotted nozzle

Identification	Symbol	
Coefficient of surface tension	ζ	0.92
Accommodation coefficient for nucleation	Γ	1.0
Coefficient of condensation	ξ_c	0.1

(c) Effect of nonequilibrium condensation on transonic bump flow

Identification	Symbol	
Coefficient of surface tension	ζ	1.29
Accommodation coefficient for nucleation	Γ	10^6
Coefficient of condensation	ξ_c	0.9

(d) Transonic bump flow using the porous wall with a cavity

Identification	Symbol	
Coefficient of surface tension	ζ	1.0
Accommodation coefficient for nucleation	Γ	1.0
Coefficient of condensation	ξ_c	1.0

6.5 物性値関係式

本計算で使用した各物性値を求める際に使用した式を各ケースごとに分けて列記する．第 6.5.2 節と第 6.5.3 節については，従来の式（つまり，第 6.5.1 節）と異なる式を使用しているものについては，項目頭に「◇」を付記して区別した．なお，以下の式は，すべて有次元の式であることに注意すること．

6.5.1 キャビティ付多孔壁を有するラバルノズル流れ，及び非平衡凝縮が遷音速流れ場に及ぼす影響の場合

ガス定数: \mathfrak{R} (J/(Kg · K))

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{R}_{uni}}{M} \quad (6.17)$$

水蒸気の圧力: p_v (Pa)

$$\begin{aligned} p_v &= m_v \frac{\mathfrak{R}_{uni}}{M_v} \frac{T}{V} \\ &= \frac{m_v}{m} \frac{\mathfrak{R}_{uni}}{M_v} \frac{m}{V} T \\ &= \left(\frac{m_v + m_l}{m} - \frac{m_l}{m} \right) \frac{\mathfrak{R}_{uni}}{M_v} \rho_m T \\ &= \frac{\omega_0 - g}{M_v} \mathfrak{R}_{uni} \rho_m T \end{aligned}$$

ここで Eq(2.22) より，

$$\mathfrak{R}_{uni} \rho_m T = p / \left(\frac{1 - \omega_0}{M_a} + \frac{\omega_0 - g}{M_v} \right)$$

よって，

$$p_v = \left\{ \left(\frac{\omega_0 - g}{M_v} \right) / \left(\frac{1 - \omega_0}{M_a} + \frac{\omega_0 - g}{M_v} \right) \right\} p \quad (6.18)$$

水蒸気の飽和蒸気圧力: $p_{s, \infty}$ (Pa)

$$p_{s, \infty} = 10^{(-A/T+B)} \times 101325 \quad (6.19)$$

ここで，“101325”は，atm 単位から Pa 単位への換算用係数． A および B は，定数であり，それぞれ温度によって異なる．

$$\begin{cases} A = 2263, B = 6.064 & (T = 273 \sim 395K) \\ A = 2672, B = 7.582 & (T = 175 \sim 273K) \end{cases}$$

相対湿度: ϕ (%)，過飽和度: S

$$\phi = \frac{p_v}{p_{s, \infty}} \times 100 = S \times 100 \quad (6.20)$$

$$S_0 = \frac{p_{v01}}{p_{s01}} \quad (\text{初期過飽和度}) \quad (6.21)$$

絶対湿度: X

$$\begin{aligned} X &= \frac{m_v}{m_a} = \frac{m_v \frac{\mathfrak{R}_{uni} T}{V}}{m_a \frac{\mathfrak{R}_{uni} T}{V}} = \frac{M_v p_v}{M_a p_a} \\ &= \frac{M_v}{M_a} \frac{p_v}{(p_{01} - p_v)} = \frac{M_v}{M_a} \frac{S p_{s, \infty}}{p_{01} - S p_{s, \infty}} \quad \because S = \frac{p_v}{p_{s, \infty}} (= \frac{\phi}{100}) \\ X_{01} &= \frac{M_v}{M_a} \frac{S_{01} \cdot p_{s01}}{p_{01} - S_{01} \cdot p_{s01}} \quad (\text{初期絶対湿度}) \end{aligned} \quad (6.22)$$

比湿: ω

$$\omega = \frac{X}{X + 1} = \frac{m_v/m_a}{m_v/m_a + 1} = \frac{m_v}{m_v + m_a} \quad (6.23)$$

$$\omega_{01} = \frac{X_{01}}{X_{01} + 1} \quad (\text{初期比湿}) \quad (6.24)$$

混合気体の分子量: M_m

$$M_m = 1 / \left(\frac{1 - \omega_{01}}{1 - g} \frac{1}{M_a} + \frac{\omega_{01} - g}{1 - g} \frac{1}{M_v} \right) \quad (6.25)$$

凍結音速: a_f ⁽⁷⁹⁾

$$a_f = \left(\frac{c_{p01}}{c_{p01} - (1 - g) \frac{\mathfrak{R}_{uni}}{M_m}} \frac{p}{\rho_m} \right)^{1/2} \quad (6.26)$$

凝縮相 (液滴) の密度 ρ_l (kg/m³)

$$\rho_l = 1000 (\text{kg/m}^3) \quad (6.27)$$

湿り空気の無限平面における表面張力: σ_∞ (N/m)

$$\sigma_\infty = (128 - 0.192T) \times 10^{-3} \quad (6.28)$$

湿り空気の表面張力: σ

本研究では実験と適度に合わせるため表面張力係数 ζ を用いて,

$$\sigma = \zeta \sigma_\infty \quad (6.29)$$

臨界クラスター半径: r_c

$$r_c = \frac{2\sigma}{\rho_l \mathfrak{R}_v T \ln(p_v/p_{s, \infty})} \quad (6.30)$$

核生成速度: I

Frenkel の式より

$$I_F = \frac{1}{\rho_l} \sqrt{\frac{2m_v \sigma}{\pi}} \left(\frac{p_v}{kT} \right)^2 \exp \left\{ \frac{-4\pi r_c^2 \sigma}{3kT} \right\} \quad (6.31)$$

となり，この場合も，実験と適度に合わせるため核生成係数 Γ を用いて，

$$I = \Gamma \cdot I_F \quad (6.32)$$

クラスター成長速度: $\frac{dr}{dt}$

$$\frac{dr}{dt} = \xi_c \frac{p_{s,\infty} \left(\frac{p_v}{p_{s,\infty}} - 1 \right)}{\rho_l \sqrt{2\pi \mathfrak{R}_v T}} \quad (6.33)$$

本研究では，凝縮係数 ξ_c を，温度依存性のない定数とする．

湿り空気の潜熱: L (J/kg)

$$L = 2.353 \times 10^6 - 5.72 \times 10^4 (\ln p - 10) - 4.60 \times 10^3 (\ln p - 10)^2 \quad (6.34)$$

粘性係数: μ (Ps · s)

サザーランドの公式 (Sutherland's Law)⁽⁹⁵⁾ を使用する．

$$\frac{\mu}{\mu_c} = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_c + S}{T + S} \quad (6.35)$$

この式は，流れ場のある基準点の局所物理量 (温度と粘性係数) T_c, μ_c と任意点の局所物理量 (温度と粘性係数) T, μ の関係式であり，120K から 1500K の範囲でよい近似を与えられる．ここで S はサザーランド定数である．本計算では基準点をよどみ点として扱い， $T_c = T_{01}, \mu_c = \mu_{01}$ となり，サザーランド定数 S を 110.6K とした．

$$\frac{\mu}{\mu_{01}} = \left(\frac{T}{T_{01}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_{01} + 110.6}{T + 110.6} \quad (6.36)$$

これを無次元の値で使用しやすい形に変形する．

$$\frac{\mu}{\mu_{01}} = \left(\frac{T}{T_{01}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1 + 110.6/T_{01}}{T/T_{01} + 110.6/T_{01}} \quad (6.37)$$

6.5.2 スロテッドノズルを有するラバルノズル流れの場合

ガス定数: \mathfrak{R} (J/(Kg · K))

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{R}_{uni}}{M} \quad (6.38)$$

水蒸気の圧力: p_v (Pa)

$$\begin{aligned} p_v &= m_v \frac{\mathfrak{R}_{uni} T}{M_v V} \\ &= \frac{m_v}{m} \frac{\mathfrak{R}_{uni} m}{M_v V} T \\ &= \left(\frac{m_v + m_l}{m} - \frac{m_l}{m} \right) \frac{\mathfrak{R}_{uni}}{M_v} \rho_m T \\ &= \frac{\omega_{01} - g}{M_v} \mathfrak{R}_{uni} \rho_m T \end{aligned}$$

ここで Eq(2.22) より ,

$$\mathfrak{R}_{uni} \rho_m T = p / \left(\frac{1 - \omega_{01}}{M_a} + \frac{\omega_{01} - g}{M_v} \right)$$

よって ,

$$p_v = \left\{ \left(\frac{\omega_{01} - g}{M_v} \right) / \left(\frac{1 - \omega_{01}}{M_a} + \frac{\omega_{01} - g}{M_v} \right) \right\} p \quad (6.39)$$

相対湿度: ϕ (%) , 過飽和度: S

$$\phi = \frac{p_v}{p_{s, \infty}} \times 100 = S \times 100 \quad (6.40)$$

$$S_{01} = \frac{p_{v01}}{p_{s01}} \quad (\text{初期過飽和度}) \quad (6.41)$$

絶対湿度: X

$$\begin{aligned} X &= \frac{m_v}{m_a} = \frac{m_v \frac{\mathfrak{R}_{uni} T}{V}}{m_a \frac{\mathfrak{R}_{uni} T}{V}} = \frac{M_v p_v}{M_a p_a} \\ &= \frac{M_v}{M_a} \frac{p_v}{(p_{01} - p_v)} = \frac{M_v}{M_a} \frac{S p_{s, \infty}}{p_{01} - S p_{s, \infty}} \quad \because S = \frac{p_v}{p_{s, \infty}} (= \frac{\phi}{100}) \end{aligned}$$

$$X_{01} = \frac{M_v}{M_a} \frac{S_{01} \cdot p_{s01}}{p_{01} - S_{01} \cdot p_{s01}} \quad (\text{初期絶対湿度}) \quad (6.42)$$

比湿: ω

$$\omega = \frac{X}{X + 1} = \frac{m_v/m_a}{m_v/m_a + 1} = \frac{m_v}{m_v + m_a} \quad (6.43)$$

$$\omega_{01} = \frac{X_{01}}{X_{01} + 1} \quad (\text{初期比湿}) \quad (6.44)$$

混合気体の分子量: M_m

$$M_m = 1 / \left(\frac{1 - \omega_{01}}{1 - g} \frac{1}{M_a} + \frac{\omega_{01} - g}{1 - g} \frac{1}{M_v} \right) \quad (6.45)$$

凍結音速: $a_f^{(79)}$

$$a_f = \left(\frac{c_{p01}}{c_{p01} - (1 - g) \frac{\mathfrak{R}_{uni}}{M_m} \rho_m} \frac{p}{\rho_m} \right)^{1/2} \quad (6.46)$$

◇ 凝縮相 (液滴) 密度: $\rho_l(T)$ (kg/m³)⁽⁹⁶⁾

$$\rho_l(T) = \begin{cases} (A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + A_4 t^4 + A_5 t^5) / (1 + B_0 t) & (T \geq 0[^\circ\text{C}]) \\ (A_6 + A_7 t + A_8 t^2) & (T < 0[^\circ\text{C}]) \end{cases} \quad (6.47)$$

ここで, t はセ氏温度であることに注意. また係数は各々,

$$\begin{aligned} A_0 &= 999.8396 & A_5 &= -393.2952 \times 10^{-12} \\ A_1 &= 18.224944 & A_6 &= 999.84 \\ A_2 &= -7.92221 \times 10^{-3} & A_7 &= 0.086 \\ A_3 &= -55.44846 \times 10^{-6} & A_8 &= -0.0108 \\ A_4 &= 149.7562 \times 10^{-9} & B_0 &= 18.159725 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

である.

◇ 水蒸気の飽和蒸気圧力: $p_{s,\infty}(T)$ ⁽⁹⁶⁾

$$p_{s,\infty}(T) = \exp(A_9 + A_{10}T + A_{11}T^2 + B_1 \ln(T) + \frac{C_0}{T}) \quad (6.48)$$

ここで各係数は,

$$\begin{aligned} A_9 &= 21.215 \\ A_{10} &= -2.7246 \times 10^{-2} \\ A_{11} &= 1.6853 \times 10^{-5} \\ B_1 &= 2.4576 \\ C_0 &= -6094.4642 \end{aligned}$$

である.

◇ 湿り空気の無限平面における表面張力: σ_∞ (N/m)⁽⁹⁶⁾

$$\sigma_\infty(T) = \begin{cases} \{76.1 + 0.155 \times (273.15 - T)\} \times 10^{-3} & (T \geq 249.39[K]) \\ \{(1.1313 - 3.7091 \times 10^{-3} \times T) \times 10^{-4} - 5.6464\} \times 10^{-6} & (T < 249.39[K]) \end{cases} \quad (6.49)$$

臨界クラスター半径: r_c

$$r_c = \frac{2\sigma_\infty}{\rho_l \mathfrak{R}_v T \ln(p_v/p_{s,\infty})} \quad (6.50)$$

核生成速度: I

Frenkel の式より

$$I_F = \frac{1}{\rho_l} \sqrt{\frac{2m_v \sigma}{\pi}} \left(\frac{p_v}{kT} \right)^2 \exp \left\{ \frac{-4\pi r_c^2 \sigma}{3kT} \right\} \quad (6.51)$$

となり、この場合も、実験と適度に合わせるため核生成係数 Γ を用いて、

$$I = \Gamma \cdot I_F \quad (6.52)$$

クラスター成長速度: $\frac{dr}{dt}$

$$\frac{dr}{dt} = \xi_c \frac{p_{s,\infty} \left(\frac{p_v}{p_{s,\infty}} - 1 \right)}{\rho_l \sqrt{2\pi \mathcal{R}_v T}} \quad (6.53)$$

本研究では、凝縮係数 ξ_c を、温度依存性のない定数とする。

◇ 湿り空気の潜熱: $L(\text{J/kg})$ ⁽⁹⁶⁾

$$L(T) = L_0 + L_1 T \quad (6.54)$$

ここで諸係数は各々、

$$\begin{aligned} L_0 &= 3105913.39 \\ L_1 &= -2212.97 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

である。

$$L = \frac{\bar{L}}{a_{01}^2} = \frac{\bar{L}}{\gamma \mathcal{R}_m T_{01}} \quad (\text{無次元化}) \quad (6.55)$$

粘性係数: $\mu(\text{Ps} \cdot \text{s})$

サザーランドの公式 (Sutherland's Law)⁽⁹⁵⁾ を使用する。

$$\frac{\mu}{\mu_c} = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_c + S}{T + S} \quad (6.56)$$

この式は、流れ場のある基準点の局所物理量 (温度と粘性係数) T_c, μ_c と任意点の局所物理量 (温度と粘性係数) T, μ の関係式であり、120K から 1500K の範囲でよい近似を与えられる。ここで S はサザーランド定数である。本計算では基準点をよどみ点として扱い、 $T_c = T_{01}, \mu_c = \mu_{01}$ となり、サザーランド定数 S を 110.6K とした。

$$\frac{\mu}{\mu_{01}} = \left(\frac{T}{T_{01}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_{01} + 110.6}{T + 110.6} \quad (6.57)$$

これを無次元の値で使用しやすい形に変形する。

$$\frac{\mu}{\mu_{01}} = \left(\frac{T}{T_{01}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1 + 110.6/T_{01}}{T/T_{01} + 110.6/T_{01}} \quad (6.58)$$

6.5.3 キャビティ付多孔壁を有する遷音速バンブ流れの場合

ガス定数: \mathfrak{R} (J/(Kg · K))

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{R}_{uni}}{M} \quad (6.59)$$

水蒸気の圧力: p_v (Pa)

$$\begin{aligned} p_v &= m_v \frac{\mathfrak{R}_{uni} T}{M_v V} \\ &= \frac{m_v}{m} \frac{\mathfrak{R}_{uni}}{M_v} \frac{m}{V} T \\ &= \left(\frac{m_v + m_l}{m} - \frac{m_l}{m} \right) \frac{\mathfrak{R}_{uni}}{M_v} \rho_m T \\ &= \frac{\omega_{01} - g}{M_v} \mathfrak{R}_{uni} \rho_m T \end{aligned}$$

ここで Eq(2.22) より,

$$\mathfrak{R}_{uni} \rho_m T = p / \left(\frac{1 - \omega_{01}}{M_a} + \frac{\omega_{01} - g}{M_v} \right)$$

よって,

$$p_v = \left\{ \left(\frac{\omega_{01} - g}{M_v} \right) / \left(\frac{1 - \omega_{01}}{M_a} + \frac{\omega_{01} - g}{M_v} \right) \right\} p \quad (6.60)$$

相対湿度: ϕ (%), 過飽和度: S

$$\phi = \frac{p_v}{p_{s, \infty}} \times 100 = S \times 100 \quad (6.61)$$

$$S_{01} = \frac{p_{v01}}{p_{s01}} \quad (\text{初期過飽和度}) \quad (6.62)$$

絶対湿度: X

$$\begin{aligned} X &= \frac{m_v}{m_a} = \frac{m_v \frac{\mathfrak{R}_{uni} T}{V}}{m_a \frac{\mathfrak{R}_{uni} T}{V}} = \frac{M_v p_v}{M_a p_a} \\ &= \frac{M_v}{M_a} \frac{p_v}{(p_{01} - p_v)} = \frac{M_v}{M_a} \frac{S p_{s, \infty}}{p_{01} - S p_{s, \infty}} \quad \because S = \frac{p_v}{p_{s, \infty}} (= \frac{\phi}{100}) \end{aligned}$$

$$X_{01} = \frac{M_v}{M_a} \frac{S_{01} \cdot p_{s01}}{p_{01} - S_{01} \cdot p_{s01}} \quad (\text{初期絶対湿度}) \quad (6.63)$$

比湿: ω

$$\omega = \frac{X}{X + 1} = \frac{m_v/m_a}{m_v/m_a + 1} = \frac{m_v}{m_v + m_a} \quad (6.64)$$

$$\omega_{01} = \frac{X_{01}}{X_{01} + 1} \quad (\text{初期比湿}) \quad (6.65)$$

混合気体の分子量: M_m

$$M_m = 1 / \left(\frac{1 - \omega_{01}}{1 - g} \frac{1}{M_a} + \frac{\omega_{01} - g}{1 - g} \frac{1}{M_v} \right) \quad (6.66)$$

凍結音速: a_f ⁽⁷⁹⁾

$$a_f = \left(\frac{c_{p01}}{c_{p01} - (1 - g) \frac{R_{uni}}{M_m}} \frac{p}{\rho_m} \right)^{1/2} \quad (6.67)$$

◇ 凝縮相 (液滴) 密度: $\rho_l(T)$ (kg/m³)⁽⁹⁶⁾

$$\rho_l(T) = \begin{cases} (A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + A_4 t^4 + A_5 t^5) / (1 + B_0 t) & (T \geq 0[^\circ\text{C}]) \\ (A_6 + A_7 t + A_8 t^2) & (T < 0[^\circ\text{C}]) \end{cases} \quad (6.68)$$

ここで, t はセ氏温度であることに注意. また係数は各々,

$$\begin{aligned} A_0 &= 999.8396 & A_5 &= -393.2952 \times 10^{-12} \\ A_1 &= 18.224944 & A_6 &= 999.84 \\ A_2 &= -7.92221 \times 10^{-3} & A_7 &= 0.086 \\ A_3 &= -55.44846 \times 10^{-6} & A_8 &= -0.0108 \\ A_4 &= 149.7562 \times 10^{-9} & B_0 &= 18.159725 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

である.

◇ 水蒸気の飽和蒸気圧力: $p_{s, \infty}(T)$ ⁽⁹⁶⁾

$$p_{s, \infty}(T) = \exp(A_9 + A_{10}T + A_{11}T^2 + B_1 \ln(T) + \frac{C_0}{T}) \quad (6.69)$$

ここで各係数は,

$$\begin{aligned} A_9 &= 21.215 \\ A_{10} &= -2.7246 \times 10^{-2} \\ A_{11} &= 1.6853 \times 10^{-5} \\ B_1 &= 2.4576 \\ C_0 &= -6094.4642 \end{aligned}$$

である.

◇ 湿り空気の無限平面における表面張力: $\sigma_\infty(\text{N/m})$ ⁽⁹⁶⁾

$$\sigma_\infty(T) = \begin{cases} \{76.1 + 0.155 \times (273.15 - T)\} \times 10^{-3} & (T \geq 249.39[\text{K}]) \\ \{(1.1313 - 3.7091 \times 10^{-3} \times T) \times 10^{-4} - 5.6464\} \times 10^{-6} & (T < 249.39[\text{K}]) \end{cases} \quad (6.70)$$

◇ 臨界クラスター半径: r_c

$$r_c = \frac{2\sigma_\infty}{\rho_l \mathfrak{R}_v T \ln(p_v/p_{s,\infty})} \quad (6.71)$$

◇ 核生成速度: I

Frenkel の式より

$$I_F = \frac{1}{\rho_l} \sqrt{\frac{2m_v \sigma_\infty}{\pi}} \left(\frac{p_v}{kT}\right)^2 \exp\left\{\frac{-4\pi r_c^2 \sigma_\infty}{3kT}\right\} \quad (6.72)$$

となる .

◇ 液滴半径 r の水蒸気の飽和蒸気圧: $p_{s,r}(\text{Pa})$ ⁽⁹⁶⁾

$$p_{s,r} = p_{s,\infty} \exp\left(\frac{2\sigma_\infty}{\rho_l \mathfrak{R}_v T \bar{r}}\right) \quad (6.73)$$

\bar{r} : 液滴の平均半径

◇ クラスター成長速度: $\frac{d\bar{r}}{dt}$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{p_v - p_{s,r}}{\rho_l \sqrt{2\pi} \mathfrak{R}_v T} \quad (6.74)$$

◇ 湿り空気の潜熱: $L(\text{J/kg})$ ⁽⁹⁶⁾

$$L(T) = L_0 + L_1 T \quad (6.75)$$

ここで諸係数は各々 ,

$$L_0 = 3105913.39$$

$$L_1 = -2212.97 \times 10^{-2}$$

である .

$$L = \frac{\bar{L}}{a_{01}^2} = \frac{\bar{L}}{\gamma \mathfrak{R}_m T_{01}} \quad (\text{無次元化}) \quad (6.76)$$

粘性係数: $\mu(\text{Ps} \cdot \text{s})$

サザーランドの公式 (Sutherland's Law)⁽⁹⁵⁾ を使用する .

$$\frac{\mu}{\mu_c} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_c + S}{T + S} \quad (6.77)$$

この式は , 流れ場のある基準点の局所物理量 (温度と粘性係数) T_c, μ_c と任意点の局所物理量 (温度と粘性係数) T, μ の関係式であり , 120K から 1500K の範囲でよい近似を与えと言われる . ここで

S はサザーランド定数である．本計算では基準点をよどみ点として扱い， $T_c = T_{01}$ ， $\mu_c = \mu_{01}$ となり，サザーランド定数 S を 110.6K とした．

$$\frac{\mu}{\mu_{01}} = \left(\frac{T}{T_{01}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_{01} + 110.6}{T + 110.6} \quad (6.78)$$

これを無次元の値で使用しやすい形に変形する．

$$\frac{\mu}{\mu_{01}} = \left(\frac{T}{T_{01}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1 + 110.6/T_{01}}{T/T_{01} + 110.6/T_{01}} \quad (6.79)$$

6.6 フローチャートの説明

本計算では、凝縮を伴う流れを差分法を用いて解く際に、計算開始初期段階の解の安定化のために、次の3段階で計算を行った。

- 1st STEP : 一次元等エントロピー流れに対する解を全格子点に与え、二次元粘性流れを計算する。
- 2nd STEP : 1st STEP で得た2次元粘性流れの結果を初期値として、キャビティ付きの二次元粘性流れを計算する。
- 3rd STEP : 2nd STEP で得たキャビティ付き二次元粘性流れの結果を初期値として、凝縮を伴うキャビティ付きの二次元粘性流れを計算する。

空間精度の確保、時間進行の位相の一致を得るために、流れ場の計算と凝縮の計算は同じ計算ルーティン内で行い、支配方程式の対流項の計算においては、Roeの近似Riemann解法を応用したYeeによる三次精度MUSCL型のTVDスキームを適用して求める。また、粘性項には、二次精度中心差分で評価する。

(MUSCL型TVD有限差分スキームの中で、Roeの近似Riemann解法を利用したYeeによる空間三次精度の風上型TVDスキーム)

Fig.6.1は、計算のフローチャートを示す。プログラムを実行させるとまず始めに計算格子を読み込む。その後、初期条件を決める。計算中不変の定数を決定し、次に各格子点の保存量を決める。計算が1st STEPの場合、スロートとの面積比より等エントロピー則で1次元的に保存量を決める。2nd STEPや3rd STEPの場合、または、継続計算を行う場合、前STEPの計算結果や継続させたい計算結果の保存量を使用する。ただし、2nd STEPの場合、キャビティ内の保存量は多孔壁部の平均圧力及び平均密度を使用し速度0として算出した保存量を全キャビティ内格子点に均一に与える。初期条件が決定したら、計算格子の勾配(x_ξ, y_η, J)等を計算する。これら初期条件および定数が決まったらメインループに入る。まず、基本的なキャビティがない場合の計算について述べる。

- 1) 時間ステップ δt の決定。
- 2) $\Delta t/2$ ほど進めた η 方向の計算。
 - (a) $(\eta + 1/2)$ に対する渦粘性係数(乱流粘性係数)の計算。
 - (b) $(\eta + 1/2)$ に対する粘性項の計算。
 - (c) $\frac{\Delta t}{2}$ ほど進めた η 方向に対する保存量の計算。
- 3) Δt ほど進めた ξ 方向の計算。
 - (a) $(\xi + 1/2)$ に対する渦粘性係数(乱流粘性係数)の計算。
 - (b) $(\xi + 1/2)$ に対する粘性項の計算。
 - (c) Δt ほど進めた ξ 方向に対する保存量の計算。
- 4) 2)と同様に、 $\Delta t/2$ ほど進めた η 方向の計算。
- 5) ここまでの計算で Δt 進めた保存量が求まる。残差、データ出力。
- 6) ループ回数 n が最大ループ回数 n_{max} に達していない場合、1)にフィードバック。

2), 3), 4)の終わりで境界条件を与える。また、プログラム上ではないが、出力された残差(Residual)データより、残差が微小値(EPS)よりも小さくかつ残差がほぼ一定となった場合、計算収束と考え計算を止める。本研究では、残差が約 10^{-6} のオーダーで落ち着くことからEPSを約 10^{-5} と考えた。

次にキャビティがある場合の計算は、上記のメインループにおける2), 3), 4)をそれぞれノズル部、キャビティ部に対して行う。つまり、始めにノズル部の2)を計算しキャビティ部の2)を計算する。次にノズル部の3)を計算しキャビティ部の3)を計算する。最後にノズル部の4)を計算しキャビティ部の4)を計算する。このように交互に行っていく。

第7章 キャビティ付多孔壁を有するラバルノズル 流れに及ぼす非平衡凝縮の影響

7.1 定常凝縮衝撃波のパッシブコントロール

7.1.1 実験装置と計算条件

本実験で使用した超音速風洞の概要を Fig.7.1 に示す．使用した風洞は，大気圧状態の湿り空気を真空タンクに吸い込む形式の超音速風洞であり，貯気槽，測定部，後部集合洞，真空タンクから構成されている．なお，本論文で使用した超音速風洞はすべてこれと同じである．

Fig.7.2 は，計算の対象としている超音速ハーフノズルの計算場を示す．このノズルは，全長 600 mm，曲率半径 $R = 155$ mm，スロート高さ（代表長さ） $h^* = 48$ mm，入口・出口高さ 60 mm の形状である．また，ノズル曲面壁上のキャビティ部には，2次元スリット壁を設けており，本研究ではこれを多孔壁と呼ぶ．キャビティ部は，長さ L ，深さ D の二次元形状であり，空隙率（多孔部の総面積と多孔板領域面積の比） P の多孔壁（孔の幅： w ）が取り付けられている．なお， L が一定の場合，孔の個数が増加すると， P が一定のため w は減少する．

本計算で使用した P と D は，0.18 と 5 mm の一定であり， L には 20 mm と 30 mm の 2 種類を使用した．また，多孔壁の孔の個数 n は， L が 20 mm の場合には 3, 6, および 9 個を， L が 30 mm の場合には 5, 9, 13, および 17 個とした．初期過飽和度 S_{01} よどもみ点状態での水蒸気分圧とその温度における飽和圧力の比) は，0.64 の一定とした．なお，よどもみ点圧力 p_{01} と温度 T_{01} は，それぞれ 101.3 kPa と 303 K の一定とした．本計算で使用した格子数は，ノズル部で $291 \times 41 \sim 711 \times 41$ ，キャビティ部で $133 \times 16 \sim 561 \times 16$ である．また，多孔壁の孔の部分での保存量と圧力には，ノズル側とキャビティ側の孔の位置での平均値を用いた．

7.1.2 実験結果との比較

Fig.7.3 は，初期過飽和度 $S_{01} = 0.64$ ，よどもみ点温度 $T_{01} = 303$ K の場合の実験より得られたシュリーレン写真⁽⁵⁰⁾ であり，Fig.7.3(a) と (b) はそれぞれ，固体壁の場合とキャビティ付多孔壁の場合 ($L = 20$ mm, $P = 0.18$, 孔の直径 2 mm が等間隔で分布されている) を示す．図より，キャビティ付多孔壁の場合には，衝撃波は λ 型に分枝するとともに弱くなり，適切なパッシブコントロールが行われているのがわかる．本研究では，このような流れ場を数値計算により再現することで，キャビティ付多孔壁が凝縮衝撃波の定在する流れ場に及ぼす影響を定量的に調べた．

Fig.7.4 は，実験と同じ初期過飽和度に対する静圧分布の計算結果と実験結果⁽⁵⁰⁾ の比較を示す．但し，計算より得られる流れ場の様相を実験とほぼ一致させるため，孔の個数は $n = 6$ を採用した．図中の横軸はノズルスロートからの距離を代表長さ h^* で無次元化した値 x/h^* を，縦軸は平面壁上の静圧 p をよどもみ点圧 p_{01} で無次元化した値 p/p_{01} を示す．なお，図中の黒丸と白丸は，それぞれ固体壁の場合と多孔壁の場合の実験結果を示す．図より，実験と計算の多孔壁の幾何形状は異なるものの，本計算結果は実験結果とほぼ一致している．なお， $x/h^* = 0.23$ 近傍での両者のずれは，主に実験精度が起因していると考えられる．よって，本研究では，孔をスリット幅 w の孔と見なして計算を行い，流れ場に及ぼす凝縮現象の影響を言及することは妥当と考えられる．

7.1.3 凝縮が生じない場合の流れに及ぼす多孔壁の影響

Fig.7.5 は、 L が 20 mm で凝縮が生じない場合 ($S_{01} = 0$) の静圧分布と密度の等高線図を示す。なお、密度の等高線図中には、コンピュータシュリーレン図も示している。Fig.7.5(a),(b), および (c) は、それぞれ孔の数 n が 3,6, および 9 個の場合を示す。図中の静圧分布は、曲面壁側と平面壁側での圧力分布を示す。図中の横軸と縦軸は、Fig.7.4 と同じである。なお、点線と実線は、それぞれ固体壁と多孔壁の場合を示す。

固体壁で凝縮が生じない流れ場において、圧力は流れ方向に減少する。このため、キャビティ付多孔壁を装着した場合、キャビティ上流部の多孔壁からはキャビティ内への吸込みが生じ、下流部の多孔壁からは吹出しが生ずる。この影響で境界層の厚さが変化し、膨張波と圧縮波が発生することになる。図からは、孔の個数に関わらずキャビティ部最上流の孔から多孔壁部のほぼ中心位置まで膨張・圧縮を、その後圧縮・膨張を繰り返しているのがわかる。また、平面壁近傍では、曲面壁ほど大きな変化を示さないことがわかる。なお、凝縮衝撃波を伴う流れ場に及ぼす孔の個数の効果については後述する。

Fig.7.5 の等高線図において、多孔壁近傍の黒い部分は圧縮波を示す。図中では圧縮波が明確にわかるが、実際には各孔近傍からは膨張波も生じているのがわかっている。これらのことから、孔の個数に関わらず膨張波と圧縮波は、多孔壁近傍に強い影響を及ぼしているが、孔の個数 n が増加するに従い、影響領域はより多孔壁側に近づくのがわかる。

なお、 $L = 30$ mm で n が 5,9, および 13 個の場合についても得られた圧力分布と等高線図は、Fig.7.5 で示した傾向と同様になることがわかった。

7.1.4 パッシブコントロールによる物理量の変化

Fig.7.4 の静圧分布において、実験結果と計算結果が比較的良く合うことから、ここでは $L = 20$ mm, $n = 6$ の場合の流れ場について詳しく述べる。

Fig.7.6 は、キャビティ付多孔壁の有無が凝縮を伴う際の物理量に及ぼす影響を示す。Fig.7.6(a) と (b) は、それぞれ曲面壁側と平面壁側の境界層外縁上における静圧力比 p/p_{01} 、マッハ数 Ma 、核生成率 I 、および液相の質量比 g (全質量流量に対する液相の質量流量の比) の分布を示す。横軸は、ノズルスロートを基準にした距離 x/h^* であり、 j は平面壁からのメッシュ点の位置を示す。なお、参考のために固体壁の場合の物理量変化も凝縮の有無に対し示している。

Fig.7.6(a) において凝縮が生ずる場合 (一点鎖線)、多孔壁部の圧力は、凝縮が生じない場合 (二点鎖線) に比べて部分的に高い値を示している。また、キャビティ内への吸込みは、凝縮が生じない場合に比べ最上流の孔から 4 番目の孔まで見られる。これは、キャビティ部上流側の孔からの吸込みによる流れの膨張に起因して生ずる凝縮の影響によるものと考えられる。さらに、固体壁で凝縮が生ずる場合 (実線) に比べ核生成率の極大値は上流側へ移動し、それに伴って液相の質量比が増加し始める点も上流側へ移動しているのがわかる。

Fig.7.6(b) では、Fig.7.6(a) で示すような急激な変化に比べ緩やかであるが、 $x/h^* = 0.1$ 近傍の圧力の減少とマッハ数の増加から、多孔壁部から生ずる波の影響が平面壁まで及んでいることがわかる。その結果、固体壁の場合に比べ、圧力の極小値は小さくなっているのがわかる。これより、核生成率の値が大きくなるため液相の質量比は急激に増加している。

上述より、キャビティ付多孔壁を装着することは、その近傍における圧力分布や核生成率に大きな影響を及ぼすことを意味し、特に多孔壁近傍での液相の質量比の増加開始点を上流側に移動する効果がある。

Fig.7.7 と Fig.7.8 は、それぞれキャビティ付多孔壁 ($L = 20$ mm, $n = 6$) の有無が凝縮衝撃波を伴う流れ場に及ぼす影響を二次元等高線で表した図である。図の (a) から (c) は、それぞれ密度、液相の質量比 g 、および全圧損失 p_s を示す。また、それぞれの図の (a) には、コンピュータシュリーレ

ン図も示している。

Fig.7.7のキャビティ付多孔壁がない場合の凝縮衝撃波は、流れ方向に対してほぼ垂直となり、凝縮開始点⁽⁷⁹⁾は衝撃波の上流側に沿うように位置する。また、液相の質量比と全圧損失はノズルの二次元性の影響を強く受け、曲面壁側では平面壁側と比べより上流側から値が増加しているのがわかる。Fig.7.8のキャビティ付多孔壁の場合には、多孔壁部からは膨張波と圧縮波が生じ(Fig.7.8(a))、多孔壁部近傍の流れ場に強い影響を及ぼしているのがわかる。特に、液相の質量比と全圧損失はその影響が顕著に表れており、多孔壁近傍においては固体壁の場合と比べ、より上流側に増加開始点が移動している。これは、Fig.7.6で示したように多孔壁による膨張の効果が強くなることに起因する。なお、ノズル中心線上の全圧損失は、固体壁と比べ多孔壁の場合の方が小さくなり、その差はよどみ点全圧の約1~1.5%であることがわかった。また、Fig.7.7(a)とFig.7.8(a)は、Fig.7.3(a)と(b)のシュリーレン写真とほぼ同様となり、計算は流れ場をよく再現しているのがわかる。

7.1.5 パッシブコントロールの効果

Fig.7.9は、Fig.7.6からFig.7.8の結果を参考にして得られた、 $L = 20 \text{ mm}$, $n = 6$ の場合のパッシブコントロールの効果を示す模式図である。Fig.7.9(a)と(b)は、それぞれキャビティ付多孔壁で凝縮が生じない場合と生ずる場合を示す。図中の破線は凝縮開始点を、また、一点鎖線と二点鎖線は、それぞれ膨張波と境界層を示す。

Fig.7.9(a)では、多孔壁部からの吸込みと吹出しの影響で境界層の厚さが変化するため、壁面近傍からは膨張波(EW)と圧縮波(CW)が交互に生じている。また、キャビティ部の最も上流側の孔からは内部への吸込みが強いため強い膨張波が生じ、最も下流側の孔からは主流側への吹出しが強いため、強い圧縮波が生ずる。

Fig.7.9(b)では、孔からの吸込みによる膨張波の影響で、曲面壁近傍では固体壁の場合に比べ凝縮開始点は上流側に移動する。よって、凝縮開始点は、Fig.7.7(a)と比べると大きく変化する。さらに、Fig.7.9(a)で示す最上流の孔から発生する圧縮波は、凝縮により生ずる圧縮波との干渉により強くなる(CW1)。一方、平面壁側では、多孔壁部から生ずる膨張波と圧縮波による影響が弱いため、ほぼ垂直型の凝縮衝撃波が生ずる。また、曲面壁側の下流では、流れを調整するための斜め衝撃波が形成される。

7.1.6 衝撃波の強さの変化

Fig.7.10とFig.7.11は、それぞれ L が20mmと30mmの場合で、孔の個数が流れ場に及ぼす影響を示す。なお、Fig.7.10とFig.7.11の $n=5$ の場合にはコンピュータシュリーレン図と流れ場の模式図を、Fig.7.11の $n=13$ についてはコンピュータシュリーレン図と全圧損失の等高線図を示す。

Fig.7.10では、孔の個数 n が3と9の場合、 n が6の場合(Fig.7.8)と同様に凝縮衝撃波を効果的に弱めており、特に n が9になると、Fig.7.7(a)と比較して弱くなるが、衝撃波は平面壁側でほぼ垂直型を保つのがわかる。これは、孔が小さい(孔の幅 w が小)ため、孔から生ずる膨張波と圧縮波の影響が弱くなることに起因していると考えられる。また、 $n=3$ の場合、本計算条件の中で最も w が大きいため、最上流の孔からは強い膨張波が生じ、模式図で示すように凝縮開始点はほぼ直線状になる。しかしながら、孔の個数が多くなると、Fig.7.9(b)と同様に凝縮開始点が大きく変化するのわかる。

一方、Fig.7.11では、 $n=13$ の場合に最も効果的に衝撃波を弱めているのがわかる。 $n=5$ の場合には、最上流の孔が $n=13$ に比べ大きい(w が大)ため、この孔からキャビティ内への吸込みが強くなり、曲面壁近傍に強い衝撃波が生ずる。さらに、 $L=20 \text{ mm}$ の場合と比べ、Fig.7.11では L が大きいため、上流側から2番目の孔からの膨張波も強くなり、下流側に凝縮衝撃波が発生する。このため、模式図からわかるように凝縮開始点は大きく変化するようになる。なお、 $n=13$ の場合、液相の質量比 g の分布の様相はFig.7.8(b)とほぼ同様であり、全圧損失は多孔壁近傍において少し高い値を

示しているのがわかる。

Fig.7.12 は、衝撃波の強さの変化を示した図である。横軸は多孔壁の孔の個数 n を、縦軸は衝撃波の強さ p_2/p_1 を示す。図より、キャビティ付多孔壁の場合、強さはどの個数に対しても多孔壁がない場合と比較し弱くなっているが、効果的に衝撃波を弱めるには、空隙率が一定の場合、キャビティの長さに対して適切な孔の数が存在することがわかる。

7.1.7 結論

本節では、キャビティ付多孔壁を用いるパッシブコントロールを円弧ハーフノズルのスロート下流域に定在する垂直型の凝縮衝撃波に適用し、衝撃波特性に及ぼすスリット壁の長さでスリットの個数の影響を数値的に示した。得られた結果を要約すると以下のとおりである。

1. 本計算手法は、凝縮衝撃波に対して適切なパッシブコントロールが行われているのが確認でき、流れ場の定性的な傾向を得るのに非常に有効である。
2. 多孔壁近傍の圧力変化は平面壁側の変化より大きいため、多孔壁近傍での凝縮開始点は上流側に移動する。また、凝縮の影響で圧力が増加するため、キャビティ内部への流れの吸込み領域が拡大する。
3. 凝縮衝撃波の強さは、本パッシブコントロールにより多孔壁がない場合に比べ弱くなる。また、効果的に弱めるためには、空隙率が一定の場合、キャビティの長さに対して適切な孔の数が存在する。

7.2 非定常凝縮衝撃波のパッシブコントロール

7.2.1 計算条件

また，多孔壁の孔の個数 n は， L が 20 mm の場合には，3,6,9, および 15 個を， L が 30 mm の場合には 5,9, および 17 個とした．初期過飽和度 S_{01} (よどみ点状態での水蒸気分圧とその温度における飽和圧力の比) は，0.70 (Mode 3), 0.745 (Mode 2), および 0.79 (Mode 1) の 3 種類とした．なお，実験装置，及び他の計算条件については，定常凝縮衝撃波の場合 (第 7.1.1 節) と同じである．

7.2.2 実験結果との比較

Fig.7.13 は，固体壁と多孔壁の場合 ($L = 20$ mm, $n = 6$) の理論より得られた平面壁側の平均静圧分布を示す．なお，初期過飽和度 S_{01} とよどみ点温度 T_{01} は，それぞれ 0.70 と 303 K である．図中の横軸はノズルスロットからの距離を代表長さ h^* で無次元化した値 x/h^* を，縦軸は平面壁上の平均静圧をよどみ点圧 p_{01} で無次元化した値を示す．また，図中で示す黒丸と白丸は，それぞれ固体壁と多孔壁 ($L = 20$ mm, $P = 0.18$, 孔の直径 2 mm が等間隔で分布されている) の場合の実験結果⁽⁵⁰⁾ である．但し，実験の孔の状態をより実験と一致させるために孔の個数は $n = 6$ を採用した．図より，実験と計算の多孔壁の幾何形状は異なるものの，計算結果は実験と定性的にほぼ一致しており，本計算手法の有用性がわかる．

Fig.7.14 は，多孔壁がない場合 (固体壁) であり，流路中心線上での静圧分布の時間変化を示す．Fig.7.15(a), (b), および (c) は，それぞれ Mode 1 ($S_{01} = 0.79$), Mode 2 ($S_{01} = 0.745$), および Mode 3 ($S_{01} = 0.70$) の場合を示している．位置座標軸は，ノズルスロットを基準とした距離 x を代表長さ h^* で無次元化した値 x/h^* を，圧力座標軸は静圧 p をよどみ点圧 p_{01} で無次元化した値 p/p_{01} を示す．また，図中の時間 t の範囲は，流れ場の振動のほぼ一周分を示す．これらの図より，流れは周期的に変動しており，使用したスキームでは，Mode 1 から Mode 3 までの非定常凝縮衝撃波を再現できるのがわかる．

Fig.7.15 は，固体壁の場合の本計算で得られた振動周波数 f と初期過飽和度 S_{01} の関係を示す．図中の黒丸と白丸は，それぞれ計算結果と実験結果⁽⁵⁰⁾ を示す．図より，Mode 1 の計算結果については定性的に実験結果を表していることがわかる．

7.2.3 キャビティ付多孔壁の効果

Fig.7.16(a), (b), および (c) は，Mode 1 から Mode 3 に対し，キャビティ付多孔壁 ($L = 20$ mm, $n = 6$) を適用した場合の流路中心線上静圧分布の時間変化を示す．なお，図中のそれぞれの軸は Fig.7.14 と同様であり，時間の範囲は Fig.7.14 で示したほぼ一周分を示す．それぞれの図から，キャビティ付多孔壁の場合には，非定常凝縮衝撃波による流れ場の振動が抑制されており，流れ場が安定しているのがわかる．これらのケースについては，多孔壁をつけることで，パッシブコントロールが非常に有効に働いているのがわかる．また，Fig.7.16(a) と (b) の分布において，圧力の急激な上昇を示す位置が 2 つ存在することがわかる．このことについては後述する．

7.2.4 パッシブコントロールによる物理量の変化

ここで，Mode 1 と Mode 3 の流れに対して，キャビティ付多孔壁 ($L = 20$ mm, $n = 6$) を適用した場合の流れ場の詳細について述べる．

Fig.7.17(a) と (b) は，Fig.7.16(a) と (c) に対する曲面壁近傍の静圧力比 p/p_{01} ，マッハ数 Ma ，核生成率 (単位体積，単位時間当たり生ずる凝縮核の個数)，および液相の質量比 g の分布を示す．な

お、図中には参考のために凝縮が生じない場合の物理量の変化も一点鎖線と二点鎖線で示している。また、図の横軸は、ノズルスロートを基準にした距離 x/h^* である。また、Fig.7.16(b) に対する物理量の変化は、定性的に Fig.7.16(a) とほぼ同様な変化を示した。

Fig.7.17(a) においてキャビティ付多孔壁で凝縮が生じない場合は、一点鎖線で示すように多孔壁部の中心までは膨張を、その後圧縮を繰り返しているのがわかる⁽⁵⁷⁾。一方、凝縮が生ずる場合には多孔壁部近傍の圧力とマッハ数は、大きく変動しているのがわかる。この原因については、次のように考えられる。Mode 1 では初期過飽和度が大きいいため、核生成率はキャビティ部最上流の孔から生ずる膨張波の影響を受け、急激に増加し大きな値に達する。この結果、液相の質量比も急激に増加することで潜熱放出量が大きくなるため、図で示すように大きな変動が生ずると考えられる。

Fig.7.17(b) では、Fig.7.17(a) と同様に変動が生じているが、初期過飽和度が小さいため圧力変動は小さくなる。また、核生成率と液相の質量比の変化は、Fig.7.17(a) とほぼ同様になることがわかる。

Fig.7.18 と Fig.7.19 は、Fig.7.16(a) と (c) に対する物理量の二次元等高線を示す。それぞれの図の (a) から (c) は、それぞれ、密度 ρ 、液相の質量比 g 、および全圧損失 p_s の等高線図を示す。なお、図 (a) にはコンピュータシュリーレン図も示している。

Fig.7.18(a) において、多孔壁部近傍の黒い部分は圧縮波を示す。図中では圧縮波が明確にわかるが、多孔壁近傍からは膨張波も生ずるため、流れ場は非常に複雑となっている。また、平面壁上ではほぼ垂直状の衝撃波が存在するにも関わらず境界層のはく離は見られない。さらに、Fig.7.18(b) より、液相の質量比は、キャビティ部の前縁付近から発生し、急激に増加してしているのがわかる。一方、Fig.7.18(c) で示す全圧損失は、液相の質量比が増加し始める付近から増加し、流れ場全体に生じているのがわかる。

Fig.7.19 の場合、多孔壁近傍からの圧縮波の強さは Fig.7.18(a) の場合に比べ弱いが、曲面壁近傍の液相の質量比は Fig.7.18 と同様にキャビティ部前縁付近から発生し、全圧損失も同様に増加しているのがわかる。なお、個体壁で凝縮が生じる場合の全圧損失に対する多孔壁付加による全圧損失の変化割合は小さい。⁽⁵⁷⁾

Fig.7.20 は、Fig.7.17 から Fig.7.19、および凝縮に関する物理量の変化を考慮して得られたパッシブコントロールの効果を表す模式図である。Fig.7.20(a) は凝縮が生じない場合を、Fig.7.20(b) と (c) は、それぞれ Fig.7.18 と Fig.7.19 に対応する。図中の破線は凝縮開始点を、また、一点鎖線と二点鎖線は、それぞれ膨張波と境界層を示す。

Fig.7.20(a) では、多孔壁部からの吸込みと吹出しの影響で境界層の厚さが変化するため、壁面近傍からは膨張波と圧縮波が交互に生じている⁽⁵⁷⁾。また、キャビティ部の最上流側の孔からはキャビティ内への吸込みが強いいため強い膨張波が生じ、最も下流側の孔からは主流側への吹出しが強いいため、強い圧縮波が生じている。

Fig.7.20(b) の初期過飽和度 ($S_{01} = 0.79$) が大きい場合には、スロートすぐ下流の孔からの膨張波の影響で、スロート近傍に凝縮衝撃波 (CSW1) が発生する。これは、Fig.7.20(a) で示すスロートすぐ下流の孔からの圧縮波と凝縮により生じた圧縮波が合体したものと考えられる。また、平面壁上には下流側の孔から発生する膨張波の影響を受けて、ほぼ垂直型の凝縮衝撃波 (CSW2) が生ずる。従って、凝縮開始点は、平面壁側では曲面壁側に比べ、かなり下流側に移動している。このことから、ノズル中心線上の圧力分布には、Fig.7.16 で示したような急激な上昇を示す位置が 2 つ生ずることになる。

一方、Fig.7.20(c) の初期過飽和度が小さい場合 ($S_{01} = 0.70$)、スロートすぐ下流の孔から発生する膨張波による凝縮の影響で凝縮衝撃波 (CSW1) が生じ、平面壁上には弱い凝縮衝撃波 (CSW2) が Fig.7.20(b) と同様に生ずる。

7.2.5 孔の個数が振動に及ぼす影響

ここでは、Mode 1 の流れに対して $L = 20$ mm と 30 mm を適用し、孔の個数が流れ場に及ぼす影響について述べる。

Fig.7.21 と Fig.7.22 は、それぞれ $L = 20 \text{ mm}$ ($n = 3,9,15$) と 30 mm ($n = 5,9,17$) の場合で、ノズル中心線上静圧分布の時間変化と密度の等高線図(コンピュータシュリーレン図を含む)を示す。静圧分布のそれぞれの軸は、Fig.7.16 と同様である。また、時間軸の範囲は、Fig.7.14 で示したほぼ一周期分を示す。Fig.7.21 と Fig.7.22 の両図とも、孔の個数に関わらず振動は抑制され流れ場が安定しており、多孔壁をつけることで、パッシブコントロールが非常に有効に働いているのがわかる。また、孔の個数が少ない場合、スロートすぐ下流の孔近傍には、多い場合と比較して強い凝縮衝撃波が発生しているのがわかる。これは、キャビティ長さ L が一定の場合、孔の個数が少なくなる (w は増加) と吸込み量が増加し、孔から強い膨張波が生ずるためと考えられる。一方、下流側平面壁にも Fig.7.18 と同様に凝縮衝撃波が存在することがわかる。

Fig.7.20, Fig.7.21, および Fig.7.22, 非定常凝縮衝撃波による流れ場の振動の抑制要因としては、スロートすぐ下流の孔から生ずる膨張波の効果で凝縮を発生させ、凝縮が生ずる領域を分散させることが重要と考えられ、流れの中には分散された凝縮衝撃波が生じるのがわかる。

Fig.7.16, Fig.7.21, および Fig.7.22 では、圧力分布において急激な上昇を示す位置が 2 つ存在することを示した。Fig.7.23 は、 $L = 20 \text{ mm}$ と 30 mm に対する孔の個数が、凝縮衝撃波の強さに及ぼす影響を示す。図中の横軸はノズルスロートからの距離 x を代表長さ h^* で無次元化した値 x/h^* を、縦軸はノズル中心線上の静圧分布から得られた衝撃波の強さ p_2/p_1 と p_4/p_3 を示す。なお、 $p_1, p_2, p_3,$ および p_4 は、図中の模式図の圧力を示す。

図から、 $L = 20 \text{ mm}$ と 30 mm において、孔の個数に関わらず上流側の衝撃波強さ p_2/p_1 は、下流側の衝撃波強さ p_4/p_3 と比べ弱くなっている。また、孔の個数が増えると p_2/p_1 と p_4/p_3 の両者とも弱くなる傾向となるが、最も弱くなる個数には最適値が存在することがわかる。 $L = 20 \text{ mm}$ と 30 mm ではそれぞれ $n = 6$ と $n = 9$ であり、 $L = 30 \text{ mm}$ の場合において最も弱くなるのがわかる。しかし、凝縮衝撃波が生ずる位置は、キャビティ長さに関わらずほぼ同じ位置であるのがわかる。

以上から、流れ場の振動を抑制し、流れに生ずる凝縮衝撃波を効果的に弱くするには、キャビティ長さに対して適切な孔の個数が存在することがわかる。

7.2.6 結論

本節では、キャビティ付多孔壁を用いるパッシブコントロールを、円弧ハーフノズル内で生ずる非定常凝縮衝撃波に適用し、衝撃波特性に及ぼす多孔壁のキャビティ長さとの影響を数値的に示した。得られた結果を要約すると以下のとおりである。

1. 本研究で使用したスキームでは、非定常凝縮衝撃波をほぼ正確に再現することができる。
2. 本計算手法では、非定常凝縮衝撃波に対して適切なパッシブコントロールが行われているのが確認でき、流れ場の定性的な傾向を得るのに非常に有効である。
3. 衝撃波の振動を抑制するには、スロートすぐ下流の孔から生ずる強い膨張波の効果で凝縮を発生させ、凝縮領域を分散させることが重要である。
4. 非定常凝縮衝撃波の振動を抑制し、凝縮衝撃波を効果的に弱くするには、キャビティ長さに対して適切な孔の個数が存在する。

第8章 スロットィッドノズルを有するラバルノズル 流れに及ぼす非平衡凝縮の影響

8.1 定常凝縮衝撃波のパッシブコントロール

8.1.1 実験装置と計算条件

Fig.8.1 は、スロットィッドノズルを含む測定部の詳細図を示す。測定部は、高さが 60 mm、幅が 38 mm のく形断面である。測定部には、2次元円弧ハーフノズル ($R^*=155$ mm, $h^*/2=24$ mm) が上壁面に設置されている。また、ノズル壁面上にはスロート位置から、スリット幅 1.0 mm、深さ 5 mm のスロットがバイパス下流側の長さ l (20 mm, 30 mm) を介してさらに下流側にもう一つ取り付けられている。圧力計測は、下壁面上に 2 mm 間隔で取り付けられた圧力測定孔より行った。流れ場の可視化にはシュリーレン法を用いた。貯気槽におけるよどみ点状態での圧力 p_{01} と温度 T_{01} は、それぞれ 101.3 kPa と 303.15 K である。また、初期過飽和度 S_{01} (水蒸気分圧とその温度における飽和圧力の比) は、0.60(定常凝縮衝撃波が発生)とした。

本解析においては、問題を簡単化するため、凝縮により生成された微小水滴と混合気体との間には速度スリップは存在せず、相間のエネルギー緩和過程も考慮しないとする。また、微小水滴の圧力に対する寄与は無視する。このような仮定をもとに使用した基礎方程式は、二次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式と液相質量比の増加割合を示す式⁽⁵³⁾の無次元保存系表示式である。なお、本計算で使用した凝縮現象に関連する計算手法等は文献⁽⁵⁸⁾と同じであり、格子点数はノズル部で $291 \times 41 \sim 711 \times 41$ 、スロット部で $133 \times 61 \sim 561 \times 61$ である。ノズルは、全長 600 mm、曲率半径 $R^* = 155$ mm、スロート高さ(代表長さ) $h^*/2 = 24$ mm、入口・出口高さ 60 mm の形状である。計算については、 $l=20$ mm, 25 mm, 30 mm, 40 mm について行い、よどみ点での圧力 p_{01} 、温度 T_{01} 、および初期過飽和度 S_{01} は実験と同じ値を用いた。

8.1.2 実験結果との比較

Fig.8.2 は、初期過飽和度 S_{01} が 0.60(定常凝縮衝撃波)で、それぞれ固体壁とスロットィッドノズル ($l=30$ mm) の場合のシュリーレン写真 (Fig(a)) とコンピュータシュリーレン図 (Fig(b)) を示す。なお、Fig(b) には密度の等高線図と凝縮開始点も示している。Fig.8.2 から、数値計算結果は実験で得られたシュリーレン写真が示す流れ場をほぼ再現しており、本計算手法の有効性がわかる。また、固体壁とスロットィッドノズルの実験と計算における下壁面上での圧力分布は、両者ともほぼ一致するのが確認できた。

8.1.3 スロット長さの効果

Fig.8.3 から、数初期過飽和度 S_{01} が 0.60 の場合の定常凝縮衝撃波に対しては、スロット長さ l が 20 mm と 25 mm の場合、凝縮衝撃波の強さは固体壁の場合の強さとほぼ同程度になる。一方、スロット長さが 30 mm と 40 mm における凝縮衝撃波の強さは、固体壁の場合の強さと比べ弱くなる。しかしながら、両者にさほど優位さがいないため、 $S_{01}=0.60$ における好適なスロット長さは、製作コスト面やスロット部流路内の摩擦によるエネルギー損失の観点から本実験では 30 mm であると考え

られる。

8.1.4 物理量の変化

Fig.8.4 は、 l が 30 mm で、 $S_{01}=0.60$ の場合のノズル曲面壁近傍での静圧力比、マッハ数、核生成率 (単位時間、単位体積あたりに発生する凝縮核の個数)、および液相の質量比 g (全質量流量に対する液相の質量流量の比) の分布を示す。横軸は、ノズルスロートを基準にした距離である。なお、スロット壁がない場合の物理量の変化も参考のために示している。

スロット壁で $S_{01}=0$ の場合の圧力分布 (二点鎖線) より、上流側のスロットからは膨張と圧縮が、下流側のスロットからは圧縮と膨張が順じ生じているのがわかる。また、上流側スロット部で生ずる膨張波の影響で凝縮が生ずるために、圧力は $S_{01}=0$ の場合に比べて高い値を示している。さらに、ダブルスロットの効果により、固体壁で凝縮が生ずる場合に比べ核生成率の極大値は上流側へ移動し、それに従って液相の質量比が増加し始める点も上流側へ移動し、ノズルスロット近傍に達しているのがわかる。

8.1.5 スロッチェッドノズルの効果を示す模式図

数値計算の結果を参考にし、パッシブコントロールを行った場合の流れ場の様子を Fig.8.5 に示す。Fig.8.5 は、 $l=30$ mm で、 $S_{01}=0.6$ の場合である。Fig.8.5 では、スロット部内の流れはバイパス部を経て上流側から下流側へ向かうため、上流側のスロット上の境界層は吸込みの効果で薄くなり、下流側のスロット上の境界層は吹出しの効果で流路中心部方向に厚くなる。この結果、上流側スロットからの膨張波 (EW) の影響で凝縮が生じ、曲面壁近傍では凝縮開始点が Fig.8.2(b) に比べ上流側に移動する。このため、垂直型の凝縮衝撃波は M 型に分枝し、衝撃波を弱める結果となる。一方、スロット部からの膨張波は平行壁面上には強い影響を及ぼさないため凝縮衝撃波形状はほぼ垂直状に保たれる。

従来の研究⁽⁵⁸⁾⁽⁵⁹⁾ から、キャピティ付多孔壁の場合には、特に最上流部の孔における強い膨張波の影響で凝縮が発生し、多孔壁近傍の流れ場 (定常と非定常凝縮衝撃波) に強い影響を及ぼすことがわかっている。本研究で使用したスロッチェッドノズルにおいても、凝縮衝撃波の制御機構はキャピティ付多孔壁の場合と基本的に同様となり、上流側スロットが重要な役割を果たしているのがわかった。

8.1.6 結論

本節では、スロッチェッドノズルを用いるパッシブコントロールを円弧ハーフノズルのスロット下流域に定在する垂直型の凝縮衝撃波に適用し、衝撃波特性に及ぼす影響を実験的および数値的に示した。得られた結果を要約すると以下のとおりである。

1. 凝縮衝撃波に対して適切なパッシブコントロールが行われていることを確認できた。
2. 適切なコントロールを実現するには、ある程度スロット長が必要であることを示した。

8.2 非定常凝縮衝撃波のパッシブコントロール

8.2.1 計算条件

Fig.8.6 は、計算の対象としているスロツティッドノズルの計算格子図を示している。ノズル壁面上には、スロートから上流側スリットまでの距離 x_d の位置に幅 1.0 mm、深さ 5 mm のスロツトがバイパス（下流側の長さ l ）を介してさらに下流側にもう一つ取り付けられている。なお、実験装置、及び他の計算条件については、定常凝縮衝撃波の場合（第 8.1.1 節）と同じである。

8.2.2 実験結果との比較

Fig.8.7 は、固体壁で初期過飽和度 S_{01} が 0.80 の場合の実験より得られた、非定常凝縮衝撃波による流れ場の振動の約 1 周期分のシュリーレン写真を示す。なお、流れは左から右である。Fig.8.7(a) では、凝縮による潜熱放出の影響で生じた凝縮衝撃波 A がスロート上流にあり、下流側には同じく凝縮による別の凝縮衝撃波 B が観察される。また、Fig.8.7(b) と (c) からは、衝撃波 B が時間とともに上流側へ伝ばし、Fig.8.7(d) では衝撃波 B の後方に新たな凝縮衝撃波 C が発生しているのがわかる。

Fig.8.8(a) と (b) は、 $S_{01}=0.80$ の場合に対し計算より得られた流れ場の振動の様子約 1 周期 ($1/f$) 分を、それぞれコンピュータシュリーレン図と液相の質量比 g の等高線図について示している。

Fig.8.8(a) には密度の等高線図も示しており、一点鎖線は凝縮が生じない場合の音速線の位置を示す。また、Fig.8.8(b) における破線は液相の質量比 g （全質量流量に対する液相の質量流量の比）が増加し始める線（凝縮開始点を結んだ線）を示す。Fig.8.7 と Fig.8.8 の比較より、計算結果は実験より得られたシュリーレン写真が示す流れ場をほぼ再現しているのがわかる。また、計算より得られる振動周波数は約 1309 Hz であり、実験から得られた周波数（約 1226 Hz）とほぼ同様の結果が得られている。さらに、Fig.8.8(b) からは、液相の増加開始点が振動の 1 周期の間で最も上流側に達する位置は、スロートの極近傍であることがわかる。

上述したように、計算は実験結果をほぼ正確に再現することが確認でき、本計算手法の有効性が明らかとなった。よって、次節以降は数値計算から得られた結果を中心に議論を進める。

8.2.3 スロツト長さの効果

Fig.8.9(a) ($f = 1148$ Hz) と (b) ($f = 1106$ Hz) は、 $x_d/h^* = 0$ でスロツト長さ l/h^* がそれぞれ 0.417 ($l = 20$ mm) と 0.521 ($l = 25$ mm) の場合における密度の等高線図を含むコンピュータシュリーレン図を示す。それぞれの図中には振動の約 1 周期分を示している。図より、両者とも Fig.8.8 の固体壁の場合と同様に振動するが、 l/h^* が 0.417, 0.521 と増加すると振動周波数は減少しているのがわかる。また、両者において流れ場の振動が抑制されないのは、固体壁で凝縮が生じない場合の上流側と下流側のスリット間の圧力差が小さく、十分な吸込みと吹出しの効果が得られず、これにより上流側スロツト部から発生する膨張波強さが弱い⁽⁴⁹⁾ ⁽⁶⁰⁾ ためと考えられる。

Fig.8.10(a) は、 $l/h^*=0.625$ ($l=30$ mm, $x_d/h^*=0$) の場合の実験より得られたシュリーレン写真を、Fig.8.10(b) と (c) はそれぞれ計算より得られたコンピュータシュリーレン図とノズル下壁面上での静圧分布を示す。Fig.8.10(c) の横軸はノズルスロートからの距離 x をスロート高さ h^* で無次元化した値 x/h^* を、縦軸は静圧 p をよどみ点圧力 p_{01} で無次元化した値 p/p_{01} を示す。なお、Fig.8.10(c) には実験より得られた静圧分布（白丸印）も示している。また、曲壁面上の静圧分布の時系列変化には変化が見られず、流れ場が安定している。図より実験と計算はともに振動が完全に抑制されており、スロツト壁を用いることでパッシブコントロールが非常に有効に働いているのがわかる。また、計算結果は実験で得られたシュリーレン写真が示す流れ場をほぼ再現でき、下壁面上での圧力分布も実験と計算結果はほぼ一致するのが確認できる。ところで、 $l/h^* = 0.833$ ($l = 40$ mm, $x_d/h^* = 0$) に対

するダブルスロット壁によるパッシブコントロールの効果は、Fig.8.10 の $l/h^*=0.625$ の場合と同様な結果が得られた。

以上の結果より、流れ場の振動を効果的に抑制するには、適切なスロット長さが存在することがわかる。なお、非定常流れ場の振動抑制の原因については後述する。

8.2.4 スロット位置の効果

Fig.8.11(a), (b), および (c) は、それぞれ $x_d/h^* = -0.208(x_d = -10\text{mm})$, $-0.104(x_d = -5\text{mm})$, および $0.104(x_d = 5\text{mm})$ の場合における密度の等高線図を含むコンピュータシミュレーション図を示す。なお、下流側スリットの位置は、スロートから $x_d/h^* = 0.625(x = 30\text{mm})$ に固定している。これらの図からわかるように、流れ場の振動は抑制されていない。Fig.8.11(a) と (b) において振動が抑制されないのは、上流側のスリットの位置が亜音速領域にあり、また Fig.8.8(b) で示したノズル上壁面側の g の増加開始点からの距離が離れていることが考えられる。一方、Fig.8.11(c) は、スリットの位置が超音速領域にあるが、Fig.8.8(b) で示した g の増加開始点が最も上流側に達する位置と上流側スリットの位置が離れていることが原因と考えられる。なお、上流側スリットの位置が $x_d/h^* = 0.104(x_d = 5\text{mm})$ の位置で、スロットの長さ l/h^* が $0.625(l = 30\text{mm})$ の場合においても流れ場の振動は抑制されず、スロット長さは影響を及ぼさないことがわかった。

以上のことから、上流側スリットは、液相の質量比 g の変化から、振動の1周期の間で最も上流側に達する位置近傍（スロート近傍）に取り付ける必要があることがわかる。

8.2.5 物理量の変化

Fig.8.12 は、Fig.8.10 に対応するノズル曲面壁近傍での静圧力比 p/p_{01} 、核生成率 I （単位時間、単位体積当たりが発生する凝縮核の個数）、および液相の質量比 g の分布を示す。横軸は、ノズルスロートを基準にした距離 x/h^* である。なお、凝縮が生じない場合の固体壁とスロット壁の場合の物理量変化も参考のために示している。

スロット壁で $S_{01}=0$ の場合の圧力分布（二点鎖線）より、上流側のスロットからは膨脹と圧縮が、下流側のスロットからは圧縮と膨脹が順じ生じているのがわかる。また、 $S_{01}=0.80$ の場合、上流側スロット部で生ずる膨脹波の影響で凝縮が生ずるために、圧力は $S_{01}=0$ の場合に比べて高い値（一点鎖線）を示している。さらに、ダブルスロットの効果により、核生成率の極大値と液相の質量比が増加し始める点は、ノズルスロート近傍に達しているのがわかる。

Fig.8.13($l/h^*=0.625, x_d/h^*=0$) は、曲面壁側における境界層の排除厚さ δ^* の変化を示す。なお、参考のために固体壁で凝縮が生じない場合（点線）も示している。上流側スロット近傍における排除厚さは吸込みによる影響で減少しているが、下流側スロット近傍では吹出しの影響で急激に増加するのがわかる。特に、スロット壁で凝縮が生ずる場合（一点鎖線）、下流側スロット近傍を除き固体壁で凝縮が生じない場合に比べ減少しているのがわかる。文献^{(62) (69)}では、流れ場に凝縮が生ずると凝縮領域背後の排除厚さが小さくなることを示したが、ダブルスロット壁の場合にも同様な現象が生ずることがわかる。

数値計算の結果を参考し、パッシブコントロールを行った場合の流れ場の様子を Fig.8.14 ($l/h^*=0.625, x_d/h^*=0$) に示す。図中の破線は凝縮開始点を、また、一点鎖線と二点鎖線は、それぞれ膨脹波と境界層を示す。スロット部内の流れはバイパス部を経て上流側から下流側へ向かうため、上流側スリット上の境界層は吸込みの効果で薄くなり、下流側スリット上の境界層は吹出しの効果で流路中心部方向に厚くなる。この結果、上流側スリットからの膨脹波 (EW) の影響で凝縮が生じ、曲面壁近傍では凝縮開始点がスロート近傍に移動する。

従来の研究^{(49) (60)}から、キャビティ付多孔壁の場合には、特に最上流部の孔における強い膨脹波の影響で凝縮が発生し、多孔壁近傍の流れ場（定常と非定常凝縮衝撃波）に強い影響を及ぼすことが

わかっている．本研究で使用したスロティッドノズルにおいても，凝縮衝撃波の制御機構はキャビティ付多孔壁の場合と基本的に同様となり，上流側スロット近傍から発生する膨張波が重要な役割を果たしているのがわかった．

8.2.6 全圧損失と乱流エネルギーの変化

Fig.8.15 ($l/h^* = 0.625, x_d/h^* = 0$) は，図中で示すようにノズルスロートから $x/h^* = 1.0$ の位置における下壁面に垂直な断面上での流れのエントロピー変化から求めた全圧損失 $1-p_0/p_{01}$ の分布を示す．なお， p_0 は局所全圧であり，図中には固体壁で凝縮が生じない場合と生ずる場合も示す．図より，凝縮が生じない場合の固体壁 (印) とダブルスロット壁 (印) とを比較すると，ダブルスロット壁の方が上壁面側において僅かに損失が大きくなっているのがわかる．上壁面側の僅かな差は，スロット孔から生ずる波の影響であると考えられる．

$S_{01}=0.80$ で固体壁の場合，非定常凝縮衝撃波による流れ場の振動の影響で，全圧損失は灰色の領域の間で変化する．しかし，ダブルスロット壁を用いて非定常凝縮衝撃波が制御できた場合 (印) の全圧損失は，灰色の領域にあり有意な差が生じていないのがわかる．以上のことから，振動する流れ場を抑制するにはダブルスロットによるパッシブコントロールが非常に有効であり，凝縮の有無に関わらずダブルスロット壁を流れ場に適用しても，全圧損失には大きな変化が生じないことがわかる．

Fig.8.16 は，Fig.8.10 に対応する場合のノズルスロートから $x/h^* = 1.0$ の位置における下壁面に垂直な断面上での乱流エネルギーの分布を示す．図中の横軸は乱流エネルギー k をよどみ点音速の二乗， a_{01}^2 で無次元化した値を，縦軸は下壁面上からの距離 y をスロート高さ h^* で無次元化した値を示す．なお，参考のために固体壁で凝縮が生じない場合 (点線) も示している．図からわかるように，非定常凝縮衝撃波にダブルスロットを適用した場合の壁面近傍の乱流エネルギー (一点鎖線) は， $S_{01}=0$ でダブルスロットの場合 (実線) の乱流エネルギーに比べ小さいことがわかる．これは，液滴表面上での蒸気分子の凝縮や蒸発による緩和現象により，乱れのエネルギーが減衰するためであると考えられる⁽⁶³⁾．また，壁面に極近い領域では，固体壁で凝縮が生じない場合より値が小さくなっているのがわかる．これは，Fig.8.13 で示したように，凝縮が生ずることによる境界層の排除厚さが減少していることに起因していると考えられる．

8.2.7 結論

本節では，スロティッドノズルを用いるパッシブコントロールを円弧ハーフノズル内に生ずる非定常凝縮衝撃波に適用し，衝撃波特性に及ぼすスロット長さや位置の影響を数値的に示した．得られた結果を要約すると以下のとおりである．

1. 本計算手法は，非定常凝縮衝撃波の挙動を比較的正確にシミュレートでき，流れ場の定性的な傾向を得るのに非常に有効である．
2. 非定常凝縮衝撃波の振動に対して適切なコントロールを実現するには，ある程度スロット長さを有するダブルスロットを用い，さらに液相の増加開始点近傍 (ノズルスロート近傍) に上流側スリットを配置する必要がある．
3. ダブルスロット壁では，凝縮の有無に関わらずノズル下流側の全圧損失には大きな変化は生じない．また，スロット壁で凝縮が生ずる場合の乱流エネルギーは，スロット壁で凝縮が生じない場合に比べ小さくなる．

第9章 非平衡凝縮を伴う遷音速バンプ流れ

9.1 非平衡凝縮が遷音速流れ場に及ぼす影響

9.1.1 実験装置と計算条件

Fig.9.1 は供試モデルの詳細を示す．実験では，曲率半径 R が 40 mm と 200 mm の 2 種類の円弧バンプモデル(長さ: l) を採用し，厚さ t を 4 mm の一定とした．壁面上での圧力測定孔 ($\phi = 1$ mm) は，図に示すようにモデルの中心線上から両側 1.5 mm の位置に，2.5 mm の間隔で交互に配置した．また，圧力測定値の連続ウェーブレット解析⁽⁶⁸⁾ は，衝撃波背後 ($S1, S2$ の位置) で得られたデータをもとに行った．流れの可視化はシュリーレン法を，モデル壁面上での流れの可視化には，せん断応力検知型液晶 (MERCK Industrial Chemicals 社製の Shear sensitive liquid crystal TI622) による油膜法を用いた．実験では，作動気体に湿り空気を用い，そのよどみ室における初期圧力 p_{01} と初期温度 T_{01} はそれぞれ 102 kPa と 298 K の一定値とし，初期過飽和度 S_{01} を 0.24 \sim 0.80 の範囲とした．また，バンプモデル上流側での圧力は，本実験において $p/p_{01}=0.71865$ ($M = 0.735$) の一定である．

Fig.9.2 は，本計算に用いた計算格子を示している．計算の対象としているバンプモデルは，入口と出口の高さは 60 mm，スロート高さ 56 mm，曲率半径 $R = 40$ mm の形状である．計算では曲率半径を代表長さとし，格子数は 100×50 とした．モデル境界付近の x 方向の最小格子幅は 7.17×10^{-2} (無次元では 9.01×10^{-4}) mm である．

速度境界条件は，壁面において滑り無しの条件であり，圧力については，壁面近傍で格子幅は十分に狭いことから $\partial p / \partial \eta = 0$ とした．温度の境界条件には，断熱の条件 $\partial T / \partial \eta = 0$ を用い，液相の質量比 g は，壁面において $g = 0$ とした．また，入口の境界条件として保存量ベクトルは固定し，出口の保存量ベクトルは外挿により求めた．

本計算において使用する入口から 1 セル上流，出口から 1 セル下流の仮想入口・出口での保存量ベクトルの条件には，リーマン (Riemann) 不変量を用いたリーマン境界条件を適応させた．計算の時間ステップは，CFL 条件で決定し，その値は 0.98 とした．

9.1.2 流れの可視化と圧力計測

Fig.9.3 (a), (b) は，それぞれ曲率半径 R が 40 mm と 200 mm のノズルの場合で，初期過飽和度 S_{01} が衝撃波に及ぼす影響を示すシュリーレン写真である．流れは左から右である．両図より， S_{01} が 0.24 のほぼ乾き空気とみなせる場合には，衝撃波はモデル壁面上に明瞭に観察されるが， S_{01} が増加するるとだいに弱くなり，その定在位置は，上流側へ移動するのがわかる．これは，衝撃波上流で凝縮が生ずると潜熱の放出による圧力上昇をもたらす，その結果として衝撃波への流入マッハ数が減少するためであると考えられる．

Fig.9.4 (a), (b) は，モデルの曲率半径 R がそれぞれ 40 mm と 200 mm の場合において，せん断応力検知型液晶を利用した油膜法によるモデル壁面上における可視化写真を示す．流れは左から右である．Fig.9.4 (a) の $S_{01} = 0.24$ の場合，衝撃波の定在位置背後で流れははく離し，流れの三次元性が強いことがわかる．また，Fig.9.4 (a) の R が 40 mm の場合には， S_{01} の増加とともに境界層のはく離が抑制されるのが確認できる．一方，Fig.9.4 (b) の場合には，衝撃波は流れ場に存在するが { Fig.9.3 (b) 参照 } 流れははく離しておらず，Fig.9.4 (a) ほど三次元性は強くない．

Fig.9.5 (a), (b) は、曲率半径 R がそれぞれ 40 mm と 200 mm の場合において、初期過飽和度 S_{01} が壁面上の圧力分布に及ぼす影響を示す。図の横軸はスロートからの距離 x をモデル弦長 l で無次元化した値で、縦軸は静圧 p を初期圧力 p_{01} で無次元化した値である。両図より、 $S_{01} = 0.24$ の場合には、凝縮の効果が小さいため衝撃波近傍 ($R = 40 \text{ mm} : x/l = 0.172, R = 200 \text{ mm} : x/l = 0.214$) の圧力分布の勾配は大きい、 S_{01} の増加とともに衝撃波が上流側へ移動し、その強さが弱くなるため圧力勾配も緩やかになることがわかる。この事実は、衝撃波の上流で非平衡凝縮を発生させることで、衝撃波による流れのはく離を回避できる可能性があることを示す。また、Fig.9.5 (a) では、 S_{01} が増加すると境界層のはく離が抑制されるため圧力回復が改善されるのがわかる。

一般的に、初期過飽和度 S_{01} が増加すると凝縮の影響で全圧損失が大きくなる⁽⁶⁾⁽⁷¹⁾。しかし、 S_{01} が小さく衝撃波による境界層のはく離がある場合 (Fig.9.3 (a), Fig.9.4 (a)), S_{01} が大きくなるとスロート近傍 ($x/l = 0 \sim 0.2$) での凝縮による全圧損失の増加より衝撃波背後の圧力回復による損失の減少効果が大きくなると思われ、流れ場全体の全圧損失は小さくなることが考えられる。

9.1.3 壁面上の圧力変動に及ぼす効果

Fig.9.6 (a), (b) は、Fig.9.5 (a), (b) に対応する圧力の変動成分の rms 値を示す。図の縦軸は、壁面上での圧力変動成分の rms 値 p_{rms} を変動圧力の平均値 p_{av} で無次元化した値である。両図より、 $S_{01} = 0.24$ の場合、圧力変動は衝撃波が定在する位置 ($R = 40 \text{ mm} : x/l = 0.172, R = 200 \text{ mm} : x/l = 0.214$) で強く、 S_{01} が増加すると rms 値のピークは小さくなるのがわかる。また、 S_{01} の増加とともに衝撃波は上流側へ移動するため rms 値のピークも上流側へ移動している。以上より、流れ場に凝縮が生ずることで、衝撃波が存在する領域での壁面上の圧力変動は抑制されることがわかる。これは、凝縮により発生する微小液滴による効果と、衝撃波が弱くなり境界層との干渉の程度が小さくなる効果が原因と考えられる⁽⁶⁹⁾。

9.1.4 衝撃波背後の圧力変動に及ぼす効果

本研究では、衝撃波背後の圧力変動に対して連続ウェーブレット変換を適用し、圧力変動の時間的変化の様相を調べた。次式に連続ウェーブレット変換の式を示す。

$$W(b, a) = \frac{1}{a^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) P(t) dt$$

ここで、 $W(b, a)$ と ψ は、ウェーブレット係数およびマザーウェーブレットを、 a と b はスケールパラメータおよびシフトパラメータを示す。また、 $p(t)$ は圧力の時系列信号を示す。なお、マザーウェーブレットには、Morlet wavelet⁽⁶⁸⁾ を用いた。なお、ウェーブレット解析については、付録 C を参照のこと。

Fig.9.7 と Fig.9.8 は、モデルの曲率半径 R がそれぞれ 40 mm と 200 mm の場合に、Fig.9.1 で示す測定孔の位置 (S1, S2) での圧力信号をもとにして得られたウェーブレット係数に及ぼす初期過飽和度 S_{01} の影響を示している。図中の等高線はウェーブレット係数が $W > 0$ の場合だけを示しており、等高線の間隔はそれぞれの図において等しい。なお、図の横軸はシフトパラメータ b で、左縦軸にはスケールパラメータ a を、右軸にはスケールパラメータに対応する周波数 f を示す。

Fig.9.7 において初期過飽和度 $S_{01} = 0.24$ の場合は、低周波側から高周波側まで等高線が密集している領域が等間隔に存在するのがわかる。また、高周波成分を強く含んでいるのは、はく離による影響と考えられる。 S_{01} が 0.80 になると低周波領域を除いて等高線の密集の程度は弱くなるのがわかる。一方、Fig.9.8 では、 $S_{01} = 0.24$ の場合に高周波成分を多少含んでいるのが、 S_{01} が 0.80 になると抑制され、低周波領域での等高線の密集の程度は弱くなるのがわかる。

以上より、はく離の有無に関わらず、流れで凝縮が生ずると、特に高周波振動が抑制されることがわかる。

9.1.5 数値計算結果と流れ場の全圧損失

Fig.9.9 は、 $R = 40 \text{ mm}$ の場合の数値計算より得られた静圧分布を示す。なお、図中には実験より得られた静圧分布も示している。図中で示す計算結果は、実験結果と定性的によく合い、 S_{01} の増加とともに衝撃波が上流側へ移動するのがわかる。

Fig.9.10 (a) ~ (c) は、 $R = 40 \text{ mm}$ で S_{01} が 0.24, 0.40 および 0.60 の場合のマッハ数 M_n の等高線図を示す。図より明らかなように、 S_{01} が増加すると衝撃波は弱くなるとともに、わずかではあるが境界層のはく離が抑制されているのがわかる。Fig.9.5 の圧力分布とこれらの結果から、乱流モデルを考慮した本計算手法は、凝縮を伴う遷音速流れ場に対し有効であることがわかる。

Fig.9.11 (a) ~ (c) は、本計算結果より得られた物理量をもとに求めた全圧損失係数 ($1 - p_0 / p_{01}$) の等高線図を示す。なお、全圧損失係数は Eq(2.71) より求めた⁽⁷²⁾。

Fig.9.11 より、全圧損失係数は初期過飽和度 S_{01} の増加とともに流れ場の広い領域で生ずるのがわかる。以上より、 S_{01} が増加することによって衝撃波の減衰と境界層のはく離の抑制の効果が見られるが、流れ場の広い領域で全圧損失が生ずるため、流れ場全体のエネルギー損失を考える場合には十分な考察が必要であると考えられる。

9.1.6 結論

本節では、湿り空気が円弧バンプモデルで膨張した場合に生ずる遷音速凝縮流れにおいて、モデル曲面上に発生する衝撃波特性に及ぼす非平衡凝縮の影響を、特に衝撃波背後ではく離する場合としない場合について示した。得られた結果を要約すると以下のとおりである。

1. 初期過飽和度 S_{01} が小さく境界層がはく離する場合、 S_{01} が増加するとはく離は抑制されることが実験より確認できた。
2. 初期過飽和度 S_{01} が小さい場合、凝縮の効果が小さいため衝撃波近傍の圧力分布の勾配は大きいですが、 S_{01} の増加とともに衝撃波が上流側へ移動し、その強さが弱くなるため圧力勾配も穏やかになる。
3. 初期過飽和度 S_{01} の増加とともに衝撃波は弱くなり、衝撃波近傍での圧力変動成分の rms 値も小さくなる。また、衝撃波背後の圧力変動には低周波成分から高周波成分を含んでいるが、 S_{01} の増加とともに特に高周波成分が抑制される。
4. 乱流モデルを考慮した本計算結果は、実験結果と定性的によく合い、初期過飽和度 S_{01} の増加とともにのはく離の抑制も確認できた。また、全圧損失係数は、初期過飽和度 S_{01} の増加とともに流れ場の広い領域で生ずる傾向を示す。

9.2 キャビティ付多孔壁を有する遷音速流れ場における衝撃波の制御

遷音速流れ場における衝撃波のパッシブコントロールについては、最近、衝撃波と境界層が干渉する流れ場に対してキャビティ付多孔壁とキャビティ部より上流側壁面に取り付けた渦発生装置を併用する手法 (Fig.9.12(a)) が提案され、造波抵抗の低減効果や速度分布の安定性に効果があることが報告されている⁽⁴¹⁾。また、スロット壁とその上流側スロット壁からのボルテックスジェットを併用した技術 (Fig.9.12(b)) も提案されており、衝撃波の発生位置やその圧力勾配の制御に有効となる可能性があることが示されている⁽⁴²⁾⁽⁴³⁾。

Fig.9.13 に、本研究で用いたキャビティ付多孔壁を利用したパッシブコントロールと衝撃波上流の超音速領域で発生する非平行凝縮とを併用する方法を示す。

9.2.1 計算条件

Fig.9.14 は、二次元バンブモデルの曲率半径 R が 200 mm で長さ l が 106 mm の場合の計算格子を示す。バンブモデル壁面上のキャビティ部には、2次元スロット壁を設けており、本研究ではこれを多孔壁と呼ぶ。キャビティ部は、長さ $L=20$ mm、深さ $D=5$ mm の二次元形状であり、空隙率 (多孔壁部の総面積と多孔壁板領域面積の比) $P=0.18$ の多孔壁 (孔の幅 w : 0.6 mm) が取付けられている。なお、キャビティ部上流端のスロートからの距離 (x 軸とする) 位置 x_p は、4 mm (Case 1) と -3.5 mm (Case 2) の 2 種類とした。本計算で使用した格子点数は、流路部で 251×61 、キャビティ部で 133×16 である。また、よどみ点状態での初期過飽和度 S_{01} は 0 (凝縮無し) と 0.5 の場合を対象とし、他の計算条件、及び実験装置については、第 9.1.1 節と同じである。

9.2.2 キャビティ位置の影響

Fig.9.15(a) と (b) は、それぞれ固体壁で凝縮が生じない場合 ($S_{01}=0$) と生ずる場合 ($S_{01}=0.5$) のマッハ数 M の等高線図を示す。流れ方向は左から右であり、図中の太実線は音速線を示している。なお、Fig.9.15 では参考のために計算で使用したキャビティ位置も記入しており、Case 1 ($x_p=4$ mm) と Case 2 ($x_p=-3.5$ mm) は、それぞれ Fig.9.15(a) と (b) で示す壁面上の衝撃波がキャビティ部上流端からキャビティ長さの $2/3$ の場所に位置するように取付けた場合に対応している。

Fig.9.15(b) で示す衝撃波の位置は、Fig.9.15(a) と比べると上流側に移動しているが、これは衝撃波上流で凝縮が生ずると潜熱の放出による圧力上昇をもたらす、その結果として衝撃波への流入マッハ数が減少するためである。その結果、Fig.9.15(a) では衝撃波近傍の境界層には僅かにはく離が生じていたが、Fig.9.15(b) でははく離は確認できず安定した流れ場になることがわかった。また、図中には示していないが、凝縮が生ずると凝縮核は特にバンブ壁側で多く発生し流路間に広く分布するとともに、凝縮により発生した液滴は衝撃波の上流側壁面近傍から急激に増加し下流側へ分布しているのがわかる。

Fig.9.16(a) と (b) は、それぞれ Case 1 で凝縮が生じない場合 ($S_{01}=0$) と生ずる場合 ($S_{01}=0.5$) のマッハ数の等高線図を示す。Fig.9.16(a) より、衝撃波の形状は Γ 型に変化するともに、Fig.9.15(a) の場合と比較し衝撃波は弱くなるのがわかる。Fig.9.16(b) における衝撃波形状は、Fig.9.15 及び Fig.9.16(a) と比較して大きく変化し、複数の衝撃波 (Wavelets) がキャビティ部上流側に生じているのがわかる。また、核生成率と液相の質量比の分布は、Fig.9.15(b) の場合と比較してキャビティ部近傍で大きく変化しているのがわかった。

Fig.9.17(a) と (b) は、それぞれ Case 2 で凝縮が生じない場合 ($S_{01}=0$) と生ずる場合 ($S_{01}=0.5$) のマッハ数の等高線図を示す。Fig.9.17(a) から、衝撃波の形状は Fig.9.16(a) と同様に Γ 型に変化するともに、衝撃波の強さは Fig.9.15(a) と Fig.9.16(a) の場合と比較し弱くなるのがわかる。また、Fig.9.17(b) では、衝撃波 (Wavelets) がキャビティ部下流側に発生するとともに Fig.9.16(b) と比較し

てさらに弱くなり、多孔壁が効果的に作用していることがわかる。

9.2.3 全圧損失の変化

全圧損失分布については、 $x/l=0.30, 0.45, 0.60, 0.75$ にて算出したが、最も傾向が現れていた $x/l=0.30$ を採用して考察する。

Fig.9.18 と Fig.9.19 は、それぞれ Case 1 と Case 2 の場合で、 $x/l=0.30(x=31.8\text{ mm})$ の位置での流路断面上 (y :壁面からの距離) の全圧損失 $(1-p_0/p_{01})$ (p_0 :局所全圧) 分布を示す。Fig.9.18 より、固体壁で凝縮が生ずる場合 (破線) には、凝縮による影響で主流側の損失は凝縮が生じない場合 (実線) と比べ大きくなるが、壁面近傍では境界層のはく離が抑制されるため損失は小さくなっている。一方、多孔壁で凝縮が生じない場合 (一点鎖線) は、衝撃波が弱くなるため固体壁 (実線) に比べ主流側では損失は小さくなるが、壁面近傍では境界層厚さの増大 (粘性損失の増大) により大きくなるのがわかる。さらに、多孔壁で凝縮が生ずる場合の全圧損失 (二点鎖線) は、壁面側では固体壁の場合 (実線) と比較し僅かに大きく、主流側では全圧損失が減少しているのがわかる。

Fig.9.19 では、凝縮の有無に関わらず多孔壁の場合における壁面側での全圧損失は、固体壁で凝縮が生じない場合の全圧損失よりも小さくなっており、Case 1 で凝縮が生ずる場合 (Fig.9.18) と比較して壁面側での損失はより減少することがわかる。

Table9.1 は、固体壁で凝縮が生じない場合の壁面から流路中心位置までの全圧損失の積分値に対する、凝縮の有無に対して得られたその積分値の減少割合を示す。なお、参考のために固体壁で凝縮が生ずる場合の減少割合も示している。表より、Case 1 では凝縮が生ずると減少割合は大きくなるが、固体壁で凝縮が生ずる場合の方がさらに減少割合は大きく、多孔壁の効果としては大きくないことがわかる。一方、Case 2 では両者とも、固体壁で凝縮が生ずる場合と比べ減少割合は大きくなっており、多孔壁で凝縮が生ずる場合が最も大きくなるのがわかる。これらのことから、流れの全圧損失を小さくするためには、流れ場に凝縮を生じさせるとともに多孔壁を適切な場所に設置することが重要であることがわかる。

9.2.4 結論

本節では、円弧パンプモデル上の衝撃波を伴う遷音速流れ場に対する制御法として、キャビティ付多孔壁を利用したパッシブコントロールとモデル曲面上に発生する非平衡凝縮を利用する技術の影響を数値的に示した。その結果、非平衡凝縮とキャビティ付多孔壁を適切に組み合わせることにより、固体壁で凝縮が生じない場合の流れ場の全圧損失を効果的に低減できる可能性を示した。

第10章 結 論

結論については、第7章～第9章の節末で各ケースごとに具体的に示しているが、要約して以下に示す。

1. 本計算手法は、キャビティ付多孔壁、及びスロツティッドノズルを有する流れ場、非平衡凝縮を伴う遷音速流れ場に対して、定性的な傾向を得るのに非常に有効である。
2. キャビティ付多孔壁を有する流れ場のパッシブコントロールは、凝縮衝撃波の強さを効果的に弱めることができ、多孔壁近傍での凝縮開始点は上流側に移動する。また、定常凝縮衝撃波の強さを効果的に弱め、非定常凝縮衝撃波の振動を抑制するためには、キャビティ長さに対して適切な孔の数が存在する。
3. スロツティッドノズルを有する流れ場のパッシブコントロールの場合、適切なコントロールを実現するためには、定常凝縮衝撃波、非定常凝縮衝撃波共に、ある程度のスロット長さが必要である。また非定常凝縮衝撃波に対しては、液相の質量比の増加開始点近傍に上流側スリットを配置することが有効であり、ノズル下流側の乱流エネルギーは、スロット壁で凝縮が生ずる場合がスロット壁で凝縮が生じない場合に比べて小さくなる。
4. 遷音速バンプ流れの場合、初期過飽和度 S_{01} が大きくなると境界層のはく離が抑制され、 S_{01} の増加とともに特に高周波成分が抑制される。また、非平衡凝縮とキャビティ付多孔壁を適切に組み合わせることで、流れ場の全圧損失を効果的に低減できる可能性がある。

謝 辞

佐賀大学大学院工学系研究科瀬戸口俊明教授には、筆者が学部頃から多大な御指導と御鞭撻を賜り、さらに本研究を行うにあたって始終懇切丁寧なる御指導をいただきました。衷心より深く感謝申し上げます。

また、佐賀大学大学院工学系研究科金子賢二教授、瀬戸邦聰教授、松尾繁助教授には、本論文をまとめるにあたって、貴重な御意見、御教示をいただきました。心より感謝いたします。

そして、研究生生活の様々な面で御指導いただいた佐賀大学理工学部機械システム工学科の木上洋一助教授、中野智弘講師、塩見憲正助手、並びに実験装置の製作にあたって御協力いただいた杉町等技官をはじめ機械実習工場の技官の方々に深く御礼申し上げます。

また、社会人として大学院博士後期課程を受験するにあたり御理解をいただきました佐賀県教育委員会、及び佐賀県教育センター所長様をはじめ、本課程への入学時から終始激励してくださった元佐賀県教育センター課長乗田貞麒様に心より感謝の意を表すと共に、実務面で様々な御支援をいただいた佐賀県立塩田工業高等学校の諸先生方に厚く御礼申し上げます。

さらに、研究内容等について昼夜を問わず議論に付き合ってくれた大学院生の山下浩史君、田中征将君をはじめ、研究室であって種々の便宜を与えていただいた佐賀大学理工学部機械システム工学科環境流動システム学講座の皆様に御礼申し上げます。

最後に、3人の子供達と共に常に傍らで力づけてくれた妻の美佐子に心から感謝いたします。

平成 15 年 9 月 1 日

関連図書

- [1] Stodola, A., Steam and Gas Turbine, (1927), McGraw-Hill.
- [2] Oswatitsch, K., Kondensationserscheinungen in Ueberschallduesen, Z. angew. Math. Mech., 22(1942), 1-14.
- [3] Wegener, P. P., Water Vapor Condensation Process in Supersonic Nozzle, J. Appl. Phys., 25-12(1954), 1485-1491.
- [4] Hill, P. G., Condensation of water vapor during supersonic expansion in nozzle, J. Fluid Mech., 25-3(1966), 593-620.
- [5] P. P. Wegener, Acta mechanica, 21(1975), 65.
- [6] Wegener, P. P. and Mach, L. M., Condensation in Supersonic and Hypersonic Wind Tunnels, Adv. in Appl. Mech., 5(1958), 307-447, Academic Press.
- [7] Wegener, P. P. and Pouring, A. A., Experiments on Condensation of Water Vapour by Homogeneous Nucleation in Nozzles, Phys. Fluid, 7-3(1964), 352-361.
- [8] Pouring, A. A., Thermal Choking and Condensation in Nozzles, Phys. Fluid, 8-10(1965), 1802-181.
- [9] Volmer, M., Kinetik der Phasenbildung, (1945), Edwards Brothers.
- [10] Frenkel, J., Kinetic Theory of Liquids, (1946), Oxford University Press.
- [11] Abraham, F. F., On the time-Dependent Structure of Currents in Non-Steady-State Nucleation Kinetics, J. Chem. Phys., 54-9(1971), 3874-3875.
- [12] Abraham, F. F. and Dave, J. V., Thermodynamics of Microcrystallites and Its Relation to Nucleation Theory, J. Chem. Phys., 55-4(1971), 4817-4821.
- [13] Katz, J. L., Condensation of a Supersaturated Vapor. I. The Homogeneous Nucleation on the n-Alkanes, J. Chem. Phys., 52-9(1970), 4733-4748.
- [14] Dorfeld, W. G. and Hudson, J. B., Condensation in CO₂ Free Jet Expansions. I. Dimer Formation, J. Chem. Phys., 59-3(1973), 1253-1260.
- [15] Schmidt, B., Jahrbuch WGLR, (1962), 160.
- [16] Zierep, J. and Lin, S., Bestimmung des Kondensationsbeginns bei Entspannung feuchter Luft in Ueberschallduesen, Forsh. Ing.-Wes., 33(1967), 169-172.
- [17] Wegener, P. P. and Cagliostro, D. J., Combustion Science and Technology, 6(1973), 269-277.

- [18] 松尾・他3名,凝縮を伴うラバルノズルの振動(第1報),機論,50-437,B(1983),108-114.
- [19] 松尾・他3名,凝縮を伴うラバルノズルの振動(第2報),機論,50-453,B(1984),2577-2582.
- [20] Barschdorff, D. and Fillipov, G. A., Heat Transfer-Societ Research, 2-5(1970), 76-87.
- [21] Saltanov, G. A. and Tkalenko, R. A., J. Appl. Mech. Tech. Phys., 16-6(1975), 875-878.
- [22] White, A. J. and Young, J. B., J. Propulsion Power, 9(1993), 579-587.
- [23] Adam, S. and Schnerr, G. H., Instabilities and bifurcation of non-equilibrium two-phase flows, J. Fluid Mech., 348(1997), 1-28.
- [24] Zierep, J., Stroemungen mit Energiezufuhr, 2(1990), Aufl., G. Braun, Karlsruhe.
- [25] Schnerr, G. H., Homogene Kondensation in Stationaeren Transsonischen Stroemungen durch Laval-duesen und um Profile, (1986), Hab. schrift, Universitaet Karlsruhe.
- [26] Schnerr, G. H. and Dohrmann, U., Transonic Flow Around Airfoils wiht Relaxation and Energy Supply by Homogeneous Condensation, AIAA J., 28-7(1990), 1187-1193.
- [27] Young, J. B., Nonequilibrium wet-steam calculations for nozzles and turbin cascades, J. Turbomachinery, 114(1992), 569-579.
- [28] Matsuo, K., Kawagoe, S., Setoguchi, T. and Sonoda, K., Condensation Shock and Examples, Machine Study, 36-1(1984), 73.
- [29] Matsuo, K., Kawagoe, S., Sonoda, K. and Sakao, T., Study on Condensation Shock Waves (Part 1, Mechanism of their Formation), Bull. JSME, 28-241(1985), 1416.
- [30] Matsuo, K., Kawagoe, S., Sonoda, K., Kwon, S. B., Yamamoto, H. and Sugiyama, E., Studies of Condensation Shocks (2nd Report, Relation between Condensation Shock Wave and Condensation Zone), Bull. JSME, 29-248(1986), 439.
- [31] 河田・森, 衝撃波管による凝縮の動力学の研究, 機論, 38-315, 第二部 (1972), 2843-2852.
- [32] Bahi, L., Ph.D. Thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, (1982).
- [33] Ross, J. M., MS. Thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, (1982).
- [34] Raghunathan, S. et al., Passive Shockwave Boundary Layer Control Experiments on a Circular Arc Model, AIAA-86-0285(1985).
- [35] Mitty, T. et al., Oscillatory Flow Field Simulation in a Blow-Down Wind Tunnel and the Passive Shock Wave / Boundary Layer Control Concept, AIAA-89-0214(1989), 27th Aerospace Sciences Meeting.
- [36] Savu, S. et al., Proc. of 14th Intern. Synp. on Shock Tubes & Waves, (1983), 92.
- [37] Thiede, P. et al., AGARD-CP-365(1984).
- [38] Raghunathan, S. et al., AIAA-90-0046(1990).
- [39] Bahi, L., Ross, J. M. and Nagamatsu, H. T., Passive Shock Wave / Boundary Layer Control for Transonic Airfoil Drag Reducation, AIAA-83-0137 (1983).

- [40] Raghunathan , S . , Prog . Aerospace Sci . , 25(1988) , 271-296 .
- [41] 斎田・富塚 , 平成 12 年度衝撃波シンポジウム講演論文集 , (2000) , 21-24.
- [42] Raghunathan, S., et al., AIAA-99-3196(1999).
- [43] O 'Rourke, M. J., et al., AIAA-2001-3028(2001).
- [44] Wilcox,F.J.,Passive Venting System for Modeifying Cavity Flowfields at Supersonic Speeds ,AIAA J., 26-3(1988),374-376.
- [45] 奥井英貴・他 3 名, 擬似衝撃波のパッシブコントロール, 機論, 65-632,B(1999),1192-1199.
- [46] 奥井英貴・他 3 名, 多孔壁およびバイパスをもつ直管内の擬似衝撃波, 機論, 65-633,B(1999),1542-1550.
- [47] Gyarmathy, G., Two-Phase Flow in Turbines and Separators”, edited by Moor, M. J. and Sieverding, C. H., (1976), 127, McGraw-Hill.
- [48] Kwon, S. B., Matsuo, K., Kawagoe, S., Setoguchi, T., Noda, S. and Matsuo, S., Effects of Condensing Flow on an Oblique Shock Wave in a Supersonic Nozzle, Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., 54-500(1988), 798.
- [49] 松尾・他 5 名 , 機論 , 50-466 , B(1985) , 1952-1956 .
- [50] Setoguchi , T . , Nakakno , T . , Tominaga , T . , Nishi , M . and Kaneko , K . , Proc . of International Conference on Fluid and Thermal Energy Conversion , (1994) , 197-202 .
- [51] 瀬戸口・他 3 名 , 機講論 , 938-1(1993) , 172-175 .
- [52] Yee , H . C . , NASA TM - 89464(1989) .
- [53] Sislian, J. P., Condensation of Water Vapor with or without a Carrier Gas in a Shock Tube, UTIAS Rep., 201(1975).
- [54] Wegener , P . P . and Wu , B . , Nucleation Phenomena , (1977) , 325 .
- [55] 松尾・他 3 名 , 機講論 , No.008-1(2000),35-36 .
- [56] Yee , H . C . , NASA TM-89464(1989) .
- [57] 松尾・他 3 名 , 機論 , 67-660, B (2001),1952-1959.
- [58] Matsuo, S., et al., J. of Thermal Science, 9-4(2000), 293-298.
- [59] Setoguchi, T., et al., J. of Thermal Science, 9-4(2000), 299-304.
- [60] 島本・他 3 名 , 機論 , 67-664, B(2001), 3047-3053.
- [61] Adam, S., Dissertation, Fakultat fur Maschinenbau, Universitat Karlsruhe (TH), Germany (1999).
- [62] Setoguchi, T., et al., J. of Thermal Science, 6-2(1997), 90-96.
- [63] Jaeshke, M., et a., J. of Sound Vibration, 43-3(1975), 467- 481.

- [64] 松尾一泰, 川越茂敏, 園田圭介, 坂尾謙次, 凝縮衝撃波に関する研究, 機論 (B), Vol.50, No.459 (1984), pp.2577-2582.
- [65] 入屋明広, 山本悟, 大宮司久明, 湿度を考慮した遷音速粘性流れの数値解法, 機論 (B), Vol.62, No.603 (1996), pp. 3854-3859.
- [66] 瀬戸口俊明, Raghunathan, S., 衝撃波を伴う流れ場における境界層のパッシブコントロール (1), 機械の研究, Vol.43, No.4 (1991), pp. 463-468.
- [67] Matsuo, S., Zeutzius, M., Setoguchi, T. and Kaneko, Investigation of Supersonic Cavity Flow with Pressure Oscillation, K., Proc. of Int. Conf. on Fluid Eng., Vol.3 (1997), pp. 1473-1478.
- [68] Farge, M., Wavelet Transforms and Their Applications to Turbulence Annu. Rev. Fluid Mech., Vol.24 (1992), pp. 395-457.
- [69] Matsuo, S., Setoguchi, T., Yu, S. and Hirahara, H., Effect of Nonequilibrium Condensation of Moist Air on the Boundary Layer in a Supersonic Nozzle, Journal of Thermal Science, Vol.6, No.4(1997), pp.260-272.
- [70] Yee, H. C, A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock-Capturing Methods, NASA TM 89464(1989).
- [71] 権純範, 松尾一泰, 川越茂敏, 松尾繁, 凝縮を伴うラバルノズル流れの全圧損失, 機論 (B), Vol.53, No.489 (1987), pp.1516-1520.
- [72] Sugawara, M. and Oshima, N., Analysis of Condensation in Supersonic Nozzles, Proc. of 12th Int. Symp. on Combustion, (1968), pp.1193-1201.
- [73] Yee, H. C, NASA TM, A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock-Capturing Methods, 101088(1989), 68-72.
- [74] Baldwin, B.S. and Lomax, H., Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows, AIAA- 78-257 (1978), 16th Aerospace Sciences Meeting.
- [75] 松尾一泰・他 3 名, 凝縮衝撃波の理論と実例 (1), 機械の研究, 36-1(1984), 73-78.
- [76] 松尾一泰, 圧縮性流体力学, (1994), 理工学社.
- [77] 松尾一泰・他 3 名, 凝縮衝撃波の理論と実例 (6), 機械の研究, 36-6(1984), 754-758.
- [78] 中間健二郎, 湿り空気の非平衡凝縮が湿り空気に及ぼす影響, 佐賀大学大学院修士論文, (1997).
- [79] 松尾一泰・他 3 名, 凝縮衝撃波の理論と実例 (3), 機械の研究, 36-3(1984), 425-429.
- [80] 山下圭一, 凝縮を伴う圧縮性粘性流れの実在気体効果と振動緩和を考慮した数値解析, 埼玉大学大学院修士論文, (1993).
- [81] Abraham, F.F., Homogeneous Nucleation Theory, Academic Press, (1974).
- [82] Tolman, R.C., The Effect of Droplet Size on Surface Tension., J. Chem. Phys., 17-3(1949).
- [83] Wegener, P. P. and Wu, B., Nucleation Phenomena, edited by Zettlemoyer, A.C., (1977), 325, ELSEVIER.

- [84] Kirkwood, J. G. and Buff, F. P., The Statistical Mechanical Theory of Surface Tension, J. Chem. Phys., 17(1949), 338-343.
- [85] Oriani, R. A. and Sundquist, B. E., Emendations to Nucleation Theory and the Homogeneous Nucleation of Water from the Vapor, J. Chem. Phys., 38(1963), 2082-2089.
- [86] Mills, A. F. and Seban, R. A., The Condensation Coefficient of Water, Int. J. Heat Mass Transf., 10(1967), 1815-1827.
- [87] Pound, G. M., Select Values of Critical Supersaturation for Nucleation of Liquids from the Vapor, J. Phys. Chem. Ref. Data, 1-1(1972), 119-133.
- [88] Sislian, J. P., Condensation of Water Vapor with or without a Carrier Gas in a Shock Tube, UTIAS Rep., 201(1975).
- [89] 相原利雄, 伝熱工学, (1994), 271-273.
- [90] 渡辺・他2名, 水の表面張力および水と水蒸気の熱伝導率の国際骨組表, 機誌, 81-720(1978), 1182-1188.
- [91] Gyarmathy, G., Kondensationsstob-Diagramme für Wasserdampfströmungen, Forsch. Ing. Wes., Bd.29(1963), 105-114.
- [92] 佐藤, 日本海水学会誌, 飽和水および飽和蒸気の状態量の簡易表示式, 28-3(1974), 182-190.
- [93] Wegener, P. P., Nonequilibrium Flow, Part 1, (1969), 163, Marcel Dekker.
- [94] Young, J. B., The sponfaneous condensation of steam in supersonic nozzle, PCH Physico Chemical Hydrodynamics, 3-1(1982), 57-82.
- [95] 近藤次郎, 高速空気力学, (1977), コロナ社.
- [96] Mundinger, G., Numerische Simulation instatinärer Lavaldüsenströmungen mit Energiezufuhr durch homogene Kondensation, Karlsruhe Univ. (1994).
- [97] 松尾繁, 超音速内部流動に及ぼす凝縮の影響に関する研究, 九州大学大学院総合理工学研究科博士論文, (1988).
- [98] Steger, J. L., Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about Arbitrary Two-Dimension Geometries, AIAA J., 16-7(1978), 679-686.
- [99] 荒川忠一, 数値流体工学, (1994), 東京大学出版.
- [100] 藤井孝蔵, 流体力学の数値計算法, (1994), 東京大学出版, 124.
- [101] 日野幹雄, 流体力学, (1992), 朝倉書店.
- [102] 数値流体力学編集委員会編, 圧縮性流体解析, (1995), 東京大学出版会.
- [103] 数値流体力学編集委員会編, 乱流解析, (1995), 東京大学出版会.
- [104] Kunz, R. F. and Lakshminaraya, B., Explicit Navier-Stokes Computation of Cascade Flow Using the $k-\epsilon$, AIAA J., 30(1992), 13-21.
- [105] 吉澤徹, 乱流モデルと圧縮性, 日本航空宇宙学会誌, 41-470(1993), 2-8.

- [106] 大宮司久明・山本悟, 反変速度成分の圧縮性ナビエ・ストークス方程式の陰的時間進行法, 航空宇宙技術研究所特別資料, 9, (1988),77-83.
- [107] 大宮司久明・三宅裕・吉澤徹, 乱流の数値流体力学 モデルと計算法,(1998), 東京大学出版会,136,137,436,439-441.
- [108] 梶島岳夫, 乱流の数値シミュレーション,(1999), 養賢堂,162-165.
- [109] 棚橋隆彦, CDF 数値流体力学,(1993), アイピーシー,647-738.
- [110] Hirsch,C., Numerical Computation of Internal and External Flows, 1, (1998), A Wiley-Interscience Publication.
- [111] Yee,H.C., A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock-Capturing Methods, NASA TM 101088, (1989).
- [112] Hirsch,C., Numerical Computation of Internal and External Flows, 2, (1998), A Wiley-Interscience Publication.
- [113] Chakravarthy,S.R., Stanly Osher, A New Class of High Accuracy TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, AIAA-85-036 (1985), 23rd Aerospace Sciences Meeting.
- [114] Tulapurkara,E.G., Turbulence Models for the Computation of Flow Past Airplanes, Prog.Aerospace Sci., 33 (1997),71-165.
- [115] Lin,H. and Chieng,C.-C., Comparisons of TVD Schemes for Turbulent Transonic Projectile Aerodynamics Computations with a Two-Equation Model of Turbulence, Int. J. Numer. Methods in Fluids, 16 (1993), 365-390.
- [116] Chien,K.Y., Predictions of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model, AIAA J., 20 (1982),33-38.
- [117] Pulliam,T.H. and Chaussee,D.S., A Diagonal Form of an Implicit Approximate-Factorization Algorithm, J. Comp. Phys., 39 (1981), 347-363.
- [118] Goldberg,U.C., Toward a Pointwise Turbulence Model for Wall-Bounded and Free Shear Flows, Trans.ASME J. Fluids Eng.,116 (1994),72-76.
- [119] Goldberg,U.C., Exploring a Three-Equation R-k- ϵ Turbulence Model, Trans. ASME J. Fluids Eng., Vol. 118 (1996),795-799.
- [120] 和田安弘・小川哲・新井紀夫, 風上差分法による鈍頭物体まわりの超音速流れの解析, 航空宇宙技術研究所, TR-1025, (1989).

Appendix

付録 A

A.1 リーマン境界条件

数値解法において上流境界が十分物体から上流にある場合は，境界を一様流の値に固定しても解への影響は小さく無視することが出来る．しかしながら，無限遠方まで計算領域にとることが困難な場合が多く，境界を物体近くに置かざるを得ない．このような場合に使用される境界条件の1つとしてリーマン境界条件がある．

この境界条件は，特性理論を境界に適用し，特性曲線に沿って保存されるリーマン不変量を用いて境界の値を決定するものである．

リーマン境界条件では，流れを境界の法線方向に局所的に等エントロピー流れ1次近似し，上流からのリーマン不変量を R^+ ，下流からのリーマン不変量を R^- そして境界に対する法線方向速度を u とすると，

$$\text{前進波の特性曲線 } (u + a) \text{ に沿って} \quad R^+ = u + \frac{2a}{\gamma - 1} = \text{const}$$

$$\text{後進波の特性曲線 } (u - a) \text{ に沿って} \quad R^- = u - \frac{2a}{\gamma - 1} = \text{const}$$

となる．この不変量 R^+ と R^- を利用し境界の法線方向速度 u と音速 a を求める．

$$u = \frac{1}{2}(R^+ + R^-)$$

$$a = \frac{\gamma - 1}{4}(R^+ - R^-)$$

そして，求めた境界の法線方向速度 u と音速 a から他の境界値を決定する．

入口境界

入口境界では，法線方向を上流から下流の方向とする．したがって，無限上流からのリーマン不変量 R_∞^+ と計算内部からの上流に遡るリーマン不変量 R_{in}^- は，

$$R_\infty^+ = u_\infty + \frac{2a_\infty}{\gamma - 1}$$

$$R_{\text{in}}^- = u_{\text{in}} - \frac{2a_{\text{in}}}{\gamma - 1}$$

となり，入口境界の法線方向速度 u と音速 a は，次のようになる．

$$u_{\text{inlet}} = \frac{1}{2}(R_\infty^+ + R_{\text{in}}^-)$$

$$a_{\text{inlet}} = \frac{\gamma - 1}{4}(R_\infty^+ - R_{\text{in}}^-)$$

出口境界

出口境界では，法線方向を下流から上流の方向とする．したがって，無限下流からのリーマン不変量 R_{∞}^+ と計算内部からの下流に至るリーマン不変量 R_{in}^- は，

$$R_{\infty}^+ = -|u_{\infty}| + \frac{2a_{\infty}}{\gamma - 1}$$

$$R_{\text{in}}^- = -|u_{\text{in}}| - \frac{2a_{\text{in}}}{\gamma - 1}$$

となり，出口境界の法線方向速度 u と音速 a は，次のようになる．

$$u_{\text{outlet}} = \frac{1}{2}(R_{\infty}^+ + R_{\text{in}}^-)$$

$$a_{\text{outlet}} = \frac{\gamma - 1}{4}(R_{\infty}^+ - R_{\text{in}}^-)$$

付録B

B.1 凝縮に関する諸式

本研究では、凝縮に関する諸式として、従来の式にあわせて Schnerr らが使用した式⁽²⁶⁾⁽²⁵⁾⁽⁹⁶⁾を採用した。そこで本節ではそれらについてプログラムと対応させて説明する。なお従来の式というのは、凝縮に関する諸係数を用いた式のことをさす。

B.1.1 従来の式

まず始めに、圧力、湿り空気の潜熱および温度を算出する。粘性を考慮する場合 (N-S 方程式) は SUBROUTINE LOMAX の頭で行い、粘性を無視する場合 (オイラー方程式) の場合は、SUBROUTINE OPERATIONH, SUBROUTINE OPERATIONG の頭で計算を行う。なお、以下の説明は N-S 方程式の場合に関して行う。

[SUBROUTINE LOMAX]

湿り空気の潜熱を算出する。ただし、式中の圧力は、有次元で算出し、その後無次元化を行う。

$$\bar{p} = p \cdot \bar{p}_0 \gamma \quad (\text{有次元化})$$

$$\bar{L} = 2.353 \times 10^6 - 5.72 \times 10^4 (\ln \bar{p} - 10) - 4.60 \times 10^3 (\ln \bar{p} - 10)^2 \quad (\text{B.1})$$

$$L = \frac{\bar{L}}{\bar{a}_0^2} = \frac{\bar{L}}{\gamma \mathfrak{R}_m T_0} \quad (\text{無次元化})$$

この潜熱も考慮した内部エネルギーを求め、圧力を求める。使用する G は、

$$G = \left(1 - g \frac{M_m}{M_v}\right) / \left(\frac{1}{\gamma_0 - 1} + g \frac{M_m}{M_v}\right) \quad (\text{B.2})$$

単位体積当たりの内部エネルギーは、

$$e = E_s - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) + \rho g L$$

よって圧力は、

$$p = G \left\{ E_s - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) + \rho g L \right\}$$

そして、温度は、

$$T = \frac{p \gamma}{\rho (1 - g)}$$

[SUBROUTINE OPETRATIONH(G)]

ここでも、有次元計算する。

$$\bar{p} = p \cdot \bar{p}_0 \gamma \quad (\text{有次元化})$$

$$\bar{T} = T \cdot \bar{T}_0 \quad (\text{有次元化})$$

これより，全て有次元での計算を行う．煩雑となる為，有次元を示すは記述しない．
まずは始めに，水蒸気の圧力は，

$$p_v = \left\{ \left(\frac{\omega_0 - g}{M_v} \right) / \left(\frac{1 - \omega_0}{M_a} + \frac{\omega_0 - g}{M_v} \right) \right\} p \quad (\text{B.3})$$

水蒸気の飽和蒸気圧

$$p_s = 10^{(-A/T+B)} \times 101325 \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{cases} A = 2263, B = 6.064 & (T = 273 \sim 395K) \\ A = 2672, B = 7.582 & (T = 175 \sim 273K) \end{cases}$$

過飽和度

$$S = \frac{p_v}{p_s} \quad (\text{B.5})$$

$S > 1$ のとき，次の計算が行われる．

湿り空気の無限平面における表面張力

$$\sigma_\infty = (128 - 0.192T) \times 10^{-3} \quad (\text{B.6})$$

湿り空気の表面張力

$$\sigma = \zeta \sigma_\infty \quad (\text{B.7})$$

臨界クラスター半径

$$r_c = \frac{2\sigma}{\rho_l \mathfrak{R}_v T \ln(p_v/p_s)} \quad (\text{B.8})$$

Frenkel の核生成速度

$$I_F = \frac{1}{\rho_l} \sqrt{\frac{2m_v \sigma}{\pi}} \left(\frac{p_v}{kT} \right)^2 \exp \left\{ \frac{-4\pi r_c^2 \sigma}{3kT} \right\} \cdot \Gamma \quad (\text{B.9})$$

核成長速度

$$\frac{dr}{dt} = \xi_c \frac{p_s \left(\frac{p_v}{p_s} - 1 \right)}{\rho_l \sqrt{2\pi} \mathfrak{R}_v T} \quad (\text{B.10})$$

ここまですべて有次元計算．無次元化を行う為に，各式の最後で \bar{L} や \bar{a}_0 を持ちいて無次元化を行っている．

凝縮速度

$$\frac{dg}{dt} = 4\pi \rho_l \left[\frac{I(t)}{\rho_m(t)} \frac{r_c^3(t)}{3} + \frac{dr}{dt} \int_{t_i}^t \left\{ \frac{I(\tau)}{\rho_m(\tau)} \left(r_c(\tau) + \int_\tau^t \frac{dr}{dt} \cdot d\theta \right)^2 \right\} d\tau \right] \cdot \frac{\bar{L}}{\bar{a}_0} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\rho_l}{\rho_m} \left\{ \frac{4\pi}{3} r_c^3 I + \rho_m D_1 \frac{dr}{dt} \right\} \cdot \frac{\bar{L}}{\bar{a}_0} \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{D_1}{dt} = \left(\frac{4\pi r_c^2 I}{\rho_m} + D_2 \frac{dr}{dt} \right) \cdot \frac{\bar{L}^2}{\bar{a}_0} \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{D_2}{dt} = \left(\frac{8\pi r_c I}{\rho_m} + D_3 \frac{dr}{dt} \right) \cdot \frac{\bar{L}^3}{\bar{a}_0} \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{D_3}{dt} = \left(\frac{8\pi I}{\rho_m} \right) \cdot \frac{\bar{L}^4}{\bar{a}_0} \quad (\text{B.15})$$

$S > 1$ 以外の時，次の計算が行われる．

$$\frac{dg}{dt} = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{dg}{dt} = 0 \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{dD_1}{dt} = 0 \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{dD_2}{dt} = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{dD_3}{dt} = 0 \quad (\text{B.20})$$

B.1.2 Schnerr らが使用した式

この場合も，従来の式と同様まず始めに，圧力，湿り空気の潜熱および温度を算出する．粘性を考慮する場合 (N-S 方程式) は SUBROUTINE LOMAX の頭で行い，粘性を無視する場合 (オイラー方程式) の場合は，SUBROUTINE OPERATIONH，SUBROUTINE OPERATIONG の頭で計算を行う．なお，以下の説明は N-S 方程式の場合に関して行う．

[SUBROUTINE LOMAX]

湿り空気の潜熱を算出する．ただし，式中の圧力は，有次元で算出し，その後無次元化を行う．

$$\bar{p} = p \cdot \bar{p}_0 \gamma \quad (\text{有次元化})$$

$$L(T) = L_0 + L_1 T \quad (\text{B.21})$$

ここで諸係数は各々，

$$L_0 = 3105913.39$$

$$L_1 = -2212.97 \times 10^{-2}$$

である．

$$L = \frac{\bar{L}}{a_0^2} = \frac{\bar{L}}{\gamma \mathfrak{R}_m T_0} \quad (\text{無次元化}) \quad (\text{B.22})$$

この潜熱も考慮した内部エネルギーを求め，圧力を求める．使用する G は，

$$G = \left(1 - g \frac{M_m}{M_v}\right) / \left(\frac{1}{\gamma_0 - 1} + g \frac{M_m}{M_v}\right) \quad (\text{B.23})$$

単位体積当たりの内部エネルギーは，

$$e = E_s - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) + \rho g L$$

よって圧力は，

$$p = G \left\{ E_s - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) + \rho g L \right\}$$

そして、温度は、

$$T = \frac{p\gamma}{\rho(1-g)}$$

[SUBROUTINE OPETRATIONH(G)]

ここでも、有次元計算する。

$$\bar{p} = p \cdot \bar{p}_0 \gamma \quad (\text{有次元化})$$

$$\bar{T} = T \cdot \bar{T}_0 \quad (\text{有次元化})$$

$$\bar{t} = \bar{T} - 273.15 \quad (\text{セ氏温度})$$

これより、全て有次元での計算を行う。煩雑となる為、有次元を示すは記述しない。
液相密度

$$\rho_l(T) = \begin{cases} (A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + A_4 t^4 + A_5 t^5)/(1 + B_0 t) & (T \geq 0[^\circ\text{C}]) \\ (A_6 + A_7 t + A_8 t^2) & (T < 0[^\circ\text{C}]) \end{cases} \quad (\text{B.24})$$

ここで、t はセ氏温度であることに注意。また係数は各々、

$$\begin{aligned} A_0 &= 999.8396 & A_5 &= -393.2952 \times 10^{-12} \\ A_1 &= 18.224944 & A_6 &= 999.84 \\ A_2 &= -7.92221 \times 10^{-3} & A_7 &= 0.086 \\ A_3 &= -55.44846 \times 10^{-6} & A_8 &= -0.0108 \\ A_4 &= 149.7562 \times 10^{-9} & B_0 &= 18.159725 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

である。

水蒸気分圧

$$p_v = \left\{ \left(\frac{\omega_0 - g}{M_v} \right) / \left(\frac{1 - \omega_0}{M_a} + \frac{\omega_0 - g}{M_v} \right) \right\} p \quad (\text{B.25})$$

液滴平面の平衡状態における飽和蒸気圧力

$$p_{s,\infty}(T) = \exp(A_9 + A_{10}T + A_{11}T^2 + B_1 \ln(T) + \frac{C_0}{T}) \quad (\text{B.26})$$

ここで各係数は、

$$\begin{aligned} A_9 &= 21.215 \\ A_{10} &= -2.7246 \times 10^{-2} \\ A_{11} &= 1.6853 \times 10^{-5} \\ B_1 &= 2.4576 \\ C_0 &= -6094.4642 \end{aligned}$$

である。

過飽和度

$$S = \frac{p_v}{p_s} \quad (\text{B.27})$$

湿り空気の無限平面における表面張力

$$\sigma_{\infty}(T) = \begin{cases} \{76.1 + 0.155 \times (273.15 - T)\} \times 10^{-3} & (T \geq 249.39[K]) \\ \{(1.1313 - 3.7091 \times 10^{-3} \times T) \times 10^{-4} - 5.6464\} \times 10^{-6} & (T < 249.39[K]) \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

臨界クラスター半径

$$r_c = \frac{2\sigma_{\infty}}{\rho_l \mathfrak{R}_v T \ln(p_v/p_{s,\infty})} \quad (\text{B.29})$$

Frenkel の核生成速度

$$I_F = \frac{1}{\rho_l} \sqrt{\frac{2m_v \sigma_{\infty}}{\pi}} \left(\frac{p_v}{kT}\right)^2 \exp\left\{\frac{-4\pi r_c^2 \sigma_{\infty}}{3kT}\right\} \quad (\text{B.30})$$

液滴平均半径

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{2D_1}{D_3}} \quad (\text{B.31})$$

ただし， $D_3 = 0$ の時は分母が 0 となるので，この場合は $\bar{r} = r_c$ として考えた．また，平均半径の値が微小オーダ ($10^{-120} \sim -130$) の場合となると，後の計算において不都合が生じるので，今回の計算では r_c よりも小さな平均半径の値が算出された時は $\bar{r} = r_c$ と考えた．

液滴半径 r の水蒸気の飽和蒸気圧

$$p_{s,r} = p_{s,\infty} \exp\left(\frac{2\sigma_{\infty}}{\rho_l \mathfrak{R}_v T r}\right) \quad (\text{B.32})$$

ただし，この式における液滴半径は \bar{r} である．

核成長速度

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{p_v - p_{s,r}}{\rho_l \sqrt{2\pi} \mathfrak{R}_v T} \quad (\text{B.33})$$

ここですべて有次元計算．無次元化を行う為に，各式の最後で \bar{L} や \bar{a}_0 を持ちいて無次元化を行っている．

凝縮速度

$$\frac{dg}{dt} = 4\pi\rho_l \left[\frac{I(t)}{\rho_m(t)} \frac{r_c^3(t)}{3} + \frac{d\bar{r}}{dt} \int_{t_i}^t \left\{ \frac{I(\tau)}{\rho_m(\tau)} \left(r_c(\tau) + \int_{\tau}^t \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot d\theta \right)^2 \right\} d\tau \right] \cdot \frac{\bar{L}}{\bar{a}_0} \quad (\text{B.34})$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\rho_l}{\rho_m} \left\{ \frac{4\pi}{3} r_c^3 I + \rho_m D_1 \frac{d\bar{r}}{dt} \right\} \cdot \frac{\bar{L}}{\bar{a}_0} \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{D_1}{dt} = \left(\frac{4\pi r_c^2 I}{\rho_m} + D_2 \frac{d\bar{r}}{dt} \right) \cdot \frac{\bar{L}^2}{\bar{a}_0} \quad (\text{B.36})$$

$$\frac{D_2}{dt} = \left(\frac{8\pi r_c I}{\rho_m} + D_3 \frac{d\bar{r}}{dt} \right) \cdot \frac{\bar{L}^3}{\bar{a}_0} \quad (\text{B.37})$$

$$\frac{D_3}{dt} = \left(\frac{8\pi I}{\rho_m} \right) \cdot \frac{\bar{L}^4}{\bar{a}_0} \quad (\text{B.38})$$

$S > 1$ 以外の時, 次の計算が行われる.

$$\frac{dg}{dt} = 0 \quad (\text{B.39})$$

$$\frac{dg}{dt} = 0 \quad (\text{B.40})$$

$$\frac{dD_1}{dt} = 0 \quad (\text{B.41})$$

$$\frac{dD_2}{dt} = 0 \quad (\text{B.42})$$

$$\frac{dD_3}{dt} = 0 \quad (\text{B.43})$$

付録C

C.1 ウェーブレット解析

近年、信号解析の手法として、連続および離散ウェーブレット変換が使われるようになってきている^{(1)~(2)}。非定常なデータの解析手法として、従来からフーリエ解析 (FFT: 高速フーリエ変換) が行われているが、この手法では周波数軸情報のみが得られ、時間軸に関する情報が得られないという欠点がある。また、時間周波数解析において使われている方法に短時間フーリエ変換 (STFT) やウィグナー分布がある。STFT においては、周波数と時間の分解能を同時に上げることはできず、またウィグナー分布では、分解能は高いがクロス項の発生などにより、得られた結果の解釈に困難さが伴う場合がある。しかしながら、連続ウェーブレット変換は、時間と周波数の分解能が比較的良好で、得られた結果から現象の解析が容易であるなどの理由のため、現在、その利用が多分野で検討されている。

ウェーブレット解析 (時間-周波数解析、正確には時間-スケール解析) とは、1980 年初頭から急速に進歩した分野である。1982 年頃に石油探査技師の Morlet らが、石油資源探査のため、人工地震の反射波に含まれる不連続性の検出にウェーブレット解析を用いたことから、その実用性が注目されるようになった。その後フランスを中心として、数学的基礎が固められた。理工学的応用に関してはまだ試行段階のものが多い。

C.1.1 ウェーブレット解析の応用

時系列や音響・画像データの解析、情報通信への応用、物理探査、地震動解析、非破壊検査、乱流理論、素粒子物理

C.1.2 ウェーブレット解析の特徴

従来から、信号 (時系列データ) の周波数解析にはフーリエ変換が用いられている。しかし、フーリエ変換では、データを周波数空間でフーリエスペクトルの形で表しているのが普通で、データ自身の時間情報ははっきりとは表現されない。例えば非定常信号、過渡信号や異常信号等の時間周波数解析にはフーリエ変換は適さず、他の手法を用いることになる。そこで、ウェーブレット変換の特徴として次の 2 点が挙げられる。

- (1) 信号中にさまざまなスケールで起こっている現象を、それぞれのスケールごとに元の時間軸情報を失わずに抽出して眺めることができる。
- (2) 関数のもつ特異性 (不連続性や導関数の不連続性) の位置を特定できるスペクトル解析である。
<参考> フーリエ変換: 時間領域における波形情報を、周波数領域に移し変えるための数学的手法。フーリエスペクトルの欠点は、現象の生起した時刻 (場所) に関する情報がまったく欠落してしまうことである。

C.1.3 ウェーブレット

ウェーブレット (ψ , wavelet) は、三角関数や対数関数のような決まった関数ではなく、局在する波を表すさまざまな関数の総称である。例えば、Fig.C.1 で示すような関数である。

(例)

- ・ガボールのウェーブレット, Grossman-Moley のウェーブレット, Mexican hat ウェーブレット, French hat ウェーブレット
- ・Haar のウェーブレット, Meyer のウェーブレット, Daubechies のウェーブレット

C.1.4 ウェーブレット変換の定義式

ウェーブレット変換には、連続ウェーブレット変換と離散ウェーブレット変換がある。

連続ウェーブレット変換 (信号の性質を知るのに便利)

非定常信号に対して連続ウェーブレット変換を行うことで、時間情報と周波数情報が同時に得ることができ、現象の生起時刻の情報を容易に扱うことができる。また、必要な情報は、マザーウェーブレット (アナライジングウェーブレット) の特性をうまく使うことによって、選択的に得ることが可能である。

・スケール変換とシフト変換のパラメータを連続的に変化させることによって、信号のある特定の時間における周波数の変化を連続的にとらえる方法である。

・アドミッシブル条件を満たす関数ならば、どんな関数でもマザーウェーブレットとして使用可能である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi dx = 0 \quad (C.1)$$

この式は、 ψ が振動的であることを意味している。ここで、時系列信号 $f(x)$ の連続ウェーブレット変換は次式となる。

$$(W_{\psi} f)(b, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) f(x) dx \quad (C.2)$$

ここで、 $(W_{\psi} f)(b, a)$ をウェーブレット係数、 $\psi(x)$ をマザーウェーブレット (アナライジングウェーブレット) という。よって、切り出す部分を作るためには、ウェーブレット $\psi(x)$ の変数 x を $(x-b)/a$ と置き換えて、 $\psi((x-b)/a)$ が信号の局所的な様子を表すように実数 a と b を選べばよい。このようにウェーブレットは信号を切り出すときの単位として使うものである。ここで、式中の記号 a, b は次のようになる。

- ・ a (スケールパラメータ, dilatation) :

時間軸上での幅を表すパラメータであり、これを変化させることにより、信号中のさまざまなスケールの変動を抽出できる (Fig.C.1)。小さな a の値を持つ $\psi(x)$ は $f(x)$ の変動成分のうち小さなスケールのものと大きな相関を持ち、大きな a の値に対してはスケールの大きな変動との相関が強くなる。

- ・ b (シフトパラメータ, translation) :

時間軸上のパラメータで、これを増加させるに伴いウェーブレットは解析対象とする時系列信号の時間軸に沿って平行移動する。これにより、信号中の時間軸情報を失うことなく、さまざまなスケール

の変動成分を抽出できる (Fig.C.1) (定義式をみると、変換後も元の時間軸情報 t が失われずに残っている)。

従って、上記の a, b からは、信号中にどのようなスケールの変動があるのかということだけでなく、その変動が時間軸のどのあたりにあるのかという情報も与えてくれるのである。しかし、これらによって抽出された構造は、ウェーブレットの形に依存するという問題点がある。

ここで、 (b, a) 空間におけるウェーブレット係数 $W(b, a)$ は、ウェーブレット波形とよく似た圧力変動波形が存在すれば大きくなり、係数に対し等高線を描くことで複雑なスケールの階層構造を示すことが可能となる。なお、マザーウェーブレット⁽³⁾には、次式で示す Morlet wavelet を用いた。

$$\psi(T) = \exp(ik_\psi T) \exp\left(-\frac{T^2}{2}\right) \quad (C.3)$$

$$T = \frac{t-b}{a} \quad (C.4)$$

なお、本研究では $k_\psi=6$ ⁽³⁾ とした。また、 i は $\sqrt{-1}$ である。本解析で使用する Morlet wavelet は、Mexican hat wavelet や反対称ウェーブレットと比較して、より詳細な情報を得ることが可能である⁽³⁾。Morlet wavelet の実数部は、 $T=0$ に対して対称である。なお、本解析において使用したマザーウェーブレットは周波数領域において局在性がよいため、 $1/a$ は周波数 f と同じことを意味しているものと考えられる。よって、縦軸と横軸にそれぞれ a, b をとり、 W の大きさを濃淡で描くことにより、時系列的に細かい変化を時間-周波数面上で観察することができ、現象のマルチスケール構造を明らかにすることができる。

離散ウェーブレット変換

離散ウェーブレット変換では、ウェーブレットは基底関数とならなければならない。しかし、これらの条件を満たすウェーブレットはかなり限定される。ここで、もし ψ をうまく選び適当な離散化によって ψ を完全正規直交系にできれば、信号解析には都合がよい。この変換を離散ウェーブレット変換と定義され、信号 $f(x)$ のウェーブレット級数展開は次式で与えられる。

$$d_k^{(j)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{j,k}(x) dx = \langle f(x) | \psi_{j,k}(x) \rangle \quad (C.5)$$

逆変換は、次式となる。

$$f(x) \sim \sum_j \sum_k d \psi_{j,k}(x) \quad (C.6)$$

ここで、 d は展開係数、 $\psi_{j,k}$ はあるアナライジング・ウェーブレットから離散的な平行移動とスケール変換によって生成される基底である。基底関数となるマザーウェーブレットは多重解像度解析と呼ばれる関数空間の階層構造を利用して作られる。

従って、逆変換の右辺の和をとって元の信号 $f(x)$ が復元されることは、無条件に保証されていない。和が正しく $f(x)$ を表すには、右辺の $\psi(2^j x - k)$ が関数 $f(x)$ の属する空間の基底 (基底関数) であればよい。また、離散ウェーブレット変換の特徴は基底が完全正規直交系をなるということで、この結果データ $f(x)$ のウェーブレット係数 d は互いに完全に独立になる。すなわち、ウェーブレット係数の示す内容はすべてもとの $f(x)$ に起因するものであることが保証される。

関連図書

- [1] 山口ら、ウェーブレット解析、科学、60-6(1990)、pp.398-405.
- [2] 李ら、ウェーブレット相互相関法による平面噴流の解析、15-Suppl.、2(1995)、pp.81-84.
- [3] 榭原ら、ウェーブレットを用いた乾性摩擦の解析法、機講論、No.940-26(1994)、pp.172-175.

索引

- i-mer, 22
- アボガドロ数, 114
- 一般ガス定数, 19, 114
- ウェーブレット解析, ix
- 運動方程式, 34, 36, 39, 42
- 液相分子集合体, 11, 22
- 液滴の密度, 118
- 液滴を含む混合気体の圧力, 21
- 液滴を含む混合気体の質量, 20
- 液滴を含む混合気体の状態方程式, 21
- 液滴を含む混合気体の分子量, 20
- エネルギーの式, 37, 39, 43
- エネルギー方程式, 35
- エロージョン, 17
- 遠心作用の損失, 17
- 応力テンソル, 38
- 音速, 20
- 核生成係数, 25, 116
- 核生成速度, 22, 23, 118, 122, 125
- 核生成速度式, 24
- ガス定数, 117, 120, 123
- 加速損失, 17
- 過熱度, 13
- 過飽和状態, 11
- 過飽和度, 12, 117, 120, 123
- 過冷却状態, 11
- 過冷却度, 12
- 完全気体, 21
- 気体の状態方程式, 19
- ギブス-ダルトンの法則, 21
- Gibbs の capillary 近似, 25
- Gibbs の自由エネルギー, 24
- 凝縮開始点, 14
- 凝縮クラスター, 22
- 凝縮係数, 26, 27, 116
- 凝縮衝撃波, 14, 15
- 凝縮速度式, 26, 28
- 凝縮粒子半径, 25
- 凝縮量, 13
- 凝縮領域, 14
- 均一核生成, 21
- 均一凝縮, 11
- クラスター, 11, 22
- クラスター成長速度, 119, 122, 125
- クラスターの成長速度式, 26
- クラスター半径, 26
- 古典凝縮理論, 11, 22
- 古典的な核生成速度式, 25
- 固有値, 108
- 混合気体の圧力, 20
- 混合気体の質量, 19, 118, 121, 124
- 混合気体の状態方程式, 20
- 混合気体の定圧比熱, 21
- 混合気体の粘性係数, 21
- 混合気体のプラントル数, 21
- 混合気体の分子 1 個質量, 21
- 混合気体の分子量, 19
- サーマルチョーキング, 14
- サザーランド定数, 119, 122, 126
- サザーランドの公式, 119, 122, 125
- 時間分割法, 111
- Sislian, 28
- 湿り空気, 12
- 湿り空気の潜熱, 119, 122, 125
- 湿り空気の表面張力, 118, 121, 125
- 湿り損失, 17
- 初期過飽和度, 13
- 水蒸気の圧力, 117, 120, 123
- 水蒸気の飽和蒸気圧力, 117
- 数密度, 23
- ストークスの仮説, 39, 43

静止流体テンソル, 38
制動損失, 17
secondary atomization, 17
絶対湿度, 12, 118, 120, 123
全圧損失, 29
全エネルギー, 35, 37
潜熱, 14

相対湿度, 12, 117, 120, 123
層流プラントル数, 115

体積力, 36
代表条件, 41
代表速度, 41
代表長さ, 41
代表プラントル数, 41
代表マッハ数, 41
代表レイノルズ数, 41
ダイマー, 22
ダルトンの法則, 19

定圧比熱, 115
定容比熱, 50

凍結音速, 21, 118, 121, 124
凍結マッハ数, 21
トリマー, 22

内部エネルギー, 35

熱的完全気体, 19
熱力学的損失, 17
熱量的完全気体, 19
粘性応力テンソル, 38
粘性係数, 115, 119, 122, 125

パッシブコントロール, 8

非均一凝縮, 11
比湿, 12, 118, 120, 123
非平衡凝縮, 12
表面エネルギー, 25
表面張力, 25
表面張力係数, 25, 116

ファール平均, 66
物性値, 114
primary atomization, 17
Frenkel の核生成速度式, 25

プロファイル損失, 17
分圧, 19
分子輸送, 19
分子量, 114

平衡凝縮, 11
Hertz-Knudsen の式, 26
Helmholtz の自由エネルギー, 24

Baldwin-Lomax, 96
ボルツマン定数, 24, 114

Maxwell-Boltzmann 分布, 24
マザーウェーブレット, x
マッハ数, 20

モノマー, 22

ヤコビ行列, 108

乱流プラントル数, 115
乱流モデル, 91

理想気体, 21
臨界クラスター, 22, 24, 25, 118, 121, 125

レイノルズ応力, 92
レイノルズ平均, 65, 91
レイリー流れ, 14
連続の式, 34, 36, 38, 42